INTEGRAL CALCULUS. SEPTEMBER EXAM. PART 1

1. (4 POINTS) **(a)** Suppose $A \subset \mathbb{R}^n$ is a compact set with measure zero (in $\mathbb{R}^n$). Can we derive that A has content zero (in $\mathbb{R}^n$)?
(b) Suppose P is a partition of a n-rectangle $R \subset \mathbb{R}^n$ and Q is a refinement of P. Prove that $U(f,Q) \leq U(f,P)$, i.e. the upper sum of f for Q is less than or equal to the upper sum of f for P.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (2 POINTS) Draw the region A of $\mathbb{R}^3$ defined by

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2, \; z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

3. (4 POINTS)
(a) Consider the set

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, nx + y = 1\right\}.$$

(a.1) Determine whether or not B has measure zero and/or content zero (in $\mathbb{R}^2$).
(a.2) Does the set $B \cap ([-4,4] \times [-4,4])$ have content zero (in $\mathbb{R}^2$)?
(a.3) Does the set $B \cap ([-4,4] \times [-4,4])$ have (2-dimensional) volume? If B has volume, find it.

(b) Consider the function $g : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = \begin{cases} \cos(x+y) & \text{if } \; xy = r \; \text{ and } \; r \in \mathbb{Q} \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(b.1) Find the set of points of discontinuity of g.
(b.2) Does the set of points of discontinuity of g have measure zero in $\mathbb{R}^2$?
(b.3) Find the lower and upper integral of f on $[-1,1] \times [-1,1]$.
(b.4) Determine whether or not g is integrable on $[-1,1] \times [-1,1]$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN 1

1. (4 PUNTOS) Enuncia y demuestra el criterio de integrabilidad de Riemann para una función $f : R \to \mathbb{R}$, siendo R un rectángulo de $\mathbb{R}^n$.

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo podeis usar calculadoras sin gráficos.

2. (2 PUNTOS) Dibuja la región S of $\mathbb{R}^3$ definida como

$$S = \{(x, y, z) : \, 0 \leq z \leq 1, \, 0 \leq y \leq \sqrt{1 + z^2}, \, 0 \leq x \leq \sqrt{1 + z^2 - y^2}\}.$$

3. (4 PUNTOS) Considera la función $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{Q} \\ \frac{x+y}{4} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \notin \mathbb{Q} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

(a) Calcula la integral superior e inferior de f en el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$.
(b) Obtén el conjunto de puntos de $[0, 1] \times [0, 1]$ en los que la oscilación de f es positiva, es decir, el conjunto $D_f = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \, o(f, (x, y)) > 0\}$.
(c) Estudia si f es integrable en $[0, 1] \times [0, 1]$.
(d) Estudia si el conjunto $\{(x, y) : \, f(x, y) = 1\}$ tiene medida cero o contenido cero en $\mathbb{R}^2$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN 1

1. (4 PUNTOS)

(a) Sean $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada y definida en un n-rectángulo R de $\mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ tal que la oscilación de f en todo punto de R es menor que ε. Demuestra que existe una partición P de R tal que la diferencia entre las sumas superior e inferior de f para P es menor que $\varepsilon \cdot v(R)$ (siendo $v(R)$ el volumen n-dimensional de R).

(b) ¿Qué consecuencia inmediata tiene este resultado si f es continua?

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadora sin gráficos.

2. (2 PUNTOS) Dibuja la región S of $\mathbb{R}^3$ definida como

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, z^2 \leq 1 + x^2 + y^2 \leq 4, \, x \geq 0, \, y \geq 0, \, z \geq 0\}.$$

3. (4 PUNTOS) Considera el conjunto $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \, y - x^2 \in \mathbb{Q}\}$

(a) Estudia si para cualquier constante c the conjunto $G_c = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \, y - x^2 = c\}$ tiene medida cero y/o contenido cero. Igualmente, estudia si A tiene medida cero y/o contenido cero.

(b) Estudia si los conjuntos A y $([0, 1] \times [0, 1]) \setminus A$ tienen volumen y si lo tienen calcúlalo.

(c) Estudia si la función $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ es integrable en A.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN 2

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que das para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadora sin gráficos.

1. (3.25 PUNTOS) Calcula el volumen del sólido $S = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2y,\ 0 \leq z \leq y\}$.

2. (3.25 PUNTOS) Calcula la integral $\int_V e^z\, dxdydz$, siendo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

3. (3.5 PUNTOS) Calcula la integral $\int_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dxdy$, siendo R la región trapezoidal con vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ y $(0, -1)$ haciendo el cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN 2

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que das para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadora sin gráficos.

1. (3.25 PUNTOS) Calcula el volumen del sólido $S = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2y,\ 0 \leq z \leq y\}$.

2. (3.25 PUNTOS) Calcula la integral $\int_V e^z\, dxdydz$, siendo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

3. (3.5 PUNTOS) Calcula la integral $\int_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dxdy$, siendo R la región trapezoidal con vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ y $(0, -1)$ haciendo el cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN 2

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que das para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadora sin gráficos.

1. (3.25 PUNTOS) Calcula el volumen del sólido $S = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2y,\ 0 \leq z \leq y\}$.

2. (3.25 PUNTOS) Calcula la integral $\int_V e^z\, dxdydz$, siendo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

3. (3.5 PUNTOS) Calcula la integral $\int_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dxdy$, siendo R la región trapezoidal con vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ y $(0, -1)$ haciendo el cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN 2

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que das para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadora sin gráficos.

1. (3.25 PUNTOS) Calcula el volumen del sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq z \leq 6 - 2x - 2y\}.$$

2. (3.25 PUNTOS) Calcula la integral $\displaystyle\int_B xe^{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$ siendo

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2;\ \ x^2 + y^2 \leq z^2;\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0\}$$

con $0 < a < b$ constantes.

3. (3.5 PUNTOS) Calcula la integral $\displaystyle\int_R \frac{(x-2y)^4}{(3x-y)^6} dxdy$ definida en el paralelogramo R con vértices $(3, 1)$, $(5, 2)$, (2,-2) y $(4, -1)$, haciendo un cambio de variables $(x, y) = \varphi(u, v)$ que transforme un rectángulo S del plano uv de lados paralelos a los ejes en el paralelogramo R del plano xy.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN 3

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que das para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadora sin gráficos.

1. (3.5 PUNTOS)

(i) Si F es un campo conservativo definido en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y γ es un camino C^1 a trozos en U, ¿cual es el valor de $\displaystyle\int_\gamma F$? Enuncia el resultado adecuadamente y demuestralo.

