EEDO. EXAMEN FINAL. PARTE 1. GRUPO B

1. (3.5 PUNTOS) Considera un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de la forma $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ siendo

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & ... & a_{1,n}(t) \\ ... & ... & ... \\ a_{n,1}(t) & .... & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

con $A(t)$ y $b(t)$ funciones continuas en un intervalo (α, ω).
(i) Asumiendo que el conjunto de las soluciones del sistema homogeneo asociado forma un espacio vectorial de dimensión n, deduce la estructura del conjunto de soluciones del sistema no homogeneo.
(ii) Supongamos ahora que conocemos una matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema homogeneo asociado. Deduce una expresión para la soluciones del sistema no homogeneo en términos de $\Phi(t)$ y $b(t)$ (i. e. la fórmula de variación de las constantes).

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (4 PUNTOS) Considera el sistema lineal $x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 1;\ \ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}y + 1.$
(a) Para el sistema homogeneo asociado: da una matriz fundamental y la solución general.
(b) Halla la solución general al sistema no homogeneo.
(c) Esboza el diagrama de fases del sistema no homogeneo y clasifica su punto de equilibrio. Indica en el dibujo los puntos donde las trayectorias tienen tangente vertical u horizontal.
(d) Explica el comportamiento asintótico ($t \to \infty$) de las soluciones del sistema no homogeneo.
(e) Halla la solución al problema de valor inicial para el anterior sistema no homogeneo y los valores $x(0) = 0;\ y(0) = 0$.

3. (2.5 PUNTOS) (a) Halla la solución general de la ecuación $x'' + x = t + \cos t$.
(b) Halla la solución al problema de valor inicial para la anterior ecuación y los valores $x(0) = 2$; $x'(0) = 4$.

EEDO. EXAMEN FINAL. PARTE 2. GRUPO B

1. (3.5 PUNTOS) Enuncia el teorema fundamental de existencia y unicidad local de soluciones al problema de valor inicial $x' = f(t, x),\ \ x(t_0) = x_0$ visto en clase. Haz un esquema de la demostración de la existencia (no de la unicidad y no más de una página).

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (2 PUNTOS) Considera la siguiente ecuación diferencial $x' = x^{5/3}(1-x)^{1/3}$.
(i) Sin calcular las soluciones explicitamente, indica las regiones del plano en las que puedes aplicar el teorema de Peano de existencia local de soluciones para el problema de valor inicial asociado a esta ecuación. Igualmente, indica las regiones en las que se puede aplicar el teorema fundamental de existencia y unicidad local visto en clase para el problema de valor inicial.
(ii) Sin calcular las soluciones explicitamente, haz un esquema del campo de direcciones. Indica las regiones de crecimiento y decrecimiento de las soluciones. Haz un dibujo aproximado de las soluciones.

3. (2.5 PUNTOS) (i) Halla explicitamente la solución general de la ecuación diferencial $x' = e^{x/t} + \frac{x}{t}$. Haz un dibujo aproximado de las soluciones. (ii) Determina la solución (o soluciones) al problema de valor inicial con $x(e^{-1}) = 0$ e indica el intervalo máximal de definición correspondiente.

4. (2 PUNTOS) Utilizando la transformada de Laplace, halla la solución a $x'' - 6x' + 9x = t^2 e^{3t}$ para los valores iniciales $x(0) = 2$, $x'(0) = 6$. (Observación: $\mathcal{L}[t^m e^{at}] = \frac{m!}{(s-a)^{m+1}}$ para todo entero no negativo m y todo número real a.)

EEDO. EXAMEN FINAL. PARTE 2. GRUPO B

1. (3.5 PUNTOS) Enuncia el teorema fundamental de existencia y unicidad local de soluciones al problema de valor inicial $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ visto en clase. Haz un esquema de la demostración de la existencia (no de la unicidad y no más de una página).

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (2 PUNTOS) Considera la siguiente ecuación diferencial $x' = x^{5/3}(1-x)^{1/3}$.
(i) Sin calcular las soluciones explicitamente, indica las regiones del plano en las que puedes aplicar el teorema de Peano de existencia local de soluciones para el problema de valor inicial asociado a esta ecuación. Igualmente, indica las regiones en las que se puede aplicar el teorema fundamental de existencia y unicidad local visto en clase para el problema de valor inicial.
(ii) Sin calcular las soluciones explicitamente, haz un esquema del campo de direcciones. Indica las regiones de crecimiento y decrecimiento de las soluciones. Haz un dibujo aproximado de las soluciones.

3. (2.5 PUNTOS) (i) Halla explicitamente la solución general de la ecuación diferencial $x' = e^{x/t} + \dfrac{x}{t}$. Haz un dibujo aproximado de las soluciones. (ii) Determina la solución (o soluciones) al problema de valor inicial con $x(e^{-1}) = 0$ e indica el intervalo máximal de definición correspondiente.

