Análisis Matemático. Grupo D. Test 1

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. ¿Cual de las siguientes afirmaciones es FALSA?

(a) Si $a, b \in \mathbb{Q}$, entonces $a + b \in \mathbb{Q}$.

(b) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $c < d$ entonces $ac < bd$.

(c) $\sqrt{a^2} = |a|$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

(d) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

(e) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\quad a < b$, y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

2. El ínfimo y el supremo del conjunto $A = \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ son:

(a) $\inf A = 1$ y $\sup A = 2$.

(b) El ínfimo de A es cualquier número menor que 0 y el supremo de A cualquier número mayor o igual que 2.

(c) Tiene ínfimo y es 1 pero no tiene supremo porque n varía entre todos los números naturales $\mathbb{N}$, el cual no es un conjunto acotado.

(d) $\inf A = 1$ y no tiene supremo porque $2 \notin A$.

(e) $\inf A = 0$ y $\sup A = 1$.

3. El conjunto de los números reales x que verifican $\frac{x+1}{x-1} \geq 3$ es:

(a) $(2, \infty)$.

(b) $(-\infty, 1) \cup [2, \infty)$.

(c) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

(d)$[2, \infty)$.

(e) Ninguna de las anteriores.

4. El conjunto de los puntos x reales que verifican $|3x + 1| < 2$ es:

(a) $(-2, 2)$

(b) $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$.

(c) $(-1, \frac{1}{3})$.

(d) $(-\infty, \frac{1}{3})$.

(e) $(-1, \infty)$.

5. El conjunto de los puntos x reales que verifican $|2x - 3| \geq 4$ es:

(a) $[\frac{7}{2}, \infty)$.

(b) No hay ningún número real que verifique la desigualdad.

(c) $(-\infty, -\frac{1}{2}]$.

(d) $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{7}{2}, \infty)$.

(e) Ninguna de las anteriores.

(CONTINÚA DETRÁS)

6. El conjunto de los puntos x reales que verifican $|2x-5| < |x-4|$ es:

(a) $(-\infty, 1)$.

(b) $(1, 3)$

(c) $[\frac{5}{2}, 3)$

(d) $(1, \frac{5}{2}]$

(e) Ninguna de las anteriores.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 2

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Los argumentos y módulos de los números complejos $z \in \mathbb{C}$ que verifican $z^4 = -2\sqrt{3} + 2i$ son

(a) Módulos: $\sqrt{2}$. Argumentos: $\frac{5\pi}{24}$, $\frac{17\pi}{24}$, $\frac{29\pi}{24}$, $\frac{41\pi}{24}$.

(b) Módulos: $\sqrt{2}$. Argumentos: $\frac{-\pi}{24}$, $\frac{11\pi}{24}$, $\frac{23\pi}{24}$, $\frac{35\pi}{24}$.

(c) Módulos: $\sqrt{2}$. Argumentos: $\frac{\pi}{24}$, $\frac{13\pi}{24}$, $\frac{25\pi}{24}$, $\frac{37\pi}{24}$.

(d) Sólo hay un número complejo que verifica la ecuación y tiene módulo 4^4 y argumento $\frac{-2\pi}{3}$.

(e) No existen números complejos z que verifiquen la ecuación.

(f) Ninguna de las anteriores.

2. Del polinomio en $\mathbb{C}$, $p(z) = z^{20} + (1-2i)z^{17} + iz^{13} + (\sqrt{2} - 3i)z^4 + (2-i)$ podemos decir:

(a) $p(z)$ es un número imaginario puro para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) Las raices del polinomio $p(z)$ (es decir, los puntos z tales que $p(z) = 0$) son las raices complejas 20-ésimas de $-(2-i)$.

(c) $p(z)$ es un número real para todo $z \in \mathbb{C}$.

(d) La ecuación polinómica $p(z) = 0$ no tiene soluciones.

(e) Existen $w_1, w_2, ..., w_{19}, w_{20} \in \mathbb{C}$ (no necesariamente distintos) tales que $p(z) = (z - w_1) \times (z - w_2) \times \cdots \times (z - w_{19}) \times (z - w_{20})$.