(ii) Si además U es simplemente conexo y F es C^1 en U, ¿cómo se caracteriza que F es conservativo en términos de las parciales de F? En este caso solo enuncia el resultado.

2. (3.25 PUNTOS) Si un circunferencia C de radio 1 rueda alrededor de la circunferencia $x^2+y^2=16$, un punto punto fijo P en C traza una curva llamada epicicloide, parametrizada por

$$\gamma(t) = (5\cos t - \cos 5t, 5\sin t - \sin 5t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Calcula el area de la región del plano limitada por esta curva.

3. (3.25 PUNTOS) Considera el subconjunto de $\mathbb{R}^2$,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \le \frac{1}{x} \le 1\}.$$

(i) ¿Es $\displaystyle\int_A \frac{1}{x\sqrt{y}}\,dxdy$ una integral impropia? ¿Por qué? Si lo es, ¿podrías expresarla como un límite de una sucesión de integrales no impropias? Finalmente, calcula la integral.

(ii) ¿Es la integral $\displaystyle\int_A \frac{e^{x^2y^3}}{x\sqrt{y}}\,dxdy$ convergente o divergente?

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN 3

APELLIDOS Y NOMBRE.....

1. (3.5 PUNTOS) Define integral de un campo escalar continuo a lo largo de un camino. Define caminos equivalentes. Finalmente, enuncia y demuestra el resultado relativo al comportamiento de un campo ESCALAR continuo a lo largo de caminos equivalentes.

RESPUESTA:

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN 3

APELLIDOS Y NOMBRE.....

1. (3.5 PUNTOS) Define integral de un campo vectorial continuo a lo largo de un camino (llamada integral de linea). Define caminos equivalentes. Finalmente, enuncia y demuestra el resultado relativo al comportamiento de un campo VECTORIAL continuo a lo largo de caminos equivalentes.

RESPUESTA:

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN 3

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que das para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadora sin gráficos.

2. (3.25 PUNTOS) Comprueba el teorema de Green para el campo vectorial $F(x,y) = (-y,x)$ y la región C del primer cuadrante entre el círculo $x^2+y^2=a^2$ y la elipse $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$ (donde a,b,c son constantes positivas, $a<b$ y $a<c$).

3. (3.25 PUNTOS) Considera el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$. ¿Es la integral integral impropia $\displaystyle\int_A e^{x^2y^2-2y^4}\cos(x^3+y^6)\,dxdy$ convergente o divergente? (No la calcules).

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE. PARTE 1. GRUPO B

1. (4 PUNTOS) Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función defina en un n-rectángulo R de $\mathbb{R}^n$.
(a) Define refinamiento de una partición P de R.
(b) Supongamos que Q es un refinamiento de P. Demuestra que $U(f, Q) \leq U(f, P)$, i.e. la suma superior de f para Q es menor o igual que la suma superior de f para P. De forma análoga, demuestra que $L(f, P) \leq L(f, Q)$, i.e. la suma inferior de f para P es menor o igual que la suma inferior de f para Q.

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (2 PUNTOS) Dibuja la región S de $\mathbb{R}^3$ definida como

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, \ \ -1 \leq z \leq 1\}.$$

3. (4 PUNTOS) Considera la función $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{si } x - y \leq 0 \\ 1 & \text{si } x - y > 0 \end{cases}.$$

(a) Halla el conjunto de puntos D_f de $[0, 1] \times [0, 1]$ donde la oscilación de f es positiva, i.e.

$$D_f = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \ o(f, (x, y)) > 0\}.$$

(b) Estudia la integrabilidad de f en $[0, 1] \times [0, 1]$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE. PARTE 2. GRUPO B

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

1. (3.5 PUNTOS) Halla el volumen del sólido acotado por las superficies $xy = 1$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$, $x + y = z$ y que está en el primer octante.

2. (3.25 PUNTOS) Halla la integral

$$\int_B (2 - x^2 - y^2 - z^2)^{-1/2} dxdydz$$

donde

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\}.$$

3. (3.25 PUNTOS) Calcula la integral

$$\int_R (x + y)^2 e^{x-y} dxdy,$$

donde R es la región acotada por $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - y = -1$ y $x - y = 1$ haciendo el cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE. PARTE 3. GRUPO B

1. (3.5 PUNTOS) Enuncia y demuestra el resultado relativo al comportamiento de la integral de un campo **vectorial** continuo a lo largo de caminos equivalentes.

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (3.25 PUNTOS) Comprueba el teorema de Green para la integral $\displaystyle\int_C y^2dx + x^2dy$ donde C es la frontera de la región acotada entre las gráficas de $y = x$ e $y = \sqrt{x}$.

3. (3.25 PUNTOS) Considera el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$.

(i) ¿Es $\displaystyle\int_A x^9 e^{-y} \sin(x^2 + y^5)\, dxdy$ una integral impropia? ¿Por qué?

(ii) ¿Existe la anterior integral? (Es decir, ¿es convergente? No la calcules).

(iii) Expresa la anterior integral como el límite de una sucesión de integrales no impropias. (No la calcules).

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN DE SEPTIEMBRE. PARTE 1. GRUPO B

1. (4 PUNTOS) Si $f : R \to \mathbb{R}$ es una función acotada definida en un n-rectángulo R de $\mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ es tal que la oscilación de f en todo punto de R es menor que ε. Demuestra que existe una partición P de R tal que la diferencia entre las sumas superior e inferior de f para P es menor que $\varepsilon \cdot v(R)$ (siendo $v(R)$ el volumen n-dimensional de R).

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (2 PUNTOS) Dibuja la región A de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ z^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

3. (4 PUNTOS)

(a) Considera el conjunto

$$B = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = r^2 \right\}.$$

Estudia si B tiene medida cero y/o contenido cero (en $\mathbb{R}^2$). ¿Tiene el conjunto B volumen (2-dimensional)? Si lo tiene, hallalo.

