MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

1. Los Números Reales

1.1. A) Encuentra el número más pequeño de los siguientes conjuntos de números naturales: a) $A = \{2n : n \geq 5\}$ b) $\{2k^2 + 7 \ : 8 \geq k \geq 2\}$
¿Cuál es el elemento más grande en cada conjunto?

B) Es verdad que si $E \subset \mathbb{N}$ y $E \neq \emptyset$, existe un elemento $a \in E$ de modo que $a \leq b$ para todo elemento $b \in E$?

C) Observa el subconjunto de números racionales $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. ¿En este subconjunto existe un elemento que es el más pequeño de todos? ¿Existe alguno que sea el más grande?

1.2. Demuestra por inducción que:
1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, si $r \neq 1$. 4) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$.

5) Si $n \geq 4$, entonces $2^n \geq n^2$ (**Indicación:** ver antes que $2n^2 \geq (n+1)^2$ para todo $n \geq 4$).
6) Dado un conjunto A de n elementos, prueba que tiene exactamente 2^n subconjuntos.

1.3. Usando que todo número $n \in \mathbb{N}$ se descompone en producto de potencias de números primos de manera única, salvo el orden de los factores, prueba que
a) si $p, n \in \mathbb{N}$ y p es un número primo entonces que p divida a n^2 es equivalente a que p divida a n;
b) y que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$, siempre que p sea un número primo.

1.4. Sea $p \in \mathbb{Q}, p \neq 0$ y sea $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Prueba que $p + x$ y px son irracionales, es decir que pertenecen a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

1.5. Demuestra lo siguiente:
a) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$.
b) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ c) $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.
d) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o bien $x = -y$.
e) Si $ax^2 + bx + c = 0$ y $a \neq 0$, prueba que $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ¿siempre?

1.6. Simplifica las siguientes expresiones:
a) $\dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ b) $\dfrac{x^2 + 2ax + a^2}{x + a}$ c) $\dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$.

1.7. Encuentra el fallo en la siguiente "demostración". Si $x = y$, entonces $x^2 = xy$ y por tanto $x^2 - y^2 = xy - y^2$. Sacando factor común $(x-y)(x+y) = y(x-y)$ y simplificando $x + y = y$. Como $x = y$, escribimos $2y = y$ y de nuevo simplificando $2 = 1$.

1.8. Dibuja los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}$.
1) $\{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$ 2) $[1,3) \bigcup (2,\pi]$ 3) $\{(-1)^n + \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\}$.

1.9. Halla todos los números reales x que satisfacen, en cada caso, las siguientes relaciones:
a) $x^2 - 4 \geq |2x+4|$ b) $\dfrac{1-2x}{x+2} \leq 3$ c) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{x}$.
d) $|x-1| + |x-2| > 1$ e) $x^3(x^6 - 62)(x+3)^2 < 0$.

1.10. Resuelve las ecuaciones: $|x-3| + |x-7| = 2$, $|x-3| + |x-7| = 4$ y $||3-x| - |x|| = |x| + 1$.

1.11. En la ecuación $y = 2x + |2-x|$, despeja x en función de la y.

1.12. Si $x > 0$, prueba que entonces es cierto que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

1.13. Si $a \leq b$ y para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $a \leq b \leq a + \epsilon$, prueba que $a = b$. Del mismo modo prueba que si para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $b - \epsilon \leq a \leq b$, entonces $a = b$.

1.14. Sea A un subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$. Sea $A_0 \subseteq A$ con $A_0 \neq \emptyset$. Prueba que A_0 está acotado y que:

$$\text{ínf}\, A \leq \text{ínf}\, A_0 \leq \sup A_0 \leq \sup A$$

1.15. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se definen los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b \quad \text{donde} \quad a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}$$

y

$$\alpha A = \{x \in \mathbb{R} : x = \alpha a \quad \text{donde} \quad a \in A\}$$

Prueba que:
i) $\sup A + B = \sup A + \sup B$ ii) $\text{ínf}\, A + B = \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B$.
iii) $\text{ínf}\, \alpha A = \alpha\, \text{ínf}\, A$ y $\sup \alpha A = \alpha \sup A$ siempre que $\alpha > 0$.
iv) $\text{ínf}\, \alpha A = \alpha \sup A$ y $\sup \alpha A = \alpha\, \text{ínf}\, A$ siempre que $\alpha < 0$.

1.16. Sea α una cota superior de $A \subset \mathbb{R}$.
A) Prueba que si $\alpha \in A$, entonces $\alpha = \sup A$.
B) Prueba que $\alpha = \sup A$ es equivalente a decir que para todo número $r > 0$ existe $a \in A$ de modo que $\alpha - r \leq a$.