(f) Ninguna de las anteriores.

3. Considera el número complejo $(2+3i)(1-i) + \frac{3+i}{i}$. Indica la afirmación correcta:

(a) $\mathrm{Re}(z) = 8$, $\mathrm{Im}(z) = 2$.

(b) $\mathrm{Re}(z) = (2+3i)(1-i)$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{3+i}{i}$.

(c) No es un número complejo, y por tanto no tiene ni parte real ni parte imaginaria.

(d) $\mathrm{Re}(z) = 6$, $\mathrm{Im}(z) = -2$.

(e) $\mathrm{Re}(z) = 2$, $\mathrm{Im}(z) = 6$.

(f) Ninguna de las anteriores.

4. Considera el número complejo $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$. Entonces z^{15} es:

(a) $2^{15}(-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)$.

(b) $2^{15}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i)$.

(c)$2^{15}(+\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i)$.

(d) $2^{15}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i)$.

(e) $2^{15}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i)$.

(f) Ninguna de las anteriores.

5. Los números complejos z que verifican $z^2 + (1-i)z - i = 0$ son

(a) La ecuación no tiene solución.

(b) $i, \quad -1$.

(c) $1-i, \quad -i$.

(d) $1, \quad 1-i, \quad -i$.

(e) $0, \quad 1, \quad 1-i, \quad -i$.

(f) Ninguna de las anteriores.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 3

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. ¿Cual de las siguientes afirmaciones es la correcta definición de $\lim_{x\to a} f(x) = b$?

(a) Existe $\varepsilon > 0$ y existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \varepsilon$ entonces $|f(x) - b| < \delta$.

(c) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

(d) Para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

(e) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|f(x) - b| < \varepsilon$, entonces $0 < |x-a| < \delta$.

(f) Ninguna de las anteriores.

2. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Indica la afirmación correcta:

(a) No existe el $\lim_{x\to 1} f(x)$.

(b) $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$

(c) f es continua en $x = 1$.

(d) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

(e) $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

(f) Ninguna de las anteriores.

3. De la función $f(x) = \begin{cases} \log x, & \text{si } x > 0 \\ e^{\sin x}, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ podemos decir:

(a) Existe el $\lim_{x\to 0} f(x)$ y es un número real.

(b) f es continua por la izquierda en 0.

(c) f es continua por la derecha en 0.

(d) f es continua en 0.

(e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

(f) Ninguna de las anteriores.

4. ¿Cual de las siguientes afirmaciones es la correcta definición de continuidad de $f(x)$ en el punto a?

(a) Existe $\varepsilon > 0$ y existe $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \varepsilon$ entonces $|f(x) - f(a)| < \delta$.

(c) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, entonces $|x-a| < \delta$.

(d) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(e) Para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(f) Ninguna de las anteriores.

5. Considera la función $f(x) = \frac{1}{1+\log(x^2+1)+\sin^3 x}$. Indica la afirmación correcta.

(a) Existe $c \in (0, \infty)$ tal que $f(c) = \frac{1}{200}$.

(b) f no es continua en $x = 0$.

(c) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$.

(d) $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$.

(e) No existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = \text{máx}\{f(x) : x \in [0, 1]\}$.

(f) Ninguna de las anteriores.

6. De la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^3}, & x > 1 \\ x^2+1, & x \leq 1 \end{cases}$ podemos decir:

(a) Para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < x - 1 < \delta$ entonces $f(x) > M$.

(b) f es continua en 1.

(c) Para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 1| < \delta$ entonces $f(x) > M$.

(d) Existe el $\lim_{x\to 1} f(x)$.

(e) Existe $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = \max\{f(x) : x \in [0, 2]\}$.

(f) Ninguna de las anteriores.

7. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$. Indica la afirmación correcta:

(a) No existe el $\lim_{x\to 2} f(x)$.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$, se cumple: si $0 < |x - 2| < \min\{\frac{\varepsilon}{4}, 2\}$, entonces $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

(c) $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$.

