Práctica 2. Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Grupo B

1. Prueba que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix}$ y $\Psi(t) = \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix}$ son matrices fundamentales del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Comprueba que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2e^{t} & 0 \\ 0 & e^{t} & 2e^{3t} \\ e^{t} & te^{t} & e^{3t} \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3. Encuentra un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para el que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 3e^{t} \\ e^{2t} & 2e^{t} \end{pmatrix}$ sea una matriz fundamental.

4. (a) ¿De qué forma ha de ser la función $a(t)$, $a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ para que las funciones

$$\Phi^1(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi^3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

sean soluciones linealmente independientes de un sistema lineal de la forma $x' = A(t)x$, con $t > 0$ si ha de verificarse que

$$\text{Traza } A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + a_{33}(t) = \frac{4}{t}?$$

(b) Si la cuestión anterior tiene solución, escribe el sistema único $x' = A(t)x$, $t > 0$ de que se trata.

(c) Si como antes, a) tiene solución, halla la solución del PVI

$$x' = A(t)x + \begin{pmatrix} 1/t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t & 0 \\ -1/t^2 & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

obteniendo primero una matriz fundamental de la ecuación homogenea.

6. Dadas las funciones vectoriales $\Phi^1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\Phi^2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$.

(a) Calcula su Wronskiano (es decir, el determinante de la matriz $\phi(t)$ cuyas columnas son las funciones anteriores).

(b) Indica un intervalo y un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para el que $\Phi(t)$ es una matriz fundamental en ese intervalo.

(c) Verifica en este caso particular que se cumple la fórmula de Liouville.

7. Contesta a las mismas preguntas del ejercicio anterior para las funciones vectoriales $\Phi^1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ y $\Phi^2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$.

8. Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones, dada la solución particular que se indica:

(a) $x'' - 5x' + 6x = 0$; $\varphi(t) = e^{2t}$.

(b) $x'' - \dfrac{4}{t}x' + \dfrac{6}{t^2}x = 0$; $\varphi(t) = t^2$, $t > 0$.

(c) $x'' - \dfrac{1}{t(1-t^2)}x' = 0$; $t \in (0,1)$, $\varphi(t) = 1$.

9. Probar que las gráficas de dos soluciones distintas de una ecuación lineal de segundo orden $x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = b(t)$ no pueden ser tangentes en ningún punto.

10. Probar que si una solución $\varphi(t)$ de una ecuación lineal de segundo orden $x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$ tiene infinitos ceros en el intervalo $[a, b] \subset (\alpha, \omega)$, entonces $\varphi(t) \equiv 0$ en (α, ω).

Práctica 3. Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Grupo B

1. Hallar la solución general de los sistemas $x' = Ax$ correspondientes a las siguientes matrices A:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 9 & 6 & -14 \\ 5 & 4 & -8 \\ 9 & 6 & -14 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

2. Determina la solución del problema de valor inicial $x' = Ax$, $x(0) = x^0$, siendo A la matriz de los casos (a), (f) y (g) del problema anterior y la condición inicial, respectivamente, $x^0 = (1, 1)$, $x^0 = (1, 2, 3)$ y $x^0 = (1, 0, 1, 0)$.

3. Resolver el problema de valor inicial $\begin{cases} x_1' = -6x_1 + x_2 \\ x_2' = -9x_1 + 6x_2 + 3\sin t \end{cases}$, $\quad x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1.$

4. Hallar la solución general de los sistemas $x' = Ax$ correspondientes a las siguientes matrices A:

(a) $\begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5. Resolver el problema de valor inicial $x' = \begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ $\quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Considera dos contenedores A y B de agua. El contenedor A está lleno con 50 litros de agua, en el que se han disuelto 25 gramos de sal. El contenedor B tiene 50 litros de agua pura. Se bombea agua a los contenedores y se extrae agua de los contenedores tal y como se indica en el dibujo. Dentro de los contenedores hay un mecanismo que hace que la disolución de agua y sal sea uniforme. Se trata de establecer el sistema de ecuaciones diferenciales que satisfacen las cantidades de gramos $x_1(t)$ y $x_2(t)$, que hay en los contenedores A y B, respectivamente, en tiempo t.

Práctica 4. Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Grupo B

1. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial
(a) $x'' - x' - 2x = 0; \quad x(1) = 0, \quad x'(1) = 2.$
(b) $x'' - 4x' + 29x = 0; \quad x(0) = 5, \quad x'(0) = 1.$
(c) $x'' - 6x' + 9x = 18; \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 2.$

2. Considera la ecuación diferencial lineal de orden dos $x'' + a_1x' + a_2 = g(t)$ donde $g(t)$ es una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y a_1, a_2 son dos constantes positivas. Prueba que la diferencia de cualesquiera dos soluciones de esta ecuación converge a cero cuando $t \to \infty$.