(b) Considera la función $g : [-3, 3] \times [-2, 2] \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y) = \begin{cases} 7 & \text{si } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{n^2} \ \text{ y } \ n \in \mathbb{N} \\ x - y & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Halla los puntos de discontinuidad de g. ¿Tiene el conjunto de puntos de discontinuidad de g medida cero en $\mathbb{R}^2$? Determina si g es integrable o no en $[-3, 3] \times [-2, 2]$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN DE SEPTIEMBRE. PARTE 2. GRUPO C

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

1. (3.4 PUNTOS) Calcula el volumen del sólido

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z \leq 9 - 4x^2 - y^2 \ \text{ and } \ x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

2. (3.3 PUNTOS) Calcula la integral $\displaystyle\int_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$, siendo D el sólido

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ \ z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2} \right\}.$$

3. (3.3 PUNTOS) Calcula la integral $\displaystyle\int_E \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dxdy$, siendo E la región trapezoidal del plano con vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, 1)$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN DE SEPTIEMBRE. PARTE 3. GRUPO C

1. (4 PUNTOS) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y conexo y sea $F : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Supongamos que la integral de linea de F a lo largo de cualquier camino poligonal en U de lados paralelos a los ejes de coordenadas depende sólo de los puntos inicial y final. Halla una función diferenciable C^1 $\varphi : U \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla\varphi$ en U y deduce que F es conservativo. (Es decir, define φ y prueba la igualdad $F = \nabla\varphi$ en U).

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (3 PUNTOS) Comprueba el teorema de Green para el campo vectorial C^1 $G(x, y) = (2x - y, x + y)$ y la región del plano $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

3. (3 PUNTOS) Considera el conjunto $J_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2\}$, siendo $R > 0$, y la función $h : J_R \to \mathbb{R}$, $h(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-p}$, siendo $p \in \mathbb{R}$.

(i) ¿Por qué es $\displaystyle\int_{J_R} h(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ una integral impropia?

(ii) Expresa la anterior integral impropia como límite de una sucesión de "integrales propias". Halla los valores de p para los cuales esta integral impropia es convergente. Calcula la integral impropia.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL. PARTE 1. GRUPO B

1. (4 PUNTOS) Si $f : R \to \mathbb{R}$ es una función acotada definida en un rectángulo R de $\mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ es tal que la oscilación de f en todo punto de R es menor que ε. Demuestra que la diferencia entre las integrales superior e inferior de f en R es menor que $\varepsilon \cdot v(R)$ (siendo $v(R)$ el volumen n-dimensional de R).

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (2 PUNTOS) Dibuja la región S of $\mathbb{R}^3$ definida como

$$S = \{(x, y, z) : \, 2z^2 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{1 + z^2}\}.$$

3. (4 PUNTOS) Consideramos el conjunto $A = \{(x, y) : \, x^2 + y^2 \leq 4\}$ y las funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x+y} & \text{si } x + y \notin Q \\ 2 & \text{si } x + y \in Q \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x+y} & \text{si } x + y \neq 0 \\ 2 & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$$

(a) Estudia si f es integrable en A.
(b) Estudia si el conjunto $B := \{(x, y) \in A : \, f(x, y) = 2\}$ tiene medida cero o contenido cero en $\mathbb{R}^2$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL. PARTE 2. GRUPO B

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

1. (3.3 PUNTOS) Calcula el volumen del sólido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 \leq z \leq 36 - 3x^2 - 3y^2\}$.

2. (3.3 PUNTOS) Calcula la integral $\displaystyle\int_B (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \, dxdydz$, siendo

$$B = \left\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \, z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

3. (3.4 PUNTOS) Calcula la integral $\displaystyle\int_R e^{-xy/2} dxdy$, siendo $R = \{(x, y) : \, \frac{1}{4}x \leq y \leq 2x, \; 1 \leq xy \leq 4\}$ haciendo el cambio de variables $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, \; y = \sqrt{uv}$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL. PARTE 3. GRUPO B

1. (3.5 POINTS) Enuncia y demuestra el resultado relativo al comportamiento de una integral de un campo escalar continuo a lo largo de caminos equivalentes.

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (3.25 PUNTOS) Comprueba el teorema de Green para la integral $\int_C (x^2y^2)dx + (xy)dy$ donde C está formado por el arco de parabola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ y los segmentos de $(1,1)$ a $(0,1)$ y de $(0,1)$ a $(0,0)$.

3. (3.25 PUNTOS) Consider the subset or $\mathbb{R}^2$,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq \frac{1}{x} \leq 1\}.$$

(i) ¿Es $\int_A \frac{1}{x\sqrt{y}}\, dxdy$ una integral impropia? ¿Por qué? Si lo es, ¿podrías expresarla como un límite de una sucesión de integrales no impropias? Finalmente, calcula la integral.

(ii) ¿Es la integral $\int_A \frac{e^{x^2y^3}}{x\sqrt{y}}\, dxdy$ convergente o divergente?

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL. PARTE 1. GRUPO B

1. (4 PUNTOS) Si $f : R \to \mathbb{R}$ es una función acotada definida en un n-rectángulo R de $\mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ es tal que la oscilación de f en todo punto de R es menor que ε. Demuestra que existe una partición P de R tal que la diferencia entre las sumas superior e inferior de f para P es menor que $\varepsilon \cdot v(R)$ (siendo $v(R)$ el volumen n-dimensional de R).

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (2 PUNTOS) Dibuja la región S of $\mathbb{R}^3$ definida como

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, 2z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}.$$

3. (4 PUNTOS) Consideramos el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \leq 4\}$ y las funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x+y} & \text{si } x + y \notin Q \\ 2 & \text{si } x + y \in Q \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x+y} & \text{si } x + y \neq 0 \\ 2 & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$$

(a) Estudia si f y g son integrables en A.
(b) Estudia si el conjunto $B := \{(x, y) \in A : \, f(x, y) = 2\}$ tiene medida cero o contenido cero en $\mathbb{R}^2$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL. PARTE 2. GRUPO B

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

1. (3.3 PUNTOS) Calcula el volumen del sólido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 \leq z \leq 36 - 3x^2 - 3y^2\}$.

2. (3.3 PUNTOS) Calcula la integral $\displaystyle\int_B (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \, dxdydz$, siendo

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \, z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

3. (3.4 PUNTOS) Calcula la integral $\displaystyle\int_R e^{-xy/2} dxdy$, siendo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x \leq y \leq 2x, \; 1 \leq xy \leq 4\}$$

haciendo el cambio de variables $x = \sqrt{\dfrac{v}{u}}, \; y = \sqrt{uv}$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL. PARTE 3. GRUPO B

1. (3.5 PUNTOS) Enuncia y demuestra el resultado relativo al comportamiento de la integral de un campo escalar continuo a lo largo de caminos equivalentes.

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (3.25 PUNTOS) Comprueba el teorema de Green para la integral $\int_C (x^2y^2)dx + (xy)dy$ donde C está formado por el arco de parabola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ y los segmentos de $(1,1)$ a $(0,1)$ y de $(0,1)$ a $(0,0)$.

3. (3.25 PUNTOS) Considera el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

(i) ¿Es $\displaystyle\int_A \frac{\sin^2 x - 8\cos^2 y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\, dxdy$ una integral impropia? ¿Por qué?