1.17. Calcula cotas superiores e inferiores, supremos e ínfimos (si existen) de los siguientes conjuntos:
1) $\{3, 3'3, 3'33, 3'333, ...\}$ 2) $[3, \dfrac{25}{3}] \bigcap (\dfrac{5}{4}, 8]$ 3)$\{x \in \mathbb{R} : x = 1 - \frac{1}{r},\ \text{con } r > 0\}$.
4) $A \subset \mathbb{R}$ de modo que si $x \in A$ y su forma decimal es $x = c, a_1 a_2 a_3 .... a_n ...$ se tiene que $a_{2k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

1.18. Representa en $\mathbb{R}^2$ los siguientes conjuntos:
1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ 2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$
3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |3x - 1| \geq y\}$ 4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 - x| + x > y\}$.
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

2. Sucesiones y Series

2.1. Dada un sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, escribe lo que significa por definición que $lim_{n\to\infty}a_n = 1/3$.

- ¿Puede existir algún n tal que $a_n > 10$?
- ¿E infinitos n tales que $a_n > 10$?
- ¿y que cumplan $|a_n - 1/3| < \frac{1}{10^{40}}$?

2.2. Usa la definición de límite de una sucesión para probar que:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+n+1} = 0$;
2. $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$ implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n^2+1} = \dfrac{1}{3}$. Halla un número natural N tal que para todo $n \geq N$ se tenga que $|\dfrac{n^2}{3n^2+1} - \dfrac{1}{3}| < 10^{-4}$.

2.3. De la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se sabe que es convergente y que sus términos son alternativamente positivos y negativos. ¿Cuál es su límite? Razona la respuesta. Pon un ejemplo.

Observación: Como indicación general, puede ser útil siempre que tengamos una sucesión, como las que aparecen a continuación, calcular sus primero términos; ver si creen o decrecen y determinar si la sucesión está acotada o no.

2.4. Determina como son los conjuntos siguientes y calcula los respectivos supremos e ínfimos si existen.

a) $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2n-1}{n+3}]$ b) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{n^2}{6n^2+2}, \dfrac{n^2}{3n^2+1}]$ c) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{n^2}{6n^2+2}, \dfrac{n^2}{3n^2+1}]$

2.5. Sea $x \in \mathbb{R}$ cuya forma decimal es $x = r, a_1a_2...a_na_{n+1}.....$. Se considera la sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty} = (r, a_1...a_k)_{k=1}^{\infty}$. Prueba que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

2.6. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ se dice que converge a infinito ($\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$) si para todo $M > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $x_n > M$.
a) ¿Qué significa entonces que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$?
b) Determina el límite de las sucesiones: 1) $a_n = 3n+4$ 2) $a_n = -5n+8$ 3) $a_n = \sqrt{n}$ 4) $a_n = -3^n$ 5) $a_n = (-1)^n 3^n$
c) Prueba que si $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.
d) Si $x > 1$, comprueba que $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$. Deduce que si $x \in (0,1)$, entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.
e) Determina el límite de las sucesiones: 1) $a_n = (\dfrac{1}{2})^n$ 2) $a_n = (-1)^n(\dfrac{1}{2})^n$ 3) $a_n = (\dfrac{-1}{n})^5$

2.7. Calcula los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+5^n}{2^{n+2}+5^{n+1}}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n}-1}{2\sqrt{n}+2}$.

4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{(n^2+1)}+\frac{n-1}{(n^2+2)}+...+\frac{n-1}{(n^2+n)}\right)$ 5) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+...+\frac{1}{n^2-1})$.

2.8. Se puede probar que la sucesión $((1+1/n)^n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada; por tanto convergente. Se define el número real e como:

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

Calcula los límites de las sucesiones siguientes:

a) $a_n=\left(1+\frac{1}{n^3+2}\right)^{\frac{n^3+3}{5}}$, b) $b_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

c) $((1+\frac{1}{n+3})^{\frac{n}{3}})_{n=1}^{\infty}$ d) $((1-\frac{1}{n-1})^{2n})_{n=2}^{\infty}$ e) $((\frac{n^2+2n}{n^2+n})^{2n})_{n=1}^{\infty}$.

2.9. Sucesiones recurrentes: A) Determina si las sucesiones siguientes son convergentes o no.

$a_1)$ $a_{n+1}=a_n\frac{n}{n+7}$, con $a_1=7$. $a_2)$ $x_{n+1}=\sqrt{1+x_n^2}$, con $x_1>1$.