3. Halla la solución general de la siguientes ecuaciones:
(a) $x'' - x' - 2x = t^2 + 1;$ (b) $x'' - 5x' = 2t^3 + 1.$
(c) $x'' - x = 3t^2e^t;$ (d) $x'' + 2x' + x = e^{-t}(t^4 + t^3 + t^2 + 1).$
(e) $x'' - x = 3\cos t - \sin t;$ (f) $x'' - 2x' + 5x = e^t(1 + \cos t)^2.$

4. Determina las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'' = x - y \\ y'' = x + y \end{cases}$$

5. Halla la solución general de las ecuaciones
(a) $x^{(3)} - 7x'' + 19x' - 13x = t^2 - 2t$
(b) $x^{(4)} + 8x'' + 16x = \cos t$

6. Determina el menor natural n para el que la ecuación diferencial de la forma

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = 0$$

tiene entre sus soluciones a las funciones

$$e^{-3t}, \qquad te^{-t}\cos 2t, \qquad t, \qquad \sin t.$$

7. Dada la ecuación diferencial $x'' - 2ax + x = 0$, donde a es un parámetro real, se pide:
(a) Halla la solución general para los distintos valores de a.
(b) ¿Para qué valores de a la ecuación $x'' - 2ax + x = e^{at}$ tiene una solución de la forma $x_p(t) = Ae^{at}$ con A una constante real? En caso de existir, ¿es esta única?
(c) Halla la solución general de la ecuación $x'' + x = t + \cos t$.

8. ¿Cuál es la ecuación diferencial $x'' + a_1x' + a_2x = b(t)$ para la que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$ son los autovalores de la ecuación característica asociada y $u(t) = 5t^3 + \cos 2t$ es solución? ¿Y si los autovalores son $3 \pm 2i$ y la misma solución particular?

Práctica 5. Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Grupo B

1. Esbozar los diagramas de fases de los sistemas $x' = Ax$ correspondientes a las matrices A siguientes

(a) $\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 16 & 23 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -13 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$ (h) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = x + y, \quad y' = 4x + y$$

se pide:
(i) Determinar su solución general.
(ii) Determinar la solución que satisface la condición inicial $(x(0), y(0)) = (1, -2)$.
(iii) ¿Qué comportamiento asintótico tienen las soluciones correspondientes a condiciones iniciales de la forma $(x(0), y(0)) = (\alpha, -2\alpha)$ siendo α una constante cuaquiera?
(iv) Esbozar su diagrama de fases. Comentar el resultado obtenido en (iii).

(b) Dado ahora el sistema

$$x' = x + y - 2, \quad y' = 4x + y - 5$$

se pide:
(i) Determinar su solución general.
(ii) Esbozar su diagrama de fases.

3. Hallar la solución general y dibujar el diagrama de fases de los sistemas:

$$\text{(a) } x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Describir los diagramas de fases de los sistemas planos $x' = Ax$ para los que $\lambda = 0$ es autovalor de A.

5. (a) Clasificar el sistema lineal (es decir, decidir qué tipo de punto de equilibrio es el origen):

$$\begin{cases} x' = -2x + ay \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
(b) Hallar la solución general del sistema para valores de a representativos de las distintas posibilidades. (Se recomienda elegir valores de a que impliquen cálculos sencillos.)
(c) Representar el diagrama de fases para los valores de a elegidos en (b).

6. Determina el movimiento del sistema mecánico visto en clase (muelle vertical en el que se ha colgado un objeto de masa m) en el caso que no se tenga amortiguación (es decir, $c = 0$) y tal que se le aplica una fuerza periódica de amplitud F_0 y frecuencia angular w_0 (con la notación vista en clase, $w_0^2 = \frac{k}{m}$, siendo k la constante relativa a la rigidez del muelle). Por tanto la ecuación a estudiar es

$$x'' + w_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos w_0 t.$$

En este caso se dice que se tiene **resonancia pura o no amortiguada**.

Práctica 6. Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Grupo B

1. Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones de **variables separables**, especificando también las soluciones de los problemas de valor inicial cuando así venga indicado. En los casos en los que sea posible, despejar x de las fómulas implícitas que se hayan calculado, e indicar el intervalo de definición de la solución:

(a) $x' = x^2 + t^2x^2$; (b) $x' = e^x - 1$; (c) $\begin{cases} x' = \dfrac{1+x^2}{tx(1+t^2)} \\ x(1) = 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = \dfrac{e^{t-x}}{1+e^x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones de **Bernoulli**:

(a) $x' = \dfrac{4t^3 - x^3}{3tx^2}$; (b) $\begin{cases} 4x^3x' + \dfrac{x^4}{t} = 6 \\ x(1) = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = 6x - 3x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Resolver también (a) como ecuación homogenea y estudiar cuantas soluciones admite (c).

3. Resolver la **ecuación logística generalizada** de coeficientes variables

$$x' = a(t)x - b(t)x^m$$

donde $m > 1$ es una constante.

