Análisis Matemático. Grupo D. Test 1

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. ¿Cual de las siguientes afirmaciones es falsa?

(a) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

(b) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $c < d$ entonces $ac < bd$.

(c) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\ a < b$, y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

(d) $\sqrt{a^2} = |a|$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

(e) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

2. El ínfimo del conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es

(a) 0

(b) $-0{,}01$

(c) 1

(d) No tiene, porque $0 \notin A$.

(e) Cualquier número real menor o igual que 0.

3. El conjunto de los números reales x que verifican $\frac{x+2}{2x-1} \geq 2$ es:

(a) $(-\infty, \frac{4}{3}]$

(b) $(-\infty, \frac{1}{2})$

(c) $[\frac{4}{3}, \infty)$

(d)$(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$

(e) $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup [\frac{4}{3}, \infty)$

4. El conjunto de los puntos x reales que verifican $|2x + 3| < 1$ es:

(a) $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$

(b) $(-\infty, -2)$

(c) $(-\infty, -1)$

(d) $[-2, -1]$

(e) $(-2, -1)$

5. El conjunto de los puntos x reales que verifican $|x - 1| \geq 1$ es:

(a) $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

(b) $(-\infty, 0]$

(c) $[2, \infty)$

(d) $(-\infty, 2]$

(e) $[0, \infty)$

6. El conjunto de los puntos x reales que verifican $|x^2 - 3x| > 1$ es:

(a) $(-\infty, \frac{3-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \infty)$

(b) $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$

(c) $(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2})$

(d) $(-\infty, \frac{3-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \infty)$

(e) No hay ningún x real que verifique la desigualdad.

Análisis Matemático. Grupo B. Test 2

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Los argumentos de los números complejos $z \in \mathbb{C}$ que verifican $z^3 = -1 + i$ son

(a) $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$.

(b) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$.

(c) $\frac{\pi}{12}$, $\frac{9\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$.

(d) Sólo hay un número complejo que verifica la ecuación y tiene argumento $\frac{9\pi}{4}$.

(e) No existen números complejos z que verifiquen la ecuación.

2. Del polinomio en $\mathbb{C}$, $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ (con $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ coeficientes del polinomio) podemos decir:

(a) Existen $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ (no necesariamente distintos) tales que $p(z) = (z - w_1) \times \cdots \times (z - w_n)$.

(b) Las raices del polinomio son las raices complejas n-ésimas de a_0.

(c) $p(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(d) p(z) tiene una raiz real (es decir, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 0$).

(e) Ninguna de las anteriores.

3. Considera el número complejo $z = 1 + i + \frac{3+2i}{1-i}$. Indica la afirmación correcta:

(a) $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(z) = i + \frac{3+2i}{1-i}$.

(b) $\mathrm{Re}(z) = 4$, $\mathrm{Im}(z) = 2$.

(c) No es un número complejo, y por tanto no tiene ni parte real ni parte imaginaria.

(d) $\mathrm{Re}(z) = \frac{7}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{3}{2}$.

(e) $\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{7}{2}$.

4. Considera el número complejo $z = -1 + \sqrt{3}\, i$. Entonces z^{17} es:

(a)$-2^{16}(1 - \sqrt{3}\, i)$.

(b) $2^{16}(1 + \sqrt{3}\, i)$.

(c)$-2^{16}(1 + \sqrt{3}\, i)$.

(d) $2^{16}(1 - \sqrt{3}\, i)$.

(e) Ninguna de las anteriores.

5. Del conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : \frac{(6-x)(x-4)}{1+x} \leq 0\}$ podemos decir que:

(a) Tiene mínimo y no tiene máximo.

(b) No tiene mínimo y tiene máximo.

(c) Tiene supremo pero no tiene máximo.

(d) Tiene ínfimo y no tiene supremo.

(e) Tiene mínimo y supremo.

6. Del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \frac{(2-x)(x-1)}{x} \geq 0\}$ podemos decir que:

(a) Tiene mínimo y no tiene máximo.

(b) No tiene mínimo y tiene máximo.

(c) Tiene supremo pero no tiene máximo.

(d) Tiene ínfimo y no tiene supremo.

(e) Tiene ínfimo y supremo.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 3

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. ¿Cual de las siguientes afirmaciones es la correcta definición de $\lim_{x\to a} f(x) = b$?

(a) Para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-b| < \varepsilon$.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|f(x)-b| < \varepsilon$, entonces $0 < |x-a| < \delta$.