$a_3)$ $a_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}$.

B) Comprueba que las sucesiones siguientes son convergentes y calcula su límite.

$b_1)$ $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+6)$, con $a_1=2$.

$b_2)$ $x_{n+1}=\frac{1}{3-x_n}$ con $x_1=2$. $b_3)$ $x_{n+1}=\frac{x_n^2+m}{2x_n}$ con $x_1=m>1$ (Verifica que estamos ante un algoritmo para calcular $\sqrt{m}$).

2.10. De cada una de las dos sucesiones siguientes se pide determinar: Si está acotada. Si es convergente. Si es $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$. Y también, encontrar una subsucesión convergente especificando su límite.

a)$x_n=\begin{cases} p+\frac{1}{k} & \text{si} \quad n=p^k \quad \text{con } p \text{ primo y } k\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$

b)$x_n=\begin{cases} \frac{(-1)^n n}{n+1} & \text{si} \quad n=3k \quad \text{con } k\in\mathbb{N} \\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} & \text{si} \quad n=3k+1 \quad \text{con } k\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ \frac{1}{1-x_{n-2}+x_{n-1}} & \text{si} \quad n=3k+2 \quad \text{con } k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\end{cases}$

2.11. Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. Se sabe que dicho algoritmo actúa de la siguiente manera:

1) con solo un dato de entrada resuelve el problema usando una instrucción.

2) con n datos de entrada usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y se ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo.

Se pide: a) definir la sucesión recurrente $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. b) Estudiar la monotonía y acotación de la misma. c) Probar por inducción que $|a_n-2n^2|<2n$ para todo n. d) Deducir que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2}=1$.

2.12. Si se invierten 1000 euros al 6 % de interés compuesto anulamente, significa que cada año te dan el 6 % de interés que se reinvierte automáticamente al año siguiente. Escribe la sucesión a_n que te da el valor al cabo de n años.

Determina los primeros términos 3 términos de la sucesión a_n. ¿Converge o diverge? ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que dupliques tu capital? ¿Y para multiplicarlo por 4? ¿y por 10?

2.13. a) Calcula la suma de : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n-2^n}{16^n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+5}}{3^{n+3}}$.
b) Suma $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{\pi^3}+\cdots(-1)^{n-1}(\frac{2}{\pi})^n+\cdots$
c) Se considera la sucesión $a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n^2}$, con $a_1=2$. . Hay que probar que es una sucesión de Cauchy y después calcular su límite. **(Indicación:** Comprueba que $|a_{n+1}-a_n|\leq\dfrac{6}{16}|a_n-a_{n-1}|$. Después intenta acotar $|a_{n+k}-a_n|$ y usa que la sucesión $((\frac{6}{16})^n)_{n=1}^{\infty}$ es geométrica).

2.14. Sea (u_n) una serie geométrica de primer término $u_0=1$ y razón $q\in(0,\infty)$. Llamemos $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. Justifica la certeza o falsedad de las siguientes expresiones:
a) Si $\exists n\in\mathbb{N}$ tal que $S_n>2009$, entonces $q>1$.
b) Si $q<1$, entonces $\lim_{n\to\infty}u_n=q$
c) Si $q>1$, entonces la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada.
d) Si $\lim_{n\to\infty}S_n=3$, entonces $q=1/2$.
e) Si $q=2$, entonces $S_4=15$.

2.15 Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que $a_n=b_n-b_{n+1}$.
1) Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente si y solo si la sucesión (b_n) es convergente y se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=b_1-\lim_{n\to\infty}b_n.$$

2) Prueba que para cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ se puede encontrar una sucesión (b_n) que verifica las condiciones del apartado anterior.
3) Aplica 1) al cálculo de la suma de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}\quad\text{y}\quad\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2}).$$

2.16. a) Prueba que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge. (Usa el problema **1.2. 4)**).
b) Prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, con $p>1$, es convergente. (Usa el criterio de la integral).

2.17. Estudia la convergencia de las series:

1) $\displaystyle\sum_{n=21}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n n^a$ $a>0$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ 6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2-\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^3}$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times3\times5\cdots\times(2n+1)}{3\times6\times\cdots\times3n}$

8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^k}$ $k>0$ 9) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{p\ln n}$ $p>0$ 10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$.

2.18. (**Series alternadas**) Determina si cada una de las series siguientes es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o ninguna de ambas cosas:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^k} \qquad k > 0$ b) $\displaystyle\frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + ...$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2 + \cos(n\pi)}{n^2}$

2.19. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, donde $a_1 = 1, a_2 = 3$ y $a_n = 3 \forall n > 2$, representa el número real:

a) $0,13$ b) $0,14$ c) $2/15$ d) $0,134$.