4. (2 PUNTOS) Utilizando la transformada de Laplace, halla la solución a $x'' - 6x' + 9x = t^2 e^{3t}$ para los valores iniciales $x(0) = 2$, $x'(0) = 6$. (Observación: $\mathcal{L}[t^m e^{at}] = \dfrac{m!}{(s-a)^{m+1}}$ para todo entero no negativo m y todo número real a.)

EEDO. EXAMEN FINAL. PARTE 1. GRUPO B

1. (3.5 PUNTOS) Considera un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de la forma $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ siendo

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

con $A(t)$ y $b(t)$ funciones continuas en un intervalo (α, ω).
(i) Asumiendo que el conjunto de las soluciones del sistema homogeneo asociado forma un espacio vectorial de dimensión n, deduce la estructura del conjunto de soluciones del sistema no homogeneo.
(ii) Supongamos ahora que conocemos una matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema homogeneo asociado. Deduce una expresión para la soluciones del sistema no homogeneo en términos de $\Phi(t)$ y $b(t)$ (i. e. la fórmula de variación de las constantes).

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (4 PUNTOS) Considera el sistema lineal $x' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}y + 1$; $y' = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}y + 1$.
(a) Para el sistema homogeneo asociado: da una matriz fundamental y la solución general.
(b) Halla la solución general al sistema no homogeneo.
(c) Esboza el diagrama de fases del sistema no homogeneo y clasifica su punto de equilibrio. Indica en el dibujo los puntos donde las trayectorias tienen tangente vertical u horizontal.
(d) Explica el comportamiento asintótico ($t \to \infty$) de las soluciones del sistema no homogeneo.
(e) Halla la solución al problema de valor inicial para el anterior sistema no homogeneo y los valores $x(0) = 0$; $y(0) = 0$.

3. (2.5 PUNTOS) (a) Halla la solución general de la ecuación $x'' + x = t + \cos t$.
(b) Halla la solución al problema de valor inicial para la anterior ecuación y los valores $x(0) = 2$; $x'(0) = 4$.

ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
EXAMEN PARCIAL. GRUPO B

1. (3.5 PUNTOS) Prueba que el conjunto de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de la forma $x'(t) = A(t)x(t)$ siendo

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & ... & a_{1,n}(t) \\ ... & ... & ... \\ a_{n,1}(t) & .... & a_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

con $A(t)$ función continua en un intervalo (α, ω) forma un espacio vectorial de dimensión n.

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (4 PUNTOS) Considera el sistema lineal

$$x' = x + 2y + 5; \;\; y' = 3x + 2y + 7.$$

(a) Para el sistema homogeneo asociado: da una matriz fundamental y la solución general.
(b) Halla la solución general al sistema no homogeneo.
(c) Esboza el diagrama de fases del sistema no homogeneo y clasifica su punto de equilibrio. Indica en el dibujo los puntos donde las trayectorias tienen tangente vertical u horizontal.
(d) Explica el comportamiento asintótico (cuando $t \to \infty$) de las soluciones del sistema no homogeneo.
(e) Halla la solución al problema de valor inicial para el anterior sistema no homogeneo y los valores $x(0) = 0; \; y(0) = 0$.

3. (2.5 PUNTOS) (a) Halla la solución general de la ecuación $x'' - x = 3\cos t - \sin t + e^t$.
(b) Halla la solución al problema de valor inicial para la anterior ecuación y los valores $x(0) = 1$; $x'(0) = -1$.

EEDO. EXAMEN DE SEPTIEMBRE. PARTE 1. GRUPO B

1. (3.5 PUNTOS) Considera un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de la forma $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ siendo

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & ... & a_{1,n}(t) \\ ... & ... & ... \\ a_{n,1}(t) & .... & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

con $A(t)$ y $b(t)$ funciones continuas en un intervalo (α, ω).
(i) Prueba que el conjunto de soluciones del sistema lineal homogeneo asociado $x'(t) = A(t)x(t)$ forma un espacio vectorial de dimensión n.
(ii) Deduce de lo anterior la estructura del conjunto de soluciones del sistema no homogeneo $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$.

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (4 PUNTOS) Considera el sistema lineal $x' = -3x - 8y + 5;\ \ y' = 4x + 9y + 5$.
(a) Para el sistema homogeneo asociado: da una matriz fundamental y la solución general.
(b) Halla la solución general al sistema no homogeneo.
(c) Esboza el diagrama de fases del sistema no homogeneo y clasifica su punto de equilibrio. Halla los puntos donde las trayectorias tienen tangente vertical u horizontal e indicalo en el dibujo. Explica el comportamiento asintótico ($t \to \infty$) de las soluciones del sistema no homogeneo.
(d) Halla la solución al problema de valor inicial para el anterior sistema no homogeneo y los valores $x(0) = 1;\ y(0) = 2$.

3. (2.5 PUNTOS) (a) Halla la solución general de la ecuación $x'' - 4x = e^{2t} + \cos 2t$.
(b) Halla la solución al problema de valor inicial para la anterior ecuación y los valores $x(0) = 0$; $x'(0) = -1$.