(ii) ¿La anterior integral existe? (No la calcules).

(iii) Expresa la anterior integral como límite de un sucesión de integrales no impropias. (No la calcules).

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL. PARTE 1. GRUPO C

1. (4 PUNTOS)

(a) Define oscilación de una función en un punto. Establece y demuestra la relación entre la continuidad y la oscilación de una función en un punto.

(b) Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto con medida cero (en $\mathbb{R}^n$). ¿Podemos concluir que A tiene contenido cero (en $\mathbb{R}^n$)?

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (2 PUNTOS) Dibuja la región R de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 + 1 \geq x^2 + y^2, \ x^2 - y^2 \geq 0\}.$$

3. (4 PUNTOS)

(a) Considera los conjuntos $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \frac{x}{\sqrt{n}}\}$ y $B = A \cap ([0, 1] \times [0, 1])$. Estudia si A y B tienen medida cero y/o contenido cero. ¿Tiene el conjunto B volumen? Si lo tiene, hallalo.

(b) Considera la función $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 - x^2 + y & \text{si } \ y = cx \ \text{ y } \ c \in \mathbb{Q} \\ y^2 - x & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Estudia si f es integrable en $[0, 1] \times [0, 1]$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL. PARTE 2. GRUPO C

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

1. (3.3 PUNTOS) Calcula el volumen del sólido acotado por los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$.

2. (3.3 PUNTOS) Calcula la integral $\displaystyle\int_A xyz \, dxdydz$, siendo

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ z^2 \leq x^2 + y^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\right\}.$$

3. (3.4 PUNTOS) Calcula la integral $\displaystyle\int_R xyz(x^2 + y^2) \, dxdydz$, siendo

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x^2 - y^2 \leq b, \ c \leq xy \leq d, \ 0 \leq z \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\},$$

con constantes $0 < a < b$ y $0 < c < d$.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN FINAL. PARTE 3. GRUPO C

1. (3.5 PUNTOS) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y conexo y sea $F : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Supongamos que la integral de linea de F a lo largo de cualquier camino poligonal cerrado en U de lados paralelos a los ejes de coordenadas es cero. Demuestra que F es conservativo, es decir existe una función diferenciable C^1 $\varphi : U \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla\varphi$ en U.

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (3.25 PUNTOS) Comprueba el teorema de Green para el campo vectorial continuo $F(x, y) = (xy, x^2y^3)$ y el triángulo de vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 2)$.

3. (3.25 PUNTOS) Considera conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

(i) ¿Es $\displaystyle\int_A \frac{\log(2 + x^2y^2)\cos(\pi yz)}{(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^{2/3}}\, dxdydz$ una integral impropia? ¿Por qué?

(ii) ¿Es convergente la anterior integral? (No la calcules.)

(iii) Expresa la anterior integral como el límite de una sucesión de "integrales no impropias". (No la calcules.)

INTEGRAL CALCULUS. FINAL EXAM. PART 1. GROUP E

1. (4 POINTS)

(a) Define the oscillation of a function at a point. State and prove the relationship between the continuity and the oscillation of a function at a point.

(b) Suppose $A \subset \mathbb{R}^n$ is a compact set with measure zero (in $\mathbb{R}^n$). Can we conclude that A has content zero (in $\mathbb{R}^n$)?

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (2 POINTS) Draw the region R of $\mathbb{R}^3$ defined by

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 + 1 \geq x^2 + y^2, \ x^2 - y^2 \geq 0\}.$$

3. (4 POINTS)

(a) Consider the sets $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \frac{x}{\sqrt{n}}\}$ and $B = A \cap ([0, 1] \times [0, 1])$. Determine whether or not A and B have measure zero and/or content zero. Does the set B have volume? If B has volume, find it.

(b) Consider the function $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 - x^2 + y & \text{if } \ y = cx \ \text{ and } \ c \in \mathbb{Q} \\ y^2 - x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Determine whether or not f is integrable on $[0, 1] \times [0, 1]$.

INTEGRAL CALCULUS. FINAL EXAM. PART 2. GROUP E

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

1. (3.3 POINTS) Compute the volume of the solid bounded by the cylinders $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + z^2 = 1$.

2. (3.3 POINTS) Evaluate the integral $\displaystyle\int_A xyz \, dxdydz$, where

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ z^2 \leq x^2 + y^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\right\}.$$

3. (3.4 POINTS) Evaluate the integral $\displaystyle\int_R xyz(x^2 + y^2) \, dxdydz$, where

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x^2 - y^2 \leq b, \ c \leq xy \leq d, \ 0 \leq z \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\},$$

with constants $0 < a < b$ and $0 < c < d$.

INTEGRAL CALCULUS. FINAL EXAM. PART 3. GROUP E

1. (3.5 POINTS) Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be an open connected set and let $F : U \to \mathbb{R}^n$ be a continuous vector field. Assume that the line integral of F along any closed polygonal path in U with line segments parallel to the coordinate axes is zero. Prove that F is conservative, i.e. there is a C^1 differentiable function $\varphi : U \to \mathbb{R}$ satisfying $F = \nabla\varphi$ on U.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3.25 POINTS) Verify Green's theorem for the continuous vector field $F(x, y) = (xy, x^2y^3)$ and the triangle with vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$ and $(1, 2)$.

3. (3.25 POINTS) Consider the set $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

(i) Is $\displaystyle\int_A \frac{\log(2 + x^2y^2)\cos(\pi yz)}{(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^{2/3}}\, dxdydz$ an improper integral? Why?

(ii) Does the above integral converge? (Do not evaluate it.)

(iii) Write the above integral as the limit of a sequence of "non improper integrals". (Do not evaluate it.)

INTEGRAL CALCULUS. FINAL EXAM. PART 1. GROUP E

1. (3 POINTS) Let $f : R \to \mathbb{R}$ be a bounded function defined on a n-rectangle R of $\mathbb{R}^n$. Suppose the oscillation of f is smaller than some pre-fixed $\varepsilon > 0$ at every point in R. Show that there is a partition P of R such that the difference between the upper and lower sums of f for P is less than $\varepsilon \cdot v(R)$ (where $v(R)$ is the n-dimensional volume of R).

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3 POINTS) Consider the set $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ and the function $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{if } \ xy = \frac{1}{n} \ \text{ for some } \ n \in \mathbb{N} \\ -xy - 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(i) Find the set of points of discontinuity of f. Does the set of points of discontinuity of f have measure zero and/or content zero in $\mathbb{R}^2$?
(ii) Find the lower and upper integrals of f on A.
(iii) Determine whether or not f is integrable on A.