2.20. Expresa el número

$$3,45\widehat{61}$$

como suma de un número racional más una serie geométrica de razón $1/10^2$. Encuentra la fracción irreducible que lo representa.

Justifica el método general para hallar la fracción irreducible de un número decimal con periodo.

2.21. Un sabio pirata decidió enterrar su tesoro en la isla Calavera en la posición límite de los puntos siguientes: partiendo del único manantial de la isla se avanza 1 hacia el este, después la mitad hacia el norte, de nuevo la mitad hacia el este, de nuevo al norte la mitad que en el paso anterior y así sucesivamente. ¿Sabrías donde encontrar el tesoro?

2.22. Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 1 metro, se obtiene otro, en el que volvemos a hacer la misma operación, y así se continua indefinidamente. Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados.

2.23. Sean las series: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}(-1)^k$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}(-1)^{k+1}$. Prueba que todas son absolutamente convergentes en todo $x \in \mathbb{R}$. (***Se verá que***: $e^x, \cos x$ y $\operatorname{sen} x$ son las sumas, respectivamente, de las series anteriores).

2.24. Calcula el dominio de las funciones

1) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$ 2) $\displaystyle g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{3^n}$ 3) $\displaystyle h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cos(n\pi)x^n}{n^2}$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

3. Funciones Continuas

3.1. En los siguientes casos, encuentra $\delta > 0$ de modo que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

A) $f(x) = 1/x$, $x_0 = 2$ y $\epsilon = 1/2$ B) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, $x_0 = 1$ y $\epsilon = 1/3$
C) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$, $x_0 = 2$ y $\epsilon = \frac{1}{n}$.

3.2. De las siguientes funciones, calcula su dominio y los límites (o límites laterales) relevantes para representar la gráfica de cada función.

a) $f(x) = \frac{1+x^2}{x+1}$ b) $f(x) = \sqrt{|x+5| - |x-7|}$ c) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x^2}}$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-x^2}}$ e) $f(x) = |x| + 1 + \frac{\ln|x|}{x^2}$ f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x+1}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

3.3. Calcula los correspondientes límites laterales y determina si las siguientes funciones son continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1+x} & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ e^{\frac{1}{x+1}} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

3.4. Demuestra que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0} \in \mathbb{R}$, $a_n, b_m \neq 0$, si y solo si $m \geq n$. ¿Cuánto vale este límite?

3.5. Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

Existen al menos dos funciones f y g definidas sobre $\mathbb{R}$ tales que:

A) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

B) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$.

C) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y no existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ni es $+\infty$.

D) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

E) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y no existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ni es $\pm\infty$.

3.6. Utiliza que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ para calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{bx}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}$

3.7. Encuentra la función f^{-1} y su dominio en los casos
a) $f(x) = 2^x = e^{x \ln 2}$ b) $f(x) = \frac{2}{4x-5}$
c) $f(x) = \text{tg}(\frac{\pi}{2}e^{-x}),\ x > 0$ d) $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x}}$.

3.8. sea $P(x) = x^n + ... + a_1 x + a_0$ una función polinómica. Prueba que
a) si P es de grado par, entonces $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \infty$,
b) si P es de grado impar, entonces $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$,
c) si P es grado impar, entonces la ecuación $P(x) = 0$ tiene al menos una solución.

3.9. Para cada una de las siguientes funciones f polinómicas encuentra un entero $m \in \mathbb{Z}$ de modo que la ecuación $f(x) = 0$ tenga una solución en $[m, m+1]$.
a) $f(x) = x^3 - x + 3$ b) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$
c) $f(x) = x^5 + x + 1$ d) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

3.10. Sea $f : [0,2] \to [0,2]$ una función continua de modo que $f(0) = f(2)$. Demuestra que existen dos puntos $x, y \in [0,2]$ a los cuales les pasa que $|x - y| = 1$ y que $f(x) = f(y)$.

3.11. Se consideran las ecuaciones $f(x) = 0$ dadas por las funciones siguientes. ¿Cuáles tienen solución y cuáles no? Justifica tu respuesta.
a) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 4}{x^2 + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 4}{(x^2 - 11)^2}$
c) $f(x) = |\ln|x|| - (3x - 6)$ d) $f(x) = \dfrac{x^{15} + 7x^2 - 12}{\ln x} - x^2$.