(d) $\lim_{x\to 2} f(x) = -1$

(e) Existe $c \in [0, 4]$ tal que $f(c) = -\frac{1}{2}$.

(f) Ninguna de las anteriores.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 4

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Considera la ecuación $x^4 + e^x = 7$. ¿Cuantas soluciones tiene en $\mathbb{R}$?

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

(e) Infinitas.

(f) Niguna de las anteriores.

2. ¿Cual de las siguientes afirmaciones es la correcta definición de derivada de $f(x)$ en el punto a?

(a) Definimos la derivada $f'(a)$ como aquella que verifica: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)| < \varepsilon$.

(b) Definimos la derivada $f'(a)$ como aquella que verifica: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f'(x) - f'(a)| < \varepsilon$.

(c) Definimos la derivada $f'(a)$ como la pendiente de cualquier recta que pase por el punto $(a, f(a))$.

(d) Definimos la derivada $f'(a)$ como el límite $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$.

(e) Definimos la derivada $f'(a)$ como el valor del límite $\lim\limits_{h\to\infty} \dfrac{f(h) - f(a)}{h - a}$.

(f) Ninguna de las anteriores.

3. Si n, m son numeros naturales, ¿cual es el $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \log(x^m)$?

(a) $-\infty$.

(b) $\frac{n}{m}$.

(c) $n \cdot m$.

(d) $n + m$.

(e) 0.

(f) Ninguna de las anteriores.

4. De la función $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > \pi \\ \frac{x-\pi}{x-4}, & x \leq \pi \end{cases}$ podemos decir:

(a) f es continua y derivable en π.

(b) f es derivable en π, pero no es continua en π.

(c) Existe $\lim_{x\to\pi} f'(x)$.

(d) f es continua en π, pero no es derivable en π.

(e) $f'(\pi) = \lim_{x\to\pi^-} f'(x)$.

(f) Ninguna de las anteriores.

5. Considera la función definida en $\mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)\cos(3x)$. Indica la afirmación correcta:

(a) f es decreciente en $(0, \frac{\pi}{6})$.

(b) Todos los puntos de la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (con k número entero) son puntos de inflexión de f.

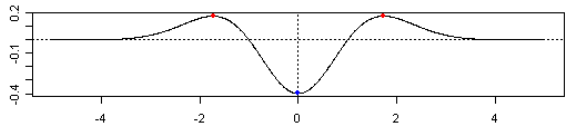
(c) $|f(x) - f(y)| \leq 5|x - y|$, para todo x, $y \in \mathbb{R}$.

(d) f es convexa en $\mathbb{R}$.

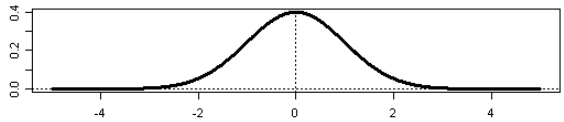
(e) f es cóncava en $\mathbb{R}$.

(f) Ninguna de las anteriores.

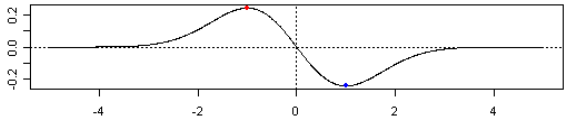
6. Las gráficas siguientes se corresponden a una función f, su derivada f' y su derivada segunda f'', pero no sabemos si están colocadas en ese órden. Enumera las gráficas en el órden correcto.



(a)



(b)



(c)

(a) a,b,c.

(b) a,c,b.

(c) b,a,c.

(d) b,c,a.

(e) c,a,b.

(f) c,b,a.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 5

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Considera la función $f(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t)^2} & t \neq 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$. Si definimos $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Señala la afirmación correcta.

(a) F es cóncava en $\mathbb{R}$.

(b) F no es derivable en $\mathbb{R}$.

(c) F es creciente en $\mathbb{R}$.

(d) F no es una función.

(e) f es una primitiva de F.

(f) Ninguna de las anteriores.