EEDO. EXAMEN DE SEPTIEMBRE. PARTE 2. GRUPO B

1. (3.5 PUNTOS) Enuncia el teorema fundamental de existencia y unicidad local de soluciones al problema de valor inicial $x' = f(t, x),\ \ x(t_0) = x_0$ visto en clase. Haz un esquema de la demostración de la existencia (no de la unicidad y no más de una hoja).

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (4 PUNTOS) Considera la siguiente ecuación diferencial $x' = 6x - 3x^{2/3}$.
(i) Sin calcular las soluciones explicitamente, indica las regiones del plano en las que puedes aplicar el teorema de Peano de existencia local de soluciones para el problema de valor inicial asociado a esta ecuación. Igualmente, indica las regiones en las que se puede aplicar el teorema fundamental de existencia y unicidad local visto en clase para el problema de valor inicial.
(ii) Sin calcular las soluciones explicitamente, haz un esquema del campo de direcciones. Indica las regiones de crecimiento y decrecimiento de las soluciones. Haz un dibujo aproximado de las soluciones.
(iii) Halla explicitamente la solución general.
(iv) Determina la solución (o soluciones) al problema de valor inicial con $x(0) = 0$.

3. (2.5 PUNTOS) Utilizando la transformada de Laplace, halla la solución a $x'' + 16x = \cos 4t$ para los valores iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$. (Observación: $\mathcal{L}[\cos \omega t] = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$, $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, $\mathcal{L}[t \cos \omega t] = \dfrac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$, $\mathcal{L}[t \sin \omega t] = \dfrac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$ para todo número real ω.)

EEDO. EXAMEN DE SEPTIEMBRE. PARTE 2. GRUPO B

1. (3.5 PUNTOS) Enuncia el teorema fundamental de existencia y unicidad local de soluciones al problema de valor inicial $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ visto en clase. Haz un esquema de la demostración de la existencia (no de la unicidad y no más de una hoja).

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (4 PUNTOS) Considera la siguiente ecuación diferencial $x' = 6x - 3x^{2/3}$.
(i) Sin calcular las soluciones explicitamente, indica las regiones del plano en las que puedes aplicar el teorema de Peano de existencia local de soluciones para el problema de valor inicial asociado a esta ecuación. Igualmente, indica las regiones en las que se puede aplicar el teorema fundamental de existencia y unicidad local visto en clase para el problema de valor inicial.
(ii) Sin calcular las soluciones explicitamente, haz un esquema del campo de direcciones. Indica las regiones de crecimiento y decrecimiento de las soluciones. Haz un dibujo aproximado de las soluciones.
(iii) Halla explicitamente la solución general.
(iv) Determina la solución (o soluciones) al problema de valor inicial con $x(0) = 0$.

3. (2.5 PUNTOS) Utilizando la transformada de Laplace, halla la solución a $x'' + 16x = \cos 4t$ para los valores iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$. (Observación: $\mathcal{L}[\cos \omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$, $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\mathcal{L}[t\cos \omega t] = \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$, $\mathcal{L}[t\sin \omega t] = \dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$ para todo número real ω.)

EEDO. EXAMEN DE SEPTIEMBRE. PARTE 1. GRUPO B

1. (3.5 PUNTOS) Considera un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de la forma $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ siendo

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & ... & a_{1,n}(t) \\ ... & ... & ... \\ a_{n,1}(t) & .... & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

con $A(t)$ y $b(t)$ funciones continuas en un intervalo (α, ω).
(i) Prueba que el conjunto de soluciones del sistema lineal homogeneo asociado $x'(t) = A(t)x(t)$ forma un espacio vectorial de dimensión n.
(ii) Deduce de lo anterior la estructura del conjunto de soluciones del sistema no homogeneo $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$.

En los siguientes problemas tienes que explicar todos los pasos que haces para llegar a la solución. Solo puedes usar calculadoras sin gráficos.

2. (4 PUNTOS) Considera el sistema lineal $x' = -3x - 8y + 5$; $y' = 4x + 9y + 5$.
(a) Para el sistema homogeneo asociado: da una matriz fundamental y la solución general.
(b) Halla la solución general al sistema no homogeneo.
(c) Esboza el diagrama de fases del sistema no homogeneo y clasifica su punto de equilibrio. Halla los puntos donde las trayectorias tienen tangente vertical u horizontal e indicalo en el dibujo. Explica el comportamiento asintótico ($t \to \infty$) de las soluciones del sistema no homogeneo.
(d) Halla la solución al problema de valor inicial para el anterior sistema no homogeneo y los valores $x(0) = 1$; $y(0) = 2$.

3. (2.5 PUNTOS) (a) Halla la solución general de la ecuación $x'' - 4x = e^{2t} + \cos 2t$.
(b) Halla la solución al problema de valor inicial para la anterior ecuación y los valores $x(0) = 0$; $x'(0) = -1$.