3.12. Sea $\overrightarrow{d}$ una dirección en el plano y T un triángulo. Prueba que existe una recta con dirección $\overrightarrow{d}$ de modo que divide al triángulo en dos partes de áreas iguales.

3.13. Un coche recorre 100 kilómetros en 50 minutos sin detenerse. Demuestra que hubo un minuto en el cual recorrió 2 kilómetros.

3.14. Sean $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, números reales distintos. Encuentra una función polinómica f de grado menor o igual que $n - 1$ de modo que $f(x_i) = a_i$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son números dados y $i = 1, 2, ...n$.
a) Encuentra un polinomio de grado menor o igual que 2, P, de modo que $P(0) = 2$, $P(1) = -1$ y $P(2) = 6$
b) Encuentra un polinomio de grado menor o igual que 3, P, tal que $P(-1) = 3, P(0) = 4, P(1/2) = 2$ y $P(2/3) = -3$.

3.15. Construye una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que, en cada caso, verifique las propiedades que se indican.
a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = 1$ para todo $x \in [-3, 3]$, $f(x) < 0$ si $|x| > 5$ y $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

3.16. Para cada una de las funciones siguientes di cuáles están acotadas superior o inferiormente y cuáles tienen máximo y/o mínimo. Haz un boceto de sus gráficas.
a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, en $[-5, 5]$ b) $g(x) = \dfrac{3 + x}{2 + x}$, en $[-3, 2]$
c) $h(x) = \dfrac{x}{2} + |x|$, en $[-2, 2]$ d) $l(x) = \dfrac{1}{1 + |x - 1|} + |2 - x|$, en $\mathbb{R}$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

4. La Derivada de una Función. Aplicaciones.

4.1. Supongamos que una función f satisface $f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Además sabemos que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 1$. De la función g sabemos que $g(0) = 1$ y que $g'(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcula $f(0)$.

b) Utiliza la definición de derivada para hallar $f'(x)$.

4.2. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función para la cuál existe una constante $M > 5$ de modo que

$$\frac{1}{M} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq M \qquad \text{para todo} \qquad x, y \in (a, b).$$

Si $c \in (a, b)$, entonces la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(c, f(c))$ **no** puede ser:

a) $y = x + f(c) - c$ b) $y = \frac{M^2+1}{2M}(x - c) + f(c)$

c) $y = -\frac{M}{3}(c - x) + f(c)$ d) $y = -\frac{M}{4}x + f(c) + \frac{Mc}{4}$.

4.3. Sea $y = ax + b$ la recta tangente a la gráfica de $y = \ln(\ln|x|)$ por el punto $(e, 0)$. Entonces $b = ...$

a) 0 b) $e + 1$ c) $\frac{1}{e} - 1$ d) -1.

4.4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a)$f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ b) $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$ c) $f(x) = \left(\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2$

d)$f(x) = \dfrac{x \ln x}{x - 1}$ e) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\cos x + \operatorname{sen} x)$ f) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}}$.

4.5. Se definen las funciones **coseno hiperbólico** por $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, **seno hiperbólico** por $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y **tangente hiperbólica** por $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$.

1) Calcula las derivadas de estas funciones.

2) Comprueba que $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, $\dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ y que $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \operatorname{senh} y \cosh x$.

3) Halla las derivadas de las respectivas funciones inversas arcsenh, arcosh y arctanh.

4.6. Halla f' en función de g' en los siguientes casos:

a) $f(x) = g(x + g(a))$ b) $f(x) = g(xg(a))$ c) $f(x) = g(xg(x))$

d) $f(x) = g(x)(x - a)$ e) $f(x) = g(a)(x - a)$ f) $f(x + 3) = g(x^2)$.

4.7. Estudia la continuidad y la derivabilidad de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si} \quad x \in (0,1] \\ x-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ \ln(e\cos(x-1)) & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

Dibuja la gráfica aproximada de cada función y estudia sus máximos y sus mínimos.

4.8. Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2 - x$. Al desconectar el cohete, viajará a lo largo de la tangente a la curva por el punto de desconexión. ¿En que punto deberá parar el motor para alcanzar el punto $(3,2)$? ¿Y para llegar al $(3,-2)$?

4.9. Empareja cada una de las gráficas (a-e) con la de su derivada (i-v). Explica tu razonamiento.

4.10. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{|x| \ln |x|}$ b) $f(x) = xe^{2x} - 1$ c) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x}{2x^2 - x}$

e) $f(x) = \arctan(3x - x^3)$ f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-2}}$ h) $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 \ln x$ i) $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$.