2. Considera funciones f, g acotadas e integrables en $[a, b]$ ¿Cual de las siguientes afirmaciones es INCORRECTA?

(a) $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

(b) Si g es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

(c) $rf + sg$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b (rf + sg)(x)\,dx = r\int_a^b f(x)\,dx + s\int_a^b g(x)\,dx$, para todo $r, s \in \mathbb{R}$.

(d) Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(e) Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$.

(f) Ninguna de las anteriores.

3. Consideremos una función acotada definida en $[a, b]$ e integrable. La suma de Riemann de la función f correspondiente a una partición $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y puntos intermedios $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (previamente elegidos), $k = 1, \ldots, n$, se define como:

(a) $\sup\{L(P, f) : P$ partición de $[a, b]\}$, siendo $L(P, f)$ la suma inferior de Riemann correspondiente a la partición P.

(b) $\inf\{U(P, f) : P$ partición de $[a, b]\}$, siendo $U(P, f)$ la suma superior de Riemann correspondiente a la partición P.

(c) $\sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$.

(d) La integral $\int_a^b f(x)dx$.

(e) $\sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$, siendo $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.

(f) $\sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$, siendo $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.

4. Considera la función $f(x) = x$. Indica la afirmación INCORRECTA.

(a) $\int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}(1 + \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n}(1 + \frac{n-1}{n}) + \frac{1}{n}(1 + \frac{n}{n})]$.

(b) $\int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}(1 + \frac{0}{n}) + \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n}(1 + \frac{n-2}{n}) + \frac{1}{n}(1 + \frac{n-1}{n})]$.

(c) $\int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1+0+1+\frac{1}{n}}{2}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{1+\frac{1}{n}+1+\frac{2}{n}}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{1+\frac{n-2}{n}+1+\frac{n-1}{n}}{2}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{1+\frac{n-1}{n}+1+\frac{n}{n}}{2}\right)\right) =$

$= \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2n}) + \frac{1}{n}(1 + \frac{3}{2n}) + \cdots + \frac{1}{n}(1 + \frac{2n-3}{2n}) + \frac{1}{n}(1 + \frac{2n-1}{2n}))$.

(d) $\int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2n}(1 + \frac{1}{2n}) + \frac{1}{2n}(1 + \frac{2}{2n}) + \cdots + \frac{1}{2n}(1 + \frac{2n-1}{2n}) + \frac{1}{2n}(1 + \frac{2n}{2n})]$.

(e) $\int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2n}(1 + \frac{0}{2n}) + \frac{1}{2n}(1 + \frac{1}{2n}) + \cdots + \frac{1}{2n}(1 + \frac{2n-2}{2n}) + \frac{1}{2n}(1 + \frac{2n-1}{2n})]$.

(f) Ninguna de las anteriores.

5. Decimos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable si f es acotada y

(a) $\sup\{L(P, f) : P$ partición de $[a, b]\} = \text{ínf}\{U(P, f) : P$ partición de $[a, b]\}$ (siendo $L(P, f)$ y $U(P, f)$ la suma inferior y superior, respectivamente, de f correspondiente a la partición P).

(b) tiene sumas inferiores y sumas superiores para cualquier partición del intervalo $[a, b]$ (es decir, existen $L(P, f)$ y $U(P, f)$ para cualquier partición P del intervalo $[a, b]$).

(c) cualquier suma inferior coincide con cualquier suma superior para toda partición P (es decir, $L(P, f) = U(P, f)$ para toda P partición del intervalo $[a, b]$).

(d) existe una suma inferior que coincide con una suma superior para alguna partición P (es decir, existe P partición del intervalo $[a, b]$ tal que $L(P, f) = U(P, f)$).

(e) tiene alguna suma inferior o superior para alguna partición del intervalo $[a, b]$ (es decir, existe alguna partición P del intervalo $[a, b]$ tal que $L(P, f)$ ó $U(P, f)$ existe).

(f) existe alguna suma superior que es menor extrictamente que su correspondiente suma superior para alguna partición P (es decir, existe P partición del intervalo $[a, b]$ tal que $U(P, f) < L(P, f)$).