3. (2 POINTS) Sketch the solid $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2z^2 \leq x^2 + y^2 \leq z^2 + 1\}$ and compute its volume.

4. (2 POINTS) Evaluate the integral $\displaystyle\int_C (x+y+z)\, dxdydz$, where C is the solid

$$C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ \ x \geq 0, \, y \geq 0, \, z \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

INTEGRAL CALCULUS. FINAL EXAM. PART 2. GROUP E

1. (3.5 POINTS) Define equivalent paths. State and prove the result related to the behavior of the integral of a continuous vector field along equivalent paths.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3.5 POINTS) Verify Green's theorem for the vector field $F(x,y) = (-y, x)$ and the region $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 16; \ (x-2)^2 + y^2 \geq 1; \ (x+2)^2 + y^2 \geq 1\}$.

3. (3 POINTS) Consider the set $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < y\}$ and the function

$$h : E \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) = xe^{-y^3} \log\left(1 + \frac{x}{y}\right).$$

(i) Is $\displaystyle\int_E h(x,y)\, dx\, dy$ an improper integral? (ii) Determine whether or not the above integral is convergent. (Do not compute it). (iii) Write the above integral as the limit of a sequence of "proper integrals".

INTEGRAL CALCULUS. FINAL EXAM. PART 2. GROUP E

1. (3.5 POINTS) Define equivalent paths. State and prove the result related to the behavior of the integral of a continuous vector field along equivalent paths.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3.5 POINTS) Verify Green's theorem for the vector field $F(x,y) = (-y, x)$ and the region $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16;\ (x-2)^2 + y^2 \geq 1;\ (x+2)^2 + y^2 \geq 1\}$.

3. (3 POINTS) Consider the set $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$ and the function

$$h : E \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) = xe^{-y^3} \log\left(1 + \frac{x}{y}\right).$$

(i) Is $\displaystyle\int_E h(x,y)\,dx\,dy$ an improper integral? (ii) Determine whether or not the above integral is convergent. (Do not compute it). (iii) Write the above integral as the limit of a sequence of "proper integrals".

INTEGRAL CALCULUS. FINAL EXAM. PART 1. GROUP E

1. (3 POINTS) Let $f : R \to \mathbb{R}$ be a bounded function defined on a n-rectangle R of $\mathbb{R}^n$. Suppose the oscillation of f is smaller than some pre-fixed $\varepsilon > 0$ at every point in R. Show that there is a partition P of R such that the difference between the upper and lower sums of f for P is less than $\varepsilon \cdot v(R)$ (where $v(R)$ is the n-dimensional volume of R).

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3 POINTS) Consider the set $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ and the function $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{if } \ xy = \frac{1}{n} \ \text{ for some } \ n \in \mathbb{N} \\ -xy - 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(i) Find the set of points of discontinuity of f. Does the set of points of discontinuity of g have measure zero and/or content zero in $\mathbb{R}^2$?
(ii) Find the lower and upper integrals of f on A.
(iii) Determine whether or not f is integrable on A.

3. (2 POINTS) Sketch the solid $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2z^2 \leq x^2 + y^2 \leq z^2 + 1\}$ and compute its volume.

4. (2 POINTS) Evaluate the integral $\displaystyle\int_C (x+y+z)\,dxdydz$, where C is the solid

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

INTEGRAL CALCULUS. SEPTEMBER FINAL EXAM. PART 1. GROUP E

1. (4 POINTS) Let $f : R \to \mathbb{R}$ be a bounded function defined on a n-rectangle R of $\mathbb{R}^n$.
(a) Define refinement of a partition P of R.
(b) Suppose Q is a refinement of P. Prove that $U(f, Q) \leq U(f, P)$, i.e. the upper sum of f for Q is less than or equal to the upper sum of f for P. Similarly, prove that $L(f, P) \leq L(f, Q)$, i.e. the lower sum of f for P is less than or equal to the lower sum of f for Q.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (2 POINTS) Draw the region S of $\mathbb{R}^3$ defined by

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \text{ and } -1 \leq z \leq 1\}.$$

3. (4 POINTS) Consider the function $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{whenever } x - y \leq 0 \\ 1 & \text{whenever } x - y > 0 \end{cases}.$$

(a) Find the set of points D_f of $[0, 1] \times [0, 1]$ where the oscillation of f is positive, i.e.

$$D_f = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : o(f, (x, y)) > 0\}.$$

(b) Discuss the integrability of f on $[0, 1] \times [0, 1]$.

INTEGRAL CALCULUS. SEPTEMBER FINAL EXAM. PART 2. GROUP E

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

1. (3.5 POINTS) Compute the volume of the solid bounded by the surfaces $xy = 1$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$, $x + y = z$ and lying in the first octant.

2. (3.25 POINTS) Evaluate the integral

$$\int_B (2 - x^2 - y^2 - z^2)^{-1/2} dxdydz$$

where

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

3. (3.25 POINTS) Calculate the integral

$$\int_R (x + y)^2 e^{x-y} dxdy,$$

where R is the region bounded by $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - y = -1$ and $x - y = 1$ by making the change of variables $u = x + y$, $v = x - y$.

INTEGRAL CALCULUS. SEPTEMBER FINAL EXAM. PART 3. GROUP E

1. (3.5 POINTS) State and prove the result related to the behavior of the integral of a continuous **vector** field along equivalent paths.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3.25 POINTS) Verify Green's theorem for the integral $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ where C is the boundary of the region lying between the graphs of $y = x$ and $y = \sqrt{x}$.

3. (3.25 POINTS) Consider the set $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$.

(i) Is $\int_A x^9 e^{-y} \sin(x^2 + y^5)\, dxdy$ an improper integral? Why?

(ii) Does the above integral exist? (That is, does it converge? Do not evaluate it.)

(iii) Rewrite the above integral as the limit of a sequence of non improper integrals. (Do not evaluate it.)

INTEGRAL CALCULUS. SEPTEMBER EXAM. PART 1. GROUP E

1. (4 POINTS) Let $f : R \to \mathbb{R}$ be a bounded function defined on a n-rectangle R of $\mathbb{R}^n$. Suppose the oscillation of f is smaller than some pre-fixed $\varepsilon > 0$ at every point in R. Show that there is a partition P of R such that the difference between the upper and lower sums of f for P is less than $\varepsilon \cdot v(R)$ (where $v(R)$ is the n-dimensional volume of R).