4.11. Dibuja la gráfica de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. ¿Qué es mayor: e^{π} o π^e?

4.12. Calcula los máximos y los mínimos relativos (o locales) de la función f si su derivada f' tiene la gráfica siguiente:

4.13. Una gota esférica de rocío se evapora a un ritmo proporcional al área de su superficie. Prueba que el radio decrece a un ritmo constante (**Indicación:** el volumen de la esfera es $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y su superficie es $S(r) = 4\pi r^2$; la hipótesis lo que dice es que $V' = -KS$ donde K es un constante positiva, y donde la derivada está referida la tiempo).

4.14. Sea $f(x) = |4x - 3| - x^2$. Determina los valores máximos y mínimos que alcanza la función f en el intervalo $[-3, 3]$. ¿Existe $x_0 \in [0, \frac{2}{3}]$ para el cuál $f(x_0) = 0$?

4.15. Halla el punto de la parábola $x^2 = 4y$, de abscisa no negativa, cuya distancia al punto $(0, 3)$ sea mínima.

4.16. En un rectángulo de 4m de perímetro se sustituyen cada lado por semicircunferencias exteriores. ¿Entre que valores está comprendida el área de esta nueva figura?

4.17. Un fabricante envasa en botes cilíndricos de un litro de capacidad lo mejor de la cosecha de tomates de su pueblo. ¿Qué dimensiones tienen las latas para que el coste del material sea mínimo?

4.18. Calcula cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:

1) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$ 2) $\{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x^2 + x < 2\}$ 3) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 0\}$
(*NOTA:* El $\sup A$ se llama máximo si $\sup A \in A$. Si $\inf A \in A$, se le llama mínimo).

4.19. Si f es derivable en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 3$, calcula:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{e^{\frac{1}{x}}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x+2} - \frac{3x-4}{x+1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x} = 0.$

4.20. Un vehículo entró en un tunel a las 13h25' y sale a las 13h28', lo cuál queda registrado por las cámaras instaladas en ambas bocas del túnel de 4 100 m de longitud. El dueño del vehículo recibió un multa por importe de 600 euros por rebasar la velocidad permitida de 70 km/h dentro del túnel. ¿Recurrió el dueño la multa?

4.21. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua y derivable. Si $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in [0, 1]$, prueba entonces que la ecuación $f(x) = x$ tiene una única solución en $[0, 1]$.

4.22. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \pi]$. Se toman $x_0, a, b \in [0, \pi]$, con $x_0 \leq a < b$. Prueba que $f'(x_0) \geq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4.23. Se consideran las funciones, $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Comprueba que existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, pero que sin embargo no existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4.24. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{\cos^2 x\frac{\pi}{2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-\sqrt{x}}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}+e^x-2}{e^{2x}-3e^x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\operatorname{sen}^3 x + xe^{x^2}}{x+\cos^2 x - e^x}$.

4.25. Prueba que si f es derivable en a, entonces $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$. Justifica que si existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$, la función f no es necesariamente derivable en a.

4.26. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ de modo que existe $f''(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Prueba que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

4. La Derivada de una Función. Aplicaciones.

4.1. Supongamos que una función f satisface $f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Además sabemos que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 1$. De la función g sabemos que $g(0) = 1$ y que $g'(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcula $f(0)$.

b) Utiliza la definición de derivada para hallar $f'(x)$.

4.2. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función para la cuál existe una constante $M > 5$ de modo que

$$\frac{1}{M} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq M \qquad \text{para todo} \qquad x, y \in (a, b).$$

Si $c \in (a, b)$, entonces la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(c, f(c))$ **no** puede ser:

a) $y = x + f(c) - c$ b) $y = \frac{M^2+1}{2M}(x - c) + f(c)$

c) $y = -\frac{M}{3}(c - x) + f(c)$ d) $y = -\frac{M}{4}x + f(c) + \frac{Mc}{4}$.

4.3. Sea $y = ax + b$ la recta tangente a la gráfica de $y = \ln(\ln|x|)$ por el punto $(e, 0)$. Entonces $b = ...$

a) 0 b) $e + 1$ c) $\frac{1}{e} - 1$ d) -1.

4.4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a)$f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ b) $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$ c) $f(x) = \left(\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2$

d)$f(x) = \dfrac{x \ln x}{x - 1}$ e) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\cos x + \operatorname{sen} x)$ f) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}}$.

4.5. Se definen las funciones **coseno hiperbólico** por $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, **seno hiperbólico** por $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y **tangente hiperbólica** por $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$.

1) Calcula las derivadas de estas funciones.

2) Comprueba que $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, $\dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ y que $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \operatorname{senh} y \cosh x$.