6. El área de la región limitada por las funciones $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x - 1$ entre $x = 0$ y $x = 2$ es:

(a) $\int_0^2 \pi(x^2 - x)^2 \, dx$.

(b) $\int_0^2 \pi(x^4 - x^2) \, dx$.

(c) $\int_{-1}^2 (y - \sqrt{y + 1}) \, dy$.

(d) $\int_0^1 (x^2 - x) \, dx + \int_1^2 (x - x^2) \, dx$.

(e) $\int_0^1 (x - x^2) \, dx + \int_1^2 (x^2 - x) \, dx$.

(f) Ninguna de las anteriores.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 6

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. ¿Cual de las siguientes integrales es impropia?

(a) $\int_0^1 \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx.$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{1+\log^2 x}\, dx.$

(c) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx.$

(d) $\int_{e^{-1}}^1 \frac{1}{1+\log x}\, dx.$

(e) $\int_0^2 \frac{1}{(4-x)^5}\, dx.$

(f) Ninguna de las anteriores.

2. ¿Cual de las siguientes integrales impropias es convergente?

(a) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+2}}{x^{3/2}+1}\, dx.$

(b) $\int_1^2 \frac{x^4+2}{(2-x)^{3/4}}\, dx.$

(c) $\int_1^\infty \frac{x+2}{x^2+x+7}\, dx.$

(d) $\int_1^4 \frac{x+2}{16-x^2}\, dx.$

(e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{|5-x|}{x^2+1}\, dx$

(e) Ninguna de las anteriores.

3. ¿Cual de las siguientes integrales impropias es divergente?

(a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^4+17}\, dx.$

(b) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx.$

(c) $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+3x^2+1}\, dx.$

(d) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x^2+7)}\, dx.$

(e) $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[4]{5-x}}\, dx.$

(f) Ninguna de las anteriores.

4. ¿Cual de las siguientes integrales impropias es convergente?

(a) $\int_0^\infty \frac{4-\operatorname{sen} x}{x+1} dx$

(b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x^2+1})}{\sqrt[3]{x^2+3}}\, dx.$

(c) $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^4+1}\, dx.$

(d) $\int_0^{\pi/4} \frac{\log(\cos x)}{x}\, dx.$

(e) $\int_{-1}^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x^2+1)^{2/3}}\, dx.$

(f) Ninguna de las anteriores.

5. Se tiene un círculo de radio r y centro $(0, R)$ con $R > r$. Si se le hace girar alrededor del eje x se obtiene un sólido llamado *toro*, con la forma de una rosquilla. El ÁREA de la superficie del toro es:

(a) $\int_{-r}^{r} 2\pi(R + \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx + \int_{-r}^{r} 2\pi(R - \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx.$

(b) $\int_{-r}^{r} \pi(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx - \int_{-r}^{r} \pi(R - \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx.$

(c) $\int_{-r}^{r} \pi(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx + \int_{-r}^{r} \pi(R - \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx.$

(d) $\int_{-r}^{r} 2\pi(R + \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx - \int_{-r}^{r} 2\pi(R - \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx.$

(e) $\int_{-r}^{r} 2\pi(\sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx.$

(f) Ninguna de las anteriores.

6. El volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región limitada por las funciones $f(x) = 10 - x^2$ y $g(x) = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 3$ es:

(a) $\int_1^3 2\pi x(10 - 2x^2)\, dx.$

(b) $\int_1^3 2\pi x(2x^2 - 10) dx.$

(c) $\int_1^3 \pi(10 - 2x^2)^2\, dx.$

(d) $\int_1^{\sqrt{5}} (10 - 2x^2)\, dx + \int_{\sqrt{5}}^3 (2x^2 - 10) dx.$

(e) $\int_1^{\sqrt{5}} 2\pi x(10 - 2x^2)\, dx + \int_{\sqrt{5}}^3 2\pi x(2x^2 - 10) dx.$

(f) Ninguna de las anteriores.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 6

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. ¿Cual de las siguientes integrales es impropia?