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (2 POINTS) Draw the region A of $\mathbb{R}^3$ defined by

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

3. (4 POINTS)

(a) Consider the set

$$B = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = r^2 \right\}.$$

Determine whether or not B has measure zero and/or content zero (in $\mathbb{R}^2$). Does the set B have (2-dimensional) volume? If B has volume, find it.

(b) Consider the function $g : [-3, 3] \times [-2, 2] \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y) = \begin{cases} 7 & \text{if } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{n^2} \text{ and } n \in \mathbb{N} \\ x - y & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Find the set of points of discontinuity of g. Does the set of points of discontinuity of g have measure zero in $\mathbb{R}^2$? Determine whether or not g is integrable on $[-3, 3] \times [-2, 2]$.

INTEGRAL CALCULUS. SEPTEMBER EXAM. PART 2. GROUP E

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

1. (3.4 POINTS) Compute the volume of the solid

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 9 - 4x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

2. (3.3 POINTS) Evaluate the integral $\displaystyle\int_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$, where D is the solid

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2} \right\}.$$

3. (3.3 POINTS) Evaluate the integral $\displaystyle\int_E \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dxdy$, where E is the trapezoidal region in $\mathbb{R}^2$ with vertices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ and $(0, 1)$.

INTEGRAL CALCULUS. SEPTEMBER EXAM. PART 3. GROUP E

1. (4 POINTS) Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be an open connected set and let $F : U \to \mathbb{R}^n$ be a continuous vector field. Assume that the line integral of F along any polygonal path in U with line segments parallel to the coordinate axes depends only on the starting and end points. Find a C^1 differentiable function $\varphi : U \to \mathbb{R}$ satisfying $F = \nabla\varphi$ on U and deduce that F is conservative. (That is to say, define φ and prove the identity $F = \nabla\varphi$ on U.)

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3 POINTS) Verify Green's theorem for the C^1 vector field $G(x, y) = (2x - y, x + y)$ and the planar region $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

3. (3 POINTS) Consider the set $J_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2\}$, where $R > 0$, and the function $h : J_R \to \mathbb{R}$, $h(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-p}$, where $p \in \mathbb{R}$.

(i) Why is $\displaystyle\int_{J_R} h(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ an improper integral?

(ii) Write the above integral as the limit of a sequence of "proper integrals". Determine the values of p for which the improper integral converges. Compute the improper integral.

INTEGRAL CALCULUS. SEPTEMBER EXAM. PART 1. GROUP E

1. (3 POINTS) Let $f : R \to \mathbb{R}$ be a bounded function defined on a n-rectangle R of $\mathbb{R}^n$. Suppose the oscillation of f is smaller than some pre-fixed $\varepsilon > 0$ at every point in R. Show that there is a partition P of R such that the difference between the upper and lower sums of f for P is less than $\varepsilon \cdot v(R)$ (where $v(R)$ is the n-dimensional volume of R).

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3 POINTS) Consider the set $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ and the function $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} -xy & \text{if } x^2+y^2 \in \mathbb{Q} \\ 1+x+y & \text{if } x^2+y^2 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(i) Find the set of points of discontinuity of f. Does the set of points of discontinuity of f have measure zero and/or content zero in $\mathbb{R}^2$?
(ii) Find the lower and upper integrals of f on A.
(iii) Determine whether or not f is integrable on A.

3. (1.75 POINTS) Compute the volume of the solid B defined as

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ z^2 \leq 3x^2+3y^2, \ y \geq 0\}.$$

4. (2.25 POINTS) Sketch the solid C bounded above and below by the elliptic paraboloids $\dfrac{x^2}{3} + y^2 = 2z - 4$ and $\dfrac{2x^2}{3} + 3y^2 = 2z$, respectively. Compute the integral $\displaystyle\int_C |xy^5| \, dxdydz$.

INTEGRAL CALCULUS. SEPTEMBER EXAM. PART 2. GROUP E

1. (3.5 POINTS) (i) Define conservative field. State and prove the fundamental theorem of line integrals.
(ii) Define outward unit normal to a piecewise regular Jordan curve. State (without proof) the divergence theorem in the plane.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3.25 POINTS) Verify Green's theorem for the vector field $F(x,y) = (2xy, x^2+2x)$ and the region $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1; \ x^2+y^2 \geq 1\}$.

3. (3.25 POINTS) Consider the set $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \geq 1\}$ and the function $h : E \to \mathbb{R}, \quad h(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-p}$, where $p \in \mathbb{R}$.
(i) Determine the values of p for which the improper integral of h over E converges. Compute the integral.
(ii) Consider the function $g : E \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) = \log(1+|xyz|)(x^2+y^2+z^2)^{-4}$. Determine whether or not the integral of g over E is convergent. (Do not compute it). Write the improper integral of g over E as the limit of a sequence of "proper integrals".

INTEGRAL CALCULUS. SEPTEMBER EXAM. PART 2. GROUP E

1. (3.5 POINTS) (i) Define conservative field. State and prove the fundamental theorem of line integrals. (ii) Define outward unit normal to a piecewise regular Jordan curve. State (without proof) the divergence theorem in the plane.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3.25 POINTS) Verify Green's theorem for the vector field $F(x,y) = (2xy, x^2 + 2x)$ and the region $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1;\ x^2 + y^2 \geq 1\}$.

3. (3.25 POINTS) Consider the set $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$ and the function $h : E \to \mathbb{R}, \quad h(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-p}$, where $p \in \mathbb{R}$.
(i) Determine the values of p for which the improper integral of h over E converges. Compute the integral.
(ii) Consider the function $g : E \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) = \log(1 + |xyz|)(x^2 + y^2 + z^2)^{-4}$. Determine whether or not the integral of g over E is convergent. (Do not compute it). Write the improper integral of g over E as the limit of a sequence of "proper integrals".

INTEGRAL CALCULUS. SEPTEMBER EXAM. PART 1. GROUP E

1. (3 POINTS) Let $f : R \to \mathbb{R}$ be a bounded function defined on a n-rectangle R of $\mathbb{R}^n$. Suppose the oscillation of f is smaller than some pre-fixed $\varepsilon > 0$ at every point in R. Show that there is a partition P of R such that the difference between the upper and lower sums of f for P is less than $\varepsilon \cdot v(R)$ (where $v(R)$ is the n-dimensional volume of R).

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3 POINTS) Consider the set $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ and the function $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} -xy & \text{if } x^2 + y^2 \in \mathbb{Q} \\ 1 + x + y & \text{if } x^2 + y^2 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(i) Find the set of points of discontinuity of f. Does the set of points of discontinuity of f have measure zero and/or content zero in $\mathbb{R}^2$?
(ii) Find the lower and upper integrals of f on A.
(iii) Determine whether or not f is integrable on A.