3) Halla las derivadas de las respectivas funciones inversas arcsenh, arcosh y arctanh.

4.6. Halla f' en función de g' en los siguientes casos:

a) $f(x) = g(x + g(a))$ b) $f(x) = g(xg(a))$ c) $f(x) = g(xg(x))$

d) $f(x) = g(x)(x - a)$ e) $f(x) = g(a)(x - a)$ f) $f(x + 3) = g(x^2)$.

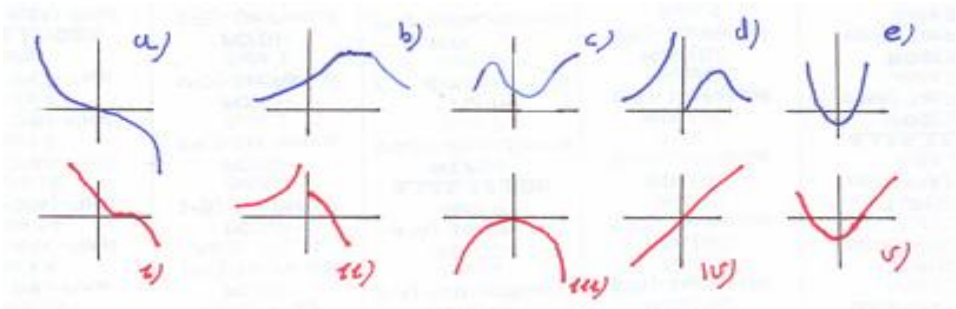
4.7. Estudia la continuidad y la derivabilidad de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si} \quad x \in (0,1] \\ x-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ \ln(e\cos(x-1)) & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

Dibuja la gráfica aproximada de cada función y estudia sus máximos y sus mínimos.

4.8. Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2 - x$. Al desconectar el cohete, viajará a lo largo de la tangente a la curva por el punto de desconexión. ¿En que punto deberá parar el motor para alcanzar el punto $(3,2)$? ¿Y para llegar al $(3,-2)$?

4.9. Empareja cada una de las gráficas (a-e) con la de su derivada (i-v). Explica tu razonamiento.



4.10. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

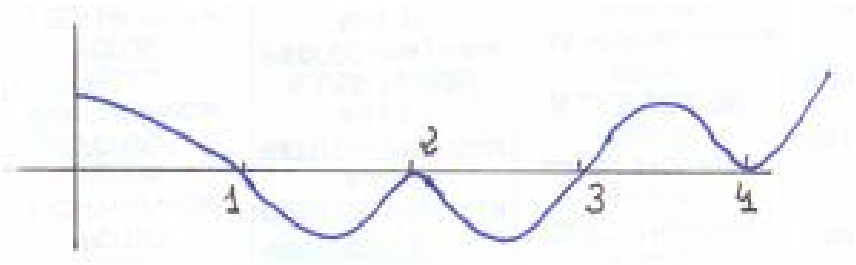
a) $f(x) = \dfrac{1}{|x| \ln |x|}$ b) $f(x) = xe^{2x} - 1$ c) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x}{2x^2 - x}$

e) $f(x) = \arctan(3x - x^3)$ f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-2}}$ h) $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 \ln x$ i) $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$.

4.11. Dibuja la gráfica de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. ¿Qué es mayor: e^{π} o π^e?

4.12. Calcula los máximos y los mínimos relativos (o locales) de la función f si su derivada f' tiene la gráfica siguiente:



4.13. Una gota esférica de rocío se evapora a un ritmo proporcional al área de su superficie. Prueba que el radio decrece a un ritmo constante (**Indicación:** el volumen de la esfera es $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y su superficie es $S(r) = 4\pi r^2$; la hipótesis lo que dice es que $V' = -KS$ donde K es un constante positiva, y donde la derivada está referida la tiempo).

4.14. Sea $f(x) = |4x - 3| - x^2$. Determina los valores máximos y mínimos que alcanza la función f en el intervalo $[-3, 3]$. ¿Existe $x_0 \in [0, \frac{2}{3}]$ para el cuál $f(x_0) = 0$?

4.15. Halla el punto de la parábola $x^2 = 4y$, de abscisa no negativa, cuya distancia al punto $(0, 3)$ sea mínima.

4.16. En un rectángulo de 4m de perímetro se sustituyen cada lado por semicircunferencias exteriores. ¿Entre que valores está comprendida el área de esta nueva figura?

4.17. Un fabricante envasa en botes cilíndricos de un litro de capacidad lo mejor de la cosecha de tomates de su pueblo. ¿Qué dimensiones tienen las latas para que el coste del material sea mínimo?