(c) Existe $\varepsilon > 0$ y existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-b| < \varepsilon$.

(d) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \varepsilon$ entonces $|f(x)-b| < \delta$.

(e) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-b| < \varepsilon$.

2. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$. Indica la afirmación correcta:

(a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|f(x)-1| < \varepsilon$.

(b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

(c) No existe el $\lim_{x\to 1} f(x)$.

(d) $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$

(e) f es continua en $x = 1$.

3. De la función $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \geq 0 \\ \sin x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ podemos decir:

(a) f es continua en 0.

(b) Existe el $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(c) f es continua por la izquierda en 0.

(d) f es continua por la derecha en 0.

(e) Ninguna de las anteriores.

4. ¿Cual de las siguientes afirmaciones es la correcta definición de continuidad de $f(x)$ en el punto a?

(a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \varepsilon$ entonces $|f(x)-f(a)| < \delta$.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$, entonces $|x-a| < \delta$.

(c) Existe $\varepsilon > 0$ y existe $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

(d) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

(e) Para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

5. Considera la función $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2(x^3)+e^{x^2}}$. Indica la afirmación correcta.

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(b) Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = \frac{1}{4}$.

(c) f no es continua en $x = 0$.

(d) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

(e) Ninguna de las anteriores.

(Continúa detrás)

6. De la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 0 \\ e^x, & x \leq 0 \end{cases}$ podemos decir:

(a) f es continua en 0.

(b) Para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta$ entonces $f(x) > M$.

(c) Existe el $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(d) Para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < x < \delta$ entonces $f(x) > M$.

(e) Ninguna de las anteriores.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 4

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Considera la función $f(x) = \log x$ (logaritmo neperiano) definida para $x > 0$. Indica la afirmación correcta:

(a) f está acotada inferiormente, es decir, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$ para todo $x > 0$.

(b) f está acotada superiormente, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ para todo $x > 0$.

(c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$ es $y = x - 1$.

(d) f no es derivable.

(e) Niguna de las anteriores.

2. ¿Cual de las siguientes afirmaciones es la correcta definición de derivada de $f(x)$ en el punto a?

(a) Definimos la derivada $f'(a)$ como el límite $\lim_{x\to a} f'(x)$.

(b) Definimos la derivada $f'(a)$ como aquella que verifica: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)| < \varepsilon$.

(c) Definimos la derivada $f'(a)$ como aquella que verifica: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f'(x) - f'(a)| < \varepsilon$.

(d) Definimos la derivada $f'(a)$ como la pendiente de cualquier recta que pase por el punto $(a, f(a))$.

(e) Ninguna de las anteriores.

3. Considera la función $f(x) = e^{\cos x} \sin x$. Indica la afirmación correcta.

(a) Existe $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(x) = \frac{5}{6}$.

(b) f no es continua.

(c) f no es derivable.

(d) f no está acotada.

(e) Ninguna de las anteriores.

4. De la función $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ podemos decir:

(a) f es continua en 0, pero no es derivable en 0.

(b) f es continua y derivable en 0.

(c) f es derivable en 0, pero no es continua en 0.

(d) No existe $\lim_{x\to 0} f'(x)$.

(e) Ninguna de las anteriores.

5. Considera la función $f(x) = |x - 5|$. Señala la afirmación correcta.

(a) No existe el $\lim_{x\to 5^-} f'(x)$.

(b) Existe el $\lim_{x\to 5} f'(x)$.

(c) f no es continua en $x = 5$.

(d) f no es derivable en $x = 5$.

(e) No existe el $\lim_{x\to 5^+} f'(x)$.

(CONTINÚA DETRÁS)

6. Considera la función definida en $\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x \geq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x < 1. \end{cases}$ Indica la afirmación correcta:

(a) Existen $\max\{f(x) : x \in [-1, 1]\}$ y $\min\{f(x) : x \in [-1, 1]\}$.

(b) Puesto que $f(0) = f(\sqrt{2})$, existe $c \in (0, \sqrt{2})$ tal que $f'(c) = 0$.

(c) Existe el $\lim_{x \to 1^+} f'(x)$.

(d) $f(x)$ es continua en $x = 1$.

(e) f es derivable en $\mathbb{R}$.

Análisis Matemático. Grupo B. Test 4

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Considera la función $f(x) = x + \frac{\sin^2 x}{2}$. Indica la afirmación correcta.

(a) $|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) f es decreciente en $(0, \infty)$.

(c) f es convexa en $(0, \infty)$.