3. (1.75 POINTS) Compute the volume of the solid B defined as

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z^2 \leq 3x^2 + 3y^2,\ y \geq 0\}.$$

4. (2.25 POINTS) Sketch the solid C bounded above and below by the elliptic paraboloids $\dfrac{x^2}{3} + y^2 = 2z - 4$ and $\dfrac{2x^2}{3} + 3y^2 = 2z$, respectively. Compute the integral $\displaystyle\int_C |xy^5|\, dxdydz$.

INTEGRAL CALCULUS. FIRST MIDTERM

1. (4 POINTS) State and prove Riemann's integrability condition for a function $f : R \to \mathbb{R}$, where R is a rectangle of $\mathbb{R}^n$.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (2 POINTS) Draw the region S of $\mathbb{R}^3$ defined by

$$S = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2},\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

3. (4 POINTS) Consider the function $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \\ 2 & \text{for } x \notin \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

(a) Find the upper integral and lower integral of f on the rectangle $[0, 1] \times [0, 1]$.
(b) Find the set of points in $[0, 1] \times [0, 1]$ where the oscillation of f is positive, i.e the set $D_f = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \mathrm{o}(f, (x, y)) > 0\}$.
(c) Determine whether f is integrable on $[0, 1] \times [0, 1]$ or not.
(d) Determine whether the set $\{(x, y) : f(x, y) = 1\}$ has measure zero or not.

INTEGRAL CALCULUS. FIRST MIDTERM

1. (4 POINTS) Let $f : R \to \mathbb{R}$ be a bounded function defined on a n-rectangle R of $\mathbb{R}^n$.

(a) Define refinement of a partition P of R.

(b) Suppose Q is a refinement of P. Prove that $U(f, Q) \leq U(f, P)$, i.e. the upper sum of f for Q is less than or equal to the upper sum of f for P. Similarly, prove that $L(f, P) \leq L(f, Q)$, i.e. the lower sum of f for P is less than or equal to the lower sum of f for Q.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (2 POINTS) Draw the region S of $\mathbb{R}^3$ defined by

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1,\ 1 + z^2 \geq x^2 + y^2\}.$$

3. (4 POINTS) Consider the set $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - \sin x \in \mathbb{Q}\}$.

(a) Determine whether for any constant c the set $G_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - \sin x = c\}$ has measure zero and/or content zero.

(b) Determine whether the sets A and $B = A \cap ([0, 1] \times [0, 1])$ have measure zero and/or content zero. Does the set B have volume? If B has volume, find it.

(c) Determine whether the function $f(x, y) = 3 - x - y$ is integrable on B.

INTEGRAL CALCULUS. SECOND MIDTERM

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

1. (3.25 POINTS) Compute the volume of the solid $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2x^2+y^2\}$.

2. (3.25 POINTS) Evaluate the integral $\int_V z^2\, dxdydz$, where

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}, \quad 0 < a < b.$$

3. (3.5 POINTS) Evaluate the integral $\int_R (3x + 2y)(2y - x)^{3/2} dxdy$, where R is the parallelogram with vertices $(0, 0)$, $(-2, 3)$, $(2, 5)$ and $(4, 2)$ by making the change of variables $u = 3x + 2y$, $v = 2y - x$.

INTEGRAL CALCULUS. SECOND MIDTERM

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

1. (3.25 POINTS) Compute the volume of the solid

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, 2x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$

2. (3.25 POINTS) Evaluate the integral $\displaystyle\int_B x^2y^2z \, dxdydz$, where

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 3x^2 + 3y^2; \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; \; z \geq 0\}.$$

3. (3.5 POINTS) Evaluate the integral $\int_R e^{x-3y} \cos^2(\pi(x+y))dxdy$, where R is the parallelogram with vertices $(1, 0)$, $(4, 1)$, $(\frac{7}{4}, \frac{-3}{4})$ and $(\frac{19}{4}, \frac{1}{4})$ by making a change of variables $(x, y) = \varphi(u, v)$ that maps a rectangle S in the uv-plane (where the sides of S are parallel to the u- and v-axes) onto the parallelogram R in the xy-plane.

INTEGRAL CALCULUS. THIRD MIDTERM

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

1. (3.5 POINTS) State and prove the result related to the behavior of an integral of a continuous vector field along equivalent paths.

2. (3.25 POINTS) Verify Green's theorem for the integral $\int_C (y-x)dx + (2x-y)dy$ where C is the boundary of the region lying inside the semicircle $y = \sqrt{25-x^2}$ and outside the semicircle $y = \sqrt{9-x^2}$.

3. (3.25 POINTS) Discuss the existence of the improper integral $\int_T \frac{1}{\sqrt{x-y}} dxdy$, where $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < x \leq 1\}$.

INTEGRAL CALCULUS. THIRD MIDTERM

1. (3.5 POINTS)
(i) Define conservative field. State and prove the fundamental theorem of calculus for line integrals.
(ii) State (without proof) Green's theorem for multiply connected regions.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3.25 POINTS) Verify Green's theorem for the continuous vector field $F(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ and the region C enclosed by the parabolas $y = x^2$ and $x = y^2$.

3. (3.25 POINTS) Consider the improper integral $\displaystyle\int_A \frac{e^y + e^{-1/x^2}}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, dxdy$, where $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$. Determine whether or not this integral is convergent. (Do not compute it).

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN I

1. (4 PUNTOS) Considera una función acotada $f : R \to \mathbb{R}$ defina en un n-rectángulo R de $\mathbb{R}^n$.

(a) Define refinamiento de una partición P de R.

(b) Supongamos que Q es un refinamiento P. Demuestra que $U(f, Q) \leq U(f, P)$, i.e. la suma superior de f para Q es menor o igual que la suma superior de f para P. Análogamente, demuestra que $L(f, P) \leq L(f, Q)$, i.e. la suma inferior de f para P es menor o igual que la suma inferior de f para Q.

En los siguiente problemas tienes que explicar todos los pasos que das para llegar a la solución. Sólo puedes usar calculadora sin gráficos.

2. (2 PUNTOS) Dibuja la región S de $\mathbb{R}^3$ definida como

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1,\ 1 + z^2 \geq x^2 + y^2\}.$$

3. (4 PUNTOS) Considera el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - \sin x \in \mathbb{Q}\}$.

(a) Estudia si para cualquier constante c el conjunto $G_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - \sin x = c\}$ tiene medida cero y/o contenido cero.