(a) $\int_0^1 \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx.$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{1+\log^2 x}\, dx.$

(c) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx.$

(d) $\int_{e^{-1}}^1 \frac{1}{1+\log x}\, dx.$

(e) $\int_0^2 \frac{1}{(4-x)^5}\, dx.$

(f) Ninguna de las anteriores.

2. ¿Cual de las siguientes integrales impropias es convergente?

(a) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+2}}{x^{3/2}+1}\, dx.$

(b) $\int_1^2 \frac{x^4+2}{(2-x)^{3/4}}\, dx.$

(c) $\int_1^\infty \frac{x+2}{x^2+x+7}\, dx.$

(d) $\int_1^4 \frac{x+2}{16-x^2}\, dx.$

(e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{|5-x|}{x^2+1}\, dx$

(e) Ninguna de las anteriores.

3. ¿Cual de las siguientes integrales impropias es divergente?

(a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^4+17}\, dx.$

(b) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx.$

(c) $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+3x^2+1}\, dx.$

(d) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x^2+7)}\, dx.$

(e) $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[4]{5-x}}\, dx.$

(f) Ninguna de las anteriores.

4. ¿Cual de las siguientes integrales impropias es convergente?

(a) $\int_0^\infty \frac{4-\operatorname{sen} x}{x+1} dx$

(b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x^2+1})}{\sqrt[3]{x^2+3}}\, dx.$

(c) $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^4+1}\, dx.$

(d) $\int_0^{\pi/4} \frac{\log(\cos x)}{x}\, dx.$

(e) $\int_{-1}^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x^2+1)^{2/3}}\, dx.$

(f) Ninguna de las anteriores.

5. Se tiene un círculo de radio r y centro $(0, R)$ con $R > r$. Si se le hace girar alrededor del eje x se obtiene un sólido llamado *toro*, con la forma de una rosquilla. El ÁREA de la superficie del toro es:

(a) $\int_{-r}^{r} 2\pi(R + \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx + \int_{-r}^{r} 2\pi(R - \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx.$

(b) $\int_{-r}^{r} \pi(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx - \int_{-r}^{r} \pi(R - \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx.$

(c) $\int_{-r}^{r} \pi(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx + \int_{-r}^{r} \pi(R - \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx.$

(d) $\int_{-r}^{r} 2\pi(R + \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx - \int_{-r}^{r} 2\pi(R - \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx.$

(e) $\int_{-r}^{r} 2\pi(\sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx.$

(f) Ninguna de las anteriores.

6. El volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región limitada por las funciones $f(x) = 10 - x^2$ y $g(x) = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 3$ es:

(a) $\int_1^3 2\pi x(10 - 2x^2)\, dx.$

(b) $\int_1^3 2\pi x(2x^2 - 10) dx.$

(c) $\int_1^3 \pi(10 - 2x^2)^2\, dx.$

(d) $\int_1^{\sqrt{5}} (10 - 2x^2)\, dx + \int_{\sqrt{5}}^3 (2x^2 - 10) dx.$

(e) $\int_1^{\sqrt{5}} 2\pi x(10 - 2x^2)\, dx + \int_{\sqrt{5}}^3 2\pi x(2x^2 - 10) dx.$

(f) Ninguna de las anteriores.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 7

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Considera una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Indica la afirmación INCORRECTA:

(a) Decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ (siendo ℓ un número real) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N natural tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$.

(b) Decimos que $\lim_n a_n = \infty$ si para todo M número real, existe N natural tal que $a_n > M$ siempre que $n \geq N$.

(c) Decimos que $\lim_n a_n = -\infty$ si para todo M número real, existe N natural tal que $a_n < M$ siempre que $n \geq N$.

(d) Decimos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada si existe un número real $M > 0$ tal que $|a_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(e) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces está acotada.

(f) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada, entonces es convergente.

2. Considera sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Indica la afirmación INCORRECTA :

(a) Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \geq n_0$ y la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite, entonces $\lim_n a_n \geq 0$.