(d) f es cóncava en $(0, \infty)$.

(e) Ninguna de las anteriores.

2. Considera la ecuación $x^2 - \log x = \frac{1}{2}$ (logaritmo neperiano). ¿Cuantas soluciones tiene en $\mathbb{R}$?

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) Infinitas

3. ¿Cual es el $\lim_{x\to 0^+} x \log(\operatorname{tg} x)$?

(a) 0.

(b) 1.

(c) 0.

(d) No existe porque nos da una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.

(e) 2.

4. Considera una función f acotada e integrable en $[a, b]$ ¿Cual de las siguientes afirmaciones es INCORRECTA?

(a) Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$.

(b) $|\int_a^b f(x)\,dx| \geq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

(c) Si g es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

(d) $\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{L(P, f) : P \text{ partición de } [a, b]\} = \inf\{U(P, f) : P \text{ partición de } [a, b]\}$. (Recuerda que $L(P, f)$ es la suma inferior de f correspondiente a la partición P y $U(P, f)$ es la suma superior de f correspondiente a la partición P).

(e) Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

5. Considera la función $f(x) = x^{4/9}$. Indica la afirmación correcta.

(a) $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.

(b) f es concava en $\mathbb{R}$.

(c) f es convexa en $\mathbb{R}$.

(d) $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

(e) Ninguna de las anteriores.

(CONTINÚA DETRÁS)

6. Considera la función $f(x) = x(\operatorname{arc\,tg}(x) - \frac{\pi}{2})$. Indica la afirmación correcta.

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

(b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(c) No existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

(e) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 6

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Considera la función $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t^2}{t^2} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$. Si definimos $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, señala la afirmación correcta.

(a) F no es una función.

(b) F es derivable en $\mathbb{R}$.

(c) f es una primitiva de F.

(d) F es creciente en $\mathbb{R}$.

(e) Ninguna de las anteriores.

2. Consideremos una función acotada definida en $[a,b]$ e integrable. La suma de Riemann de la función f correspondiente a una partición $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ y puntos intermedios $t_k \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \ldots, n$ es

(a) la integral $\int_a^b f(x)dx$.

(b) $\sup\{L(P,f) : P$ partición de $[a,b]\}$, siendo $L(P,f)$ la suma inferior de Riemann correspondiente a la partición P.

(c) $\inf\{U(P,f) : P$ partición de $[a,b]\}$, siendo $U(P,f)$ la suma superior de Riemann correspondiente a la partición P.

(d) $\sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$.

(e) Ninguna de las anteriores

3. El área de la región limitada por las funciones $f(x) = \frac{x}{2}$ y $g(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 2$ es:

(a) $\int_0^2 (\frac{x}{2} - x^2)\,dx$.

(b) $\int_0^2 (x^2 - \frac{x}{2})\,dx$.

(c) $\int_0^{1/2} (x^2 - \frac{x}{2})\,dx + \int_{1/2}^2 (\frac{x}{2} - x^2)dx$.

(d) $\int_0^{1/2} (\frac{x}{2} - x^2)\,dx + \int_{1/2}^2 (x^2 - \frac{x}{2})dx$.

(e) $\int_0^2 \pi(x^2 - \frac{x}{2})^2\,dx$.

4. Considera la función $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{x}{2}$. El volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región del plano limitada por las dos funciones entre $x = 0$ y $x = 2$ es:

(a) $\int_0^2 \pi(\frac{x^2}{4} - x^4)\,dx$.

(b) $\int_0^2 (x^2 - \frac{x}{2})^2\,dx$.

(c) $\int_0^2 \pi(x^4 - \frac{x^2}{4})\,dx$.

(d) $\int_0^{1/2} \pi(\frac{x^2}{4} - x^4)\,dx + \int_{1/2}^2 \pi(x^4 - \frac{x^2}{4})dx$.

(e) $\int_0^{1/2} \pi(x^4 - \frac{x^2}{4})\,dx + \int_{1/2}^2 \pi(\frac{x^2}{4} - x^4)dx$.

(CONTINÚA DETRÁS)

5. Considera la función $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{x}{2}$. El volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región del plano limitada por las dos funciones entre $x = 0$ y $x = 8$ es:

(a) $\int_0^4 \pi(y - 4y^2)\, dy$.

(b) $\int_0^{1/4} \pi(y - 4y^2)\, dy + \int_{1/4}^4 \pi(4y^2 - y) dy$.

(c) $\int_0^4 \pi(2y - \sqrt{y})^2\, dy$.