(b) Estudia si los conjunto A y $B = A \cap ([0, 1] \times [0, 1])$ tienen medida cero y/o contenido cero. ¿Tiene volumen el conjunto B? Si tiene, hallalo.

(c) Estudia si la función $f(x, y) = 3 - x - y$ es integrable en B.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN II

En los siguiente problemas tienes que explicar todos los pasos que das para llegar a la solución. Sólo puedes usar calculadora sin gráficos.

1. (3.25 PUNTOS) Calcula el volumen del sólido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$

2. (3.25 PUNTOS) Calcula la integral $\displaystyle\int_B x^2y^2z \, dxdydz$, siendo

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 3x^2 + 3y^2; \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; \ z \geq 0\}.$$

3. (3.5 PUNTOS) Calcula the integral $\int_R e^{x-3y} \cos^2(\pi(x + y))dxdy$, definida en el paralelogramo R con vértices $(1, 0)$, $(4, 1)$, $(\frac{7}{4}, \frac{-3}{4})$ y $(\frac{19}{4}, \frac{1}{4})$, haciendo un cambio variables $(x, y) = \varphi(u, v)$ que transforme un rectángulo S del plano uv de lados paralelos a los ejes u y v en el paralelogramo R del plano xy.

CÁLCULO INTEGRAL. EXAMEN III

1. (3.5 PUNTOS)

(i) Define campo conservativo. Enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo para integrales de linea.

(ii) Enuncia (sin demostración) el teorema de Green para regiones multiplemente conexas.

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que das para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadora sin gráficos.

2. (3.25 PUNTOS) Comprueba el teorema de Green para el campo vectorial continuo $F(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ y la región C limitada por las parábolas $y = x^2$ and $x = y^2$.

3. (3.25 PUNTOS) Considera la integral impropia $\displaystyle\int_A \frac{e^y + e^{-1/x^2}}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, dxdy$, siendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$. Estudia si esta integral es convergente o divergente. (No la calcules).

INTEGRAL CALCULUS. FIRST MIDTERM. GROUP E

1. (a) (1 POINT) Suppose $A \subset \mathbb{R}^n$ is a compact set with measure zero (in $\mathbb{R}^n$). Can we derive that A has content zero (in $\mathbb{R}^n$)?
(b) (2 POINTS) Suppose P is a partition of a n-rectangle $R \subset \mathbb{R}^n$ and Q is a refinement of P. Prove that $U(f, Q) \leq U(f, P)$, i.e., the upper sum of f for Q is less than or equal to the upper sum of f for P.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (2.5 POINTS) Consider the square $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ and the functions $f, g : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos(x+y), & \text{if } y - x \notin \mathbb{Q} \\ -2, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \cos(x+y), & \text{if } y - x \neq 0 \\ 2, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Find the sets $D_f = \{(x,y) : \mathrm{Osc}(f,(x,y)) > 0\}$ and $D_g = \{(x,y) : \mathrm{Osc}(g,(x,y)) > 0\}$, where $\mathrm{Osc}(f,(x,y))$ and $\mathrm{Osc}(g,(x,y))$ are the oscillation of f and g at (x,y), respectively.
(b) Do the sets D_f and D_g have measure zero or content zero in $\mathbb{R}^2$?
(c) Find the lower and upper integrals of f and g on $[0,1] \times [0,1]$.
(d) Determine whether or not f and g are integrable on $[0,1] \times [0,1]$.

3. (2.25 POINTS) Sketch the solid $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ and compute its volume.

4. (2.25 POINTS) Evaluate the integral $\displaystyle\int_S z\, e^{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$, where

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1;\ z^2 \leq x^2 + y^2;\ z \geq 0\right\}.$$

INTEGRAL CALCULUS. SECOND MIDTERM. GROUP E

1. (3.5 POINTS) (i) Define conservative field. State (without proof) the fundamental theorem for line integrals. (ii) Define equivalent paths. State and prove the result related to the behavior of the integral of a continuous scalar field along equivalent paths.

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3.75 POINTS) (i) Verify Green's theorem for the continuous vector field $F(x,y) = (x+2y, 3x-y)$ and the region $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, \ \max(|x|,|y|) \geq 1\}$ (i.e. the region lying between the circle $x^2+y^2=4$ and the square $[-1,1]\times[-1,1]$.)

(ii) Suppose $G(x,y)$ is a C^1 vector field defined on an open set containing the region D such that $F+G$ is conservative. Find the line integral $\displaystyle\int_{C_2^+} G$, where C_2^+ is the circle with radius 2 centered at the origin positively oriented.

3. (2.75 POINTS) Consider the set $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \sqrt{y} \leq 2\,x\}$ and the function

$$h : A \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) = \frac{(x^{4p}+y^{2p})\sin(\log(xy))}{x^{2p}\,y^p(1+y)^2},$$

where $p \geq 0$ is a constant. (i) Is $\displaystyle\int_A h(x,y)\,dx\,dy$ an improper integral? (ii) Determine whether or not the above integral is convergent. (Do not compute it). (iii) Write the above integral as the limit of a sequence of "proper integrals".

INTEGRAL CALCULUS . FIRST MIDTERM

1. (3 POINTS) Let $f : R \to \mathbb{R}$ be a bounded function defined on a n-rectangle R of $\mathbb{R}^n$. Suppose the oscillation of f is smaller than some pre-fixed $\varepsilon > 0$ at every point in R. Show that there is a partition P of R such that the difference between the upper and lower sums of f for P is less than $\varepsilon \cdot v(R)$ (where $v(R)$ is the n-dimensional volume of R).

In the following problems you are required to show all your work and provide the necessary explanations to get full credit. Only scientific calculators with no graphing capabilities are allowed.

2. (3 POINTS) Consider the set $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ and the function $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } \ x^2 + y^2 = \frac{1}{2n} \ \text{ for some } \ n \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{if } \ x^2 + y^2 = \frac{1}{2n-1} \ \text{ for some } \ n \in \mathbb{N} \\ e^{-x-y-1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(i) Find the set of points of discontinuity of f. Does the set of points of discontinuity of f have measure zero and/or content zero in $\mathbb{R}^2$?
(ii) Find the lower and upper integrals of f on A.
(iii) Determine whether or not f is integrable on A.

3. (2 POINTS) Sketch the solid $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z^2 + x^2 \leq 1\}$ and compute its volume.

4. (2 POINTS) Evaluate the integral $\displaystyle\int_C z(x+y)\, dxdydz$, where C is the solid

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \leq x + y, \ xy \leq 1, \ x \leq y \leq 2x, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\right\}.$$