(b) $\lim_n a_n = 0$ si y sólo si $\lim_n |a_n| = 0$.

(c) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones convergentes y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq b_n$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\lim_n a_n \geq \lim_n b_n$.

(d) Si $\{a_n\}$ es una sucesión cualquiera y $\lim_n b_n = 0$, entonces $\lim_n a_n b_n = 0$.

(e) Si $\lim_n a_n = \lim_n c_n = \ell$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq b_n \geq c_n$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\lim_n b_n = \ell$.

(f) $\lim_n a_n = \ell$ (siendo ℓ un número real) si y sólo si $\lim_n |a_n - \ell| = 0$.

3. Indica la afirmación CORRECTA:

(a) Si $0 < b < 1$ entonces $\lim_n b^n = \infty$.

(b) Si $0 < b < 1$ entonces $\lim_n \sqrt[n]{b} = 0$.

(c) Si $b > 1$ entonces la sucesión $\{b^n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente y tiene límite infinito.

(d) $\lim_n n \log(1 + \frac{1}{n^2}) = 1$.

(e) $\lim_n n \log(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$.

(f) Ninguna de las anteriores.

4. Si $\{a_n\}_n$ es una sucesión monótona, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la CORRECTA?

(a) Si $\{a_n\}_n$ está acotada, entonces es convergente.

(b) Si $\{a_n\}_n$ es estrictamente creciente, entonces su límite es ∞.

(c) Si $\{a_n\}_n$ es estrictamente decreciente, entonces su límite es $-\infty$.

(d) $\{a_n\}_n$ es convergente.

(e) $\{a_n\}_n$ está acotada.

(f) Ninguna de las anteriores.

(CONTINÚA DETRÁS)

5. ¿Cuál de las siguientes sucesiones es DIVERGENTE?

(a) $\{\frac{\log n}{n}\}_n$

(b) $\{\frac{n^2}{e^n}\}_n$

(c) $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_n$

(d) $\{\sqrt{n^2+n}-n\}_n$

(e) $\{(\frac{\cos(\pi n)}{n})\}_n$

(f) Ninguna de las anteriores.

6. ¿Cuál de las siguientes sucesiones es CONVERGENTE?

(a) $\{a_n\}_n$ si definimos $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

(b) $\{(-1)^n\sqrt{n}\}_n$

(c) $\{\frac{n^3-n^2+n+1}{n^2+n+1}\}_n$

(d) $\{a_n\}_n$ si definimos $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 2a_n$ para $n \geq 1$.

(e) $\{\frac{\log n}{\sqrt{n}}\}_n$

(f) Ninguna de las anteriores.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 8

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Considera una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Indica la afirmación correcta:

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(c) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(d) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(f) Ninguna de la anteriores.

2. Definimos una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente y con suma $S \in \mathbb{R}$:

(a) La sucesión de sus sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y está acotada superiormente por S ($S_n = a_1 + \cdots + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

(b) $\lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = S$ ($S_n = a_1 + \cdots + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

(c) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y está acotada superiormente por S.

(d) $\lim_{n\to\infty} a_n = S$.

(e) La sucesión de sus sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a S ($S_n = a_1 + \cdots + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

(f) Ninguna de las anteriores.

3. Considera dos series de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Indica la afirmación <u>INCORRECTA</u>:

(a) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \geq N$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$, entonces las dos series convergen o las dos series divergen.

(b) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

(c) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \geq N$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, entonces las dos series convergen o las dos series divergen.

(d) Supongamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \geq N$, que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(e) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(f) Todas las afirmaciones anteriores son correctas.

4. Cual de las siguientes series converge absolutamente?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n})$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^3}+2}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+1}$.

(f) Ninguna de las anteriores.

5. ¿Cual de las siguientes series converge condicionalmente?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n}{n^3+1}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$.

(f) Ninguna de las anteriores.

6. ¿Cual de las siguientes series NO es convergente?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi)}{n+1}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi)}{n^2+1}$.

(f) Ninguna de las anteriores.