(d) $\int_0^{1/4} \pi(4y^2 - y)\, dy + \int_{1/4}^4 \pi(y - 4y^2) dy$.

(e) $\int_0^{1/2} \pi(4y^2 - y)\, dy + \int_{1/2}^2 \pi(y - 4y^2) dy$.

6. La longitud del arco de curva formado por la función $f(x) = x^3$ entre $x = 1$ y $x = 3$ es

(a) $\int_1^3 2\pi x^4\, dx$.

(b) $\int_1^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx$

(c) $\int_1^3 2\pi x^4 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx$.

(d) $\int_1^3 \pi x^6\, dx$.

(e) Ninguna de las anteriores.

Análisis Matemático. Grupo D. Test 7

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. ¿Cual de las siguientes integrales es impropia?

(a) $\int_0^1 x^2\,dx$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

(c) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$.

(d) $\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx$.

(e) Ninguna de las anteriores.

2. ¿Cual de las siguientes integrales impropias es convergente?

(a) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

(b) $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$.

(c) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

(d) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

(e) Ninguna de las anteriores.

3. ¿Cual de las siguientes integrales impropias es divergente?

(a) $\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

(b) $\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^{3/4}}\,dx$.

(c) $\int_0^{1/2} \frac{1}{(2x-1)^4}\,dx$.

(d) $\int_0^1 \frac{1}{(2x-1)^{4/5}}\,dx$.

(e) Ninguna de las anteriores.

4. ¿Cual de las siguientes integrales impropias es convergente?

(a) $\int_1^\infty \frac{x+2}{x^2+x+7}\,dx$.

(b) $\int_1^\infty \frac{x+2}{x^3+x+7}\,dx$.

(c) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+2}}{x+9}\,dx$.

(d) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^3+9}}\,dx$.

(e) Ninguna de las anteriores.

5. ¿Cual de las siguientes integrales impropias es divergente?

(a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+3x^2+1}\,dx$.

(b) $\int_0^\infty \frac{1}{x(x+7)}\,dx$.

(c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^4+1}\,dx$.

(d) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\,dx$.

(e) Ninguna de las anteriores.

(CONTINÚA DETRÁS)

6. ¿Cual de las siguientes integrales impropias es convergente?

(a) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx$.

(b) $\int_1^\infty \frac{3+\cos x}{x}dx$

(c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{x^2+3}}\,dx$.

(d) $\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,dx$.

(e) Ninguna de las anteriores.

Análisis Matemático. Grupo B. Test 8

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Considera una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Indica la afirmación correcta:

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(b) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(d) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(e) Ninguna de la anteriores.

2. Decimos que una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y que su suma es $S \in \mathbb{R}$ si :

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = S$.

(b) la sucesión de sus sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y está acotada superiormente por S.

(c) la sucesión de sus sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a S, siendo $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = S$.

(e) Ninguna de las anteriores.

3. Considera dos serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Indica la afirmación INCORRECTA:

(a) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \geq N$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, entonces las dos series convergen o las dos series divergen.

(c) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \geq N$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$, entonces las dos series convergen o las dos series divergen.

(d) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

(e) Supongamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \geq N$, que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

4. Cual de las siguientes series converge absolutamente?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^3}+2}$.

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+1}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n})$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

5. Indica la afirmación INCORRECTA:

(a) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \geq N$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$, entonces podemos afirmar que $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(b) Toda sucesión acotada es convergente.

(c) Toda sucesión convergente está acotada.

(d) Si una sucesión decreciente está acotada, entonces podemos asegurar que es convergente.

(e) Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ para todo $n \geq N$, entonces podemos asegurar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(CONTINÚA DETRÁS)

6. ¿Cual de las siguientes series NO es convergente?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{n+1}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}$.

RESPUESTAS TEST 1

1. b

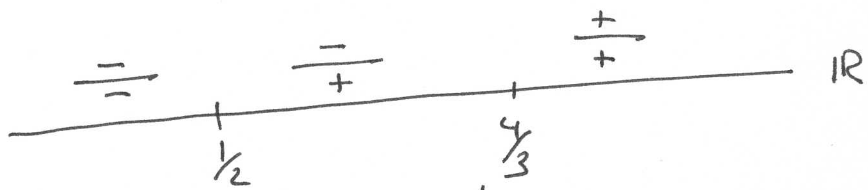
$$\left.\begin{array}{l} 1 < 10 \\ -1 < -0'5 \end{array}\right\} \text{ pero } \underset{\underset{-1}{\shortparallel}}{1(-1)} < \underset{\underset{-5}{\shortparallel}}{10(-0'5)} \text{ NO ES CIERTO}$$