4. Resolver las siguientes ecuaciones de **Riccati**, utilizando la solución particular indicada:

(a) $t^2x' + t^2x^2 + tx - 1 = 0$. [Solución particular: $x_1(t) = \frac{1}{t}$]

(b) $x' = 1 + x - e^{-2t}x^2$. [Solución particular: $x_1(t) = e^{at}$]

(c) $x' = (1-x)(x-2)$. [Existen dos soluciones particulares constantes]. Resolver la ecuación de dos maneras, empleando en cada caso la solución particular correspondiente, y comparar con el resultado obtenido mediante separación de variables.

(d) $tx' - ax + bx^2 = ct^n$. Probar que si $n = 2a$, el cambio $x = ut^a$ permite separar variables.

5. Resolver las siguientes ecuaciones **homogeneas**:

(a) $x' = \dfrac{x+t}{x-t}$ (b) $\begin{cases} x' = \dfrac{x + \sqrt{t^2+x^2}}{t} \\ x(1) = 0 \end{cases}$ (c) $x' = e^{x/t} + \dfrac{x}{t}$

6. Resolver las siguientes ecuaciones, **reducibles a homogeneas**:

(a) $x' = \dfrac{x+t-2}{x-t}$ (b) $(t+x) + (t+x-1)x' = 0$ (c) $x' = -\dfrac{8t+4x+1}{4t+2x+1}$

7. Resolver, mediante un **cambio de variable** adecuado, las ecuaciones

(a) $x' = f(at+bx)$ (b) $x' = \frac{x}{t}f(tx)$ (c) $(\cos x)x' - 2t\sin x = -2t$

8. Analiza si las siguientes **ecuaciones son exactas**, resolviendo las que lo sean. En los problemas de valor inicial planteado, expresar con precisión el intervalo de definición de las soluciones.

(a) $-x-1+(2x-t)x'=0b$

(b) $x'=-\dfrac{2t+x^2e^t}{2xe^t}$

(c) $\begin{cases} x(2t-x)+(t^2-2tx)x'=0 \\ x(1)=-1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x(2t-x)+(t^2-2tx)x'=0 \\ x(0)=0 \end{cases}$

9. Establece condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación diferencial

$$m(t,x)+n(t,x)\frac{dx}{dt}=0$$

posea **factores integrantes** de la forma: (a) $\mu=\mu(t+x)$; (b) $\mu=\mu(t-x)$; (c) $\mu=\mu(tx)$.

10. Comprobar que las siguientes ecuaciones no son exactas; hallar **factores integrantes** y resolverlas:

(a) $tx-t^2-x'=0$. ¿De qué otra forma puede resolverse?

(b) $x+2t+(xt+t+t^2)x'=0$

(c) $x(t+1)+t(x+1)x'=0$. [Buscar $\mu=\mu(x+t)$].

(d) $6x^2+6tx+(9tx+4t^2)x'=0$. [Buscar $\mu=\mu(xt)$].

Práctica 7. Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Grupo B

1. Trazar los campos de direcciones asociados a las siguientes ecuaciones:

(a) $x' = -x^2$; (b) $x' = x^2 - x^3$; (c) $x' = xt$;

(d) $x' = -\dfrac{x}{t}$; (e) $x' = -\dfrac{t}{x}$; (f) $x' = -\dfrac{1}{t+x}$.

En los casos en los que se pueda resolver la ecuación y dibujar las soluciones, comparar con la información obtenida mediante el campo de direcciones.

2. Probar que la solución de $x' = t^2 + x^2$ que pasa por $(0,0)$ tiene una inflexión en dicho punto, y es estrictamente creciente en el mismo.

3. Se considera la ecuación $x' = tx$. *Sin resolverla explicitamente*, probar que la solución $x(t)$ que pasa por $(0, x_0)$, siendo $x_0 > 0$: (a) tiene un mínimo estricto en $t = 0$; (b) no tiene máximos locales ni globales; (c) es positva en todo su intervalo de definición; (d) es convexa.
Resolver la ecuación y contrastar las respuestas.

4. Se considera la ecuación $x' = t - x^2$. (a) Obtener las regiones de crecimiento y de decrecimiento de las soluciones. (b) Obtener las curvas de máximos, mínimos y puntos de inflexión de las soluciones. (c) Trazar aproximadamente las soluciones.

5. Hallar las ecuaciones diferenciales de los haces de elipses e hipérbolas

$$\text{(a) } \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1; \qquad \text{(b) } \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1.$$

Resolver las ecuaciones diferenciales obtenidas.

6. Para cada una de las siguientes familias de curvas: (a) Circunferencias tangentes al eje y en el origen; (b) haz de hipérbolas $x^2 + 2y^2 = C$; (c) haz de hipérbolas $xy = C$; (d) haz de "parábolas" generalizadas $y = Cx^m$, ($m > 1$ fijo); (e) $y = x^2 + C$; (f) $y = e^x + C$, se pide:

(i) Hallar la ecuación diferencial que satisface.

(ii) Obtener la ecuación de la familia de curvas ortogonales.

(iii) Resolver esta ecuación y calcular, en particular, la curva ortogonal que pasa por (0,1).

(iv) Dibujar las correspondientes familias de curvas.