2. a

3. d

$$\frac{x+2}{2x-1} \geq 2 \iff \frac{x+2}{2x-1} - 2 \geq 0 \iff \frac{x+2-4x+2}{2x-1} \geq 0 \iff \frac{-3x+4}{2x-1} \geq 0 \iff$$

$$\frac{3x-4}{2x-1} \leq 0 .$$



Además, $3x-4=0 \iff x = \frac{4}{3}$

$2x-1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

Evaluando el signo de $3x-4$ y $2x-1$ en las diferentes regiones de IR, obtenemos d.

4. e $\quad |2x+3| < 1 \iff -1 < 2x+3 < 1 \iff -1-3 < 2x < 1-3 \iff -4 < 2x < -2$

$\iff -2 < x < -1.$

5. a $\quad |x-1| \geq 1 \iff x-1 \geq 1$ ó $x-1 \leq -1 \iff x \geq 2$ ó $x \leq 0$.

6. d. $\quad |x^2-3x| > 1 \iff x^2-3x > 1$ ó $x^2-3x < -1$

1ª OPCIÓN : $x^2-3x > 1 \iff x^2-3x-1 > 0$

Las raices de $x^2-3x-1=0$ son $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Por tanto, $x^2-3x-1 = \left(x - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) > 0$.

Estudiando el signo de los dos factores obtenemos la región de IR

$\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$

2ª OPCIÓN : $x^2-3x+1 < 0$

Raices de $x^2-3x+1=0$ son $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Por tanto, $x^2-3x+1 = \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$ corresponde a la región de IR, $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

SOLUCIONES TEST 2

1. b

Si $w = -1+i$, $\arg(w) = \frac{3\pi}{4}$. Por tanto, $\arg(z_k) = \frac{\frac{3\pi}{4}}{3} + k\frac{2\pi}{3}$
$k = 0, 1, 2$

Es decir, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{2}$ (tomando $k = 0, 1, 2$, respect.)

2. a

3. c

$$1+i+\frac{3+2i}{1-i} = 1+i+\frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i+\frac{3+3i+2i-2}{2} =$$

$$= 1+i+\frac{5i+1}{2} = 1+i+\frac{5}{2}i+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$$

4. c

$|z| = 2$, $z = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, y uno de los argumentos de z será por tanto $\frac{2\pi}{3}$. Es decir, $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}i\right)$.

Entonces, $z^{17} = 2^{17}\left(\cos 17\cdot\frac{2\pi}{3} + \operatorname{sen} 17\cdot\frac{2\pi}{3}i\right) = 2^{17}\left(\cos\frac{34\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{34\pi}{3}i\right)$

Ahora, $\frac{34\pi}{3} = \frac{3\cdot 11\pi+\pi}{3} = 11\pi+\frac{\pi}{3}$ que nos dará el mismo ángulo que $\pi+\frac{\pi}{3}$. Por tanto, $z^{17} = 2^{17}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}i\right)$

$$= 2^{17}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2^{16}\left(1+\sqrt{3}i\right).$$

5. d

Estudiando el signo de $6-x$, $x-4$ y $1+x$ en las diferentes regiones de $\mathbb{R}$, obtenemos

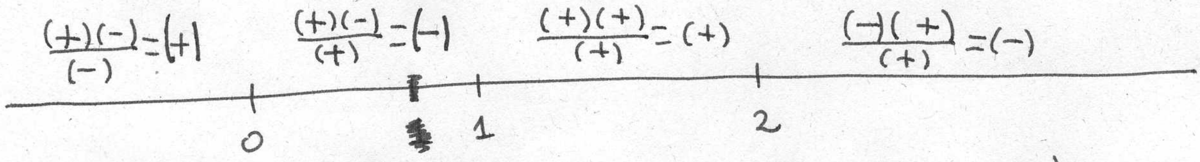
$\frac{(+)(-)}{(-)} = +$ $\qquad$ $\frac{(+)(-)}{(+)} = -$ $\qquad$ $\frac{(+)(+)}{(+)} = +$ $\qquad$ $\frac{(-)(+)}{(+)} = -$

$-1 \qquad\qquad 4 \qquad\qquad 6$

Obtenemos $A = \left((-1, 4] \cup [6, \infty)\right) \cap \mathbb{Q}$

6. c

Estudiando el signo de $2-x$, $x-1$ y x en las diferentes regiones de $\mathbb{R}$, obtenemos



Por tanto, $A = \big((1,2] \cup (-\infty,0)\big) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$= \big((-\infty,0) \cup (1,2)\big) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

SOLUCIONES. TEST 3

1. e
2. a

   (a) es la definición de $\lim_{x\to 1} f(x)=1$

3. d
4. d
5. b y d (son válidas las dos opciones)

   $\lim_{x\to\infty} f(x)=0=\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $f(0)=\frac{1}{3}$.

   Por el T. de los valores intermedios (lo podemos aplicar por ser f continua) aplicado a un intervalo $[0,M]$ con M suficientemente grande para que $f(M)\leq\frac{1}{5}$, existe $c\in(0,M)$ tal que $f(c)=\frac{1}{4}$.

TEST 4. SOLUCIONES

1.c.

2.b

3.a, f es continua en $\mathbb{R}$. Si aplicamos el T. de los valores intermedios a $[0,\frac{\pi}{2}]$, tenemos $f(0)=0$, $f(\frac{\pi}{2})=1$; por tanto existe $c\in(0,\frac{\pi}{2}]$ tal que $f(c)=\frac{5}{6}$.

4.b, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1 = f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+1 = 1 = f(0)$

Por tanto f es continua en 0.

Además, $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x>0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 = 1$.

Por un resultado visto en clase, tenemos que $f'(0)=1$.

5.d, $f(x) = \begin{cases} x-5, & x\geq 5 \\ 5-x, & x<5 \end{cases}$

la función $g(x)=|x|$ es una función continua (visto en clase) y $P(x)=x-5$ también es continua (por ser polinómica). Por tanto, la composición $f(x) = g\circ P(x)$ es continua.

$f'(x) = \begin{cases} 1, & x>5 \\ -1, & x<5 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 5^+} f'(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f'(x) = -1$. Por un resultado visto en clase tenemos que $f'(5)$ NO EXISTE.

6. c, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2-3 = -2$

SOLUCIONES. TEST 5

1(a), $f'(x) = 1 + \dfrac{\cancel{2}\,\mathrm{Sen}\,x\,\mathrm{Cos}\,x}{\cancel{2}} = 1 + \mathrm{Sen}\,x\,\mathrm{Cos}\,x$

$|f'(x)| = |1 + \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{Cos}\,x| \leq 1 + |\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{Cos}\,x| \leq 1 + |\mathrm{sen}\,x||\mathrm{Cos}\,x|$
$\leq 1 + 1 = 2$

Si aplicamos el T. de Rolle al intervalo $[x, y]$ (ó $[y, x]$ dependiendo si $x \leq y$ ó $y \leq x$), existe c en ese intervalo tal que $f'(c)(x-y) = f(x) - f(y)$.

Por tanto, $|f(x) - f(y)| \leq |f'(c)||x-y| \leq 2|x-y|$.

2 (a)

$f(x) = x^2 - \log x$, en $(0, \infty)$

$f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$

$f'(x) = 0 \iff 2x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Además $\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ en } (0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow f \text{ decrec. en } (0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ f'(x) > 0 \text{ en } (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty) \Rightarrow f \text{ crec. en } (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty) \end{cases}$

Por tanto, f tiene en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ un mínimo absoluto.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}(1 + \log 2)$

Por tanto $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \frac{1}{2}$ y $f(x) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\forall x > 0$.

Por tanto, no hay un $x \in (0, \infty)$ / $f(x) = \frac{1}{2}$.

3 (a)

$$\lim_{x\to 0^+} x \log(tg x) \underset{\text{ind. } 0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(tg x)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{ind. } \frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1/\cos^2 x}{\operatorname{sen} x/\cos x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x^2 \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{+x}{\operatorname{sen} x} \cdot x \cdot \frac{1}{\cos x} = 0$$

(Puesto que $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$, $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$)

Tenemos que

4 (b)

5 (d)

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{9} x^{\frac{4}{9}-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{9} \frac{1}{x^{5/9}} = 0$$

6 (e)

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arc}(tg x) - \frac{\pi}{2}\right) \underset{\text{ind. } \infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arc} tg x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \underset{\text{ind. } \frac{0}{0}}{=}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1.$$

SOLUCIONES. TEST 6

1. b.

$f(t)$ es continua en $\mathbb{R}$:

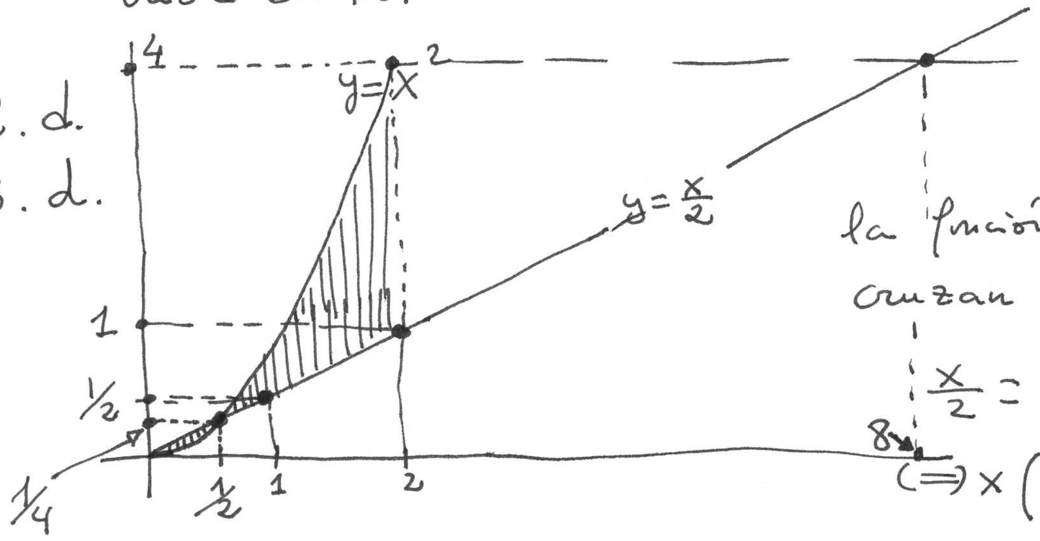
(i) En $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser cociente y composición de funciones continuas.

(ii) en $t=0$, $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{Sen} t^2}{t^2} \underset{\text{indeterminación } \frac{0}{0}}{=} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{2\cancel{t}\operatorname{Cos} t^2}{2\cancel{t}} = 1 = f(0)$. Por tanto f es continua en 0.

Por el Teorema Fundamental del cálculo si $f(t)$ es continua en $\mathbb{R}$, entonces $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ es una función derivable en $\mathbb{R}$.

2. d.

3. d.



la función f y g se cruzan cuando

$\frac{x}{2} = x^2 \iff \frac{x}{2} - x^2 = 0 \iff x\left(\frac{1}{2} - x\right) = 0 \iff x = 0$ ó $x = \frac{1}{2}$

En $[0, \frac{1}{2}]$, $f(x) \geq g(x)$

En $[\frac{1}{2}, 2]$, $g(x) \geq f(x)$

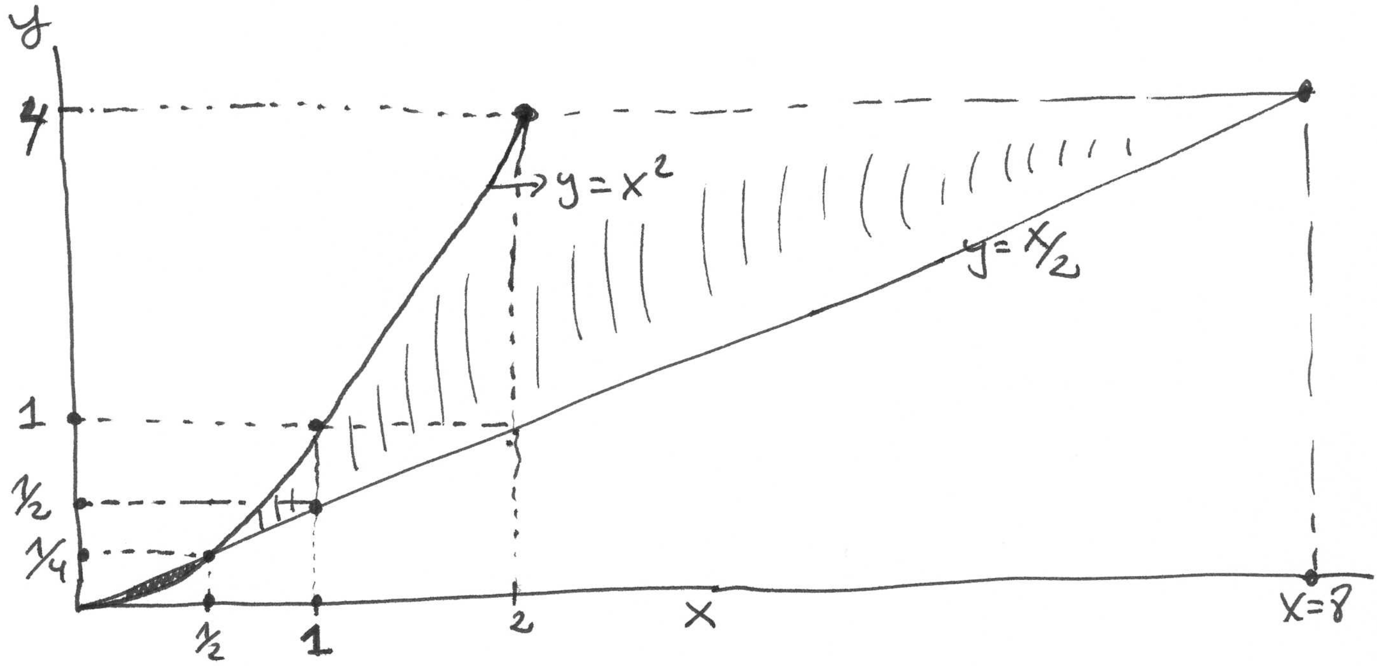
4. d

5. b EL ENUNCIADO ERA INCORRECTO. ESTA PREGUNTA QUEDA ANULADA.

6. b

EL ENUNCIADO CORRECTO ES ENTRE $X=0$ y $X=8$

En 5. b



Se considera $y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}=h(y)$

$y=\frac{x}{2} \Rightarrow x=2y=p(y)$

En $[0,\frac{1}{4}]$, $h(y)\geq p(y)$

En $[\frac{1}{4},4]$, $h(y)\leq p(y)$

SOLUCIONES. TEST 7

1. d

$f(x) = \frac{1}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en $x=1$.

2. d

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}+1 = 1$$

3. c

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{(2x-1)^4}dx = \int_0^{1/2}\frac{1}{2}\,\frac{2}{(2x-1)^4}dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to 1/2^-}\int_0^t \frac{2}{(2x-1)^4}dx$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t^-\to 1/2^-}\left[\frac{(2x-1)^{-4+1}}{-4+1}\right]_0^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to 1/2^-} -\frac{1}{3(2t-1)^3} - \frac{1}{3} = \infty$$

$2t-1<0$

4. b

$$\int_1^\infty \frac{x+2}{x^2+x+7}dx$$ es convergente por comparación:

$$0 \leq \frac{x+2}{x^3+x+7} \leq \frac{x+2}{x^3} = \frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$$

Comprobamos que $\int_1^\infty\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)dx$ es convergente y por tanto la integral de arriba también lo es.

5. b

$$\int_0^\infty \frac{1}{x(x+7)}dx = \int_0^1 \frac{1}{x(x+7)}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x(x+7)}dx$$

Veamos que $\int_0^1 \frac{1}{x(x+7)}dx$ es divergente (y por tanto, también lo será $\int_0^\infty \frac{1}{x(x+7)}\,dx$)

Comparamos la función $\frac{1}{x(x+7)} \geq 0$ en $[0,1]$ con

la función $\frac{1}{x} \geq 0$ en $(0,1]$:

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x(x+7)}} = x+7 \xrightarrow[x\to 0]{} 7 \neq 0$$

Por el criterio de comparación que vimos en clase a través del límite del cociente obtenemos que $\int_0^1 \frac{1}{x(x+7)}\,dx$ es convergente si y sólo si $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ es convergente.

Puesto que la segunda es divergente, también lo es la primera.

6.a

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx$$

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1}$ no es una función positiva.

Consideramos $|f(x)| = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$ y

$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$ es convergente. Por comparación $\int_0 |f(x)|\,dx$ es convergente. Y de nuevo por otro criterio de comparación $\int_0^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

RESPUESTAS. TEST 8

1. d
2. c
3. b
4. b $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n(\log n)^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$.

Por el criterio de la integral $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ converge si y sólo si $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ converge.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^{\infty} = \frac{1}{\log 2}$$, por tanto convergente.

5. b
6. a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\cos n\pi)}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n+1}$ NO ES CONVERGENTE

pues <u>no verifica la condición necesaria</u> de convergencia, esta es que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n(-1)^n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$ sea 0.

(el límite es 1).