4.18. Calcula cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:

1) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$ 2) $\{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x^2 + x < 2\}$ 3) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 0\}$
(*NOTA:* El $\sup A$ se llama máximo si $\sup A \in A$. Si $\inf A \in A$, se le llama mínimo).

4.19. Si f es derivable en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 3$, calcula:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{e^{\frac{1}{x}}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x+2} - \frac{3x-4}{x+1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x} = 0.$

4.20. Un vehículo entró en un tunel a las 13h25' y sale a las 13h28', lo cuál queda registrado por las cámaras instaladas en ambas bocas del túnel de 4 100 m de longitud. El dueño del vehículo recibió un multa por importe de 600 euros por rebasar la velocidad permitida de 70 km/h dentro del túnel. ¿Recurrió el dueño la multa?

4.21. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua y derivable. Si $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in [0, 1]$, prueba entonces que la ecuación $f(x) = x$ tiene una única solución en $[0, 1]$.

4.22. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \pi]$. Se toman $x_0, a, b \in [0, \pi]$, con $x_0 \leq a < b$. Prueba que $f'(x_0) \geq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4.23. Se consideran las funciones, $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Comprueba que existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, pero que sin embargo no existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4.24. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{\cos^2 x\frac{\pi}{2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-\sqrt{x}}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}+e^x-2}{e^{2x}-3e^x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\operatorname{sen}^3 x + xe^{x^2}}{x+\cos^2 x - e^x}$.

4.25. Prueba que si f es derivable en a, entonces $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$. Justifica que si existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$, la función f no es necesariamente derivable en a.

4.26. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ de modo que existe $f''(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Prueba que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

5. Aproximación de Funciones por Polinomios.

5.1. Calcula los polinomios de Taylor de grado 2 de las siguientes funciones centrados en los puntos que se indican.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, centrado en $a = \pi$. b) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$.
c) $f(x) = (\ln x)^2$, $a = 1$. d) $f(x) = e^x$, $a = 1$.
e) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $a = 0$. f) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x+1}$, $a = 0$.

5.2. Determina el origen de las siguientes expresiones.

a) $\operatorname{sen} x \simeq \pi - x$ si $x \simeq \pi$. b) $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ si $|x| \simeq 0$.

c) $(\ln x)^2 \simeq (x-1)^2$ si $x \simeq 1$. d) $e^x \simeq e(1 + (x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{2})$ si $x \simeq 1$.

e) $\dfrac{x}{1+x^2} \simeq x$ si $|x| \simeq 0$. f) $\dfrac{\cos x}{1+x} \simeq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$ si $|x| \simeq 0$.

5.3. Encuentra una estimación del error máximo que se puede cometer al tomar:

1) $\pi - x$ en lugar de $\operatorname{sen} x$ si $x \in [3,1\,,3,2]$.

2) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ en lugar de $\sqrt{1+x}$ si $x \in [-0,2\,,0,2]$.

3) $(x-1)^2$ en lugar de $(\ln x)^2$ si $x \in [0,7,1,3]$.

4) $e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2})$ en lugar de e^x si $x \in [0,8\,,1,2]$.

5) $e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2})$ en lugar de e^x si $x \in [0,4\,,1,6]$.

5.4. Explica la siguiente desigualdad

$$|\operatorname{sen}(a+h) - (\operatorname{sen} a + h\cos a)| \leq \frac{1}{2}h^2.$$

5.5. Un hilo pesado, bajo la acción de la gravedad, se comba formando la catenaria $y = a\cosh\frac{x}{a}$. Demuestra que, para valores pequeños de $|x|$, la forma que toma el hilo puede ser representada por la parábola $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

5.6. Calcula las series de Taylor de las funciones siguientes centradas en los puntos que se indican.

a) $f(x) = e^x$, centrada en $a = 1$. b) $f(x) = (x-1)e^{x+1}$, $a = 1$.
c) $f(x) = e^x(x-1)^5$, en $a = 1$. d) $f(x) = \cos x$, $a = \frac{\pi}{4}$. e) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi$.
f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{(x-\pi)}$, en $a = \pi$. g) $f(x) = e^{-x^2}$, $a = 0$.
h) $f(x) = \ln(1+x^2)$, $a = 0$. i) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, $a = 0$.

5.7. Calcula los siguientes números con un error inferior a 10^{-3};

1) $\operatorname{sen} 1$. 2) e^{-1}. 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{10}$. 4) $\ln 2$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

6. La integral. Cálculo de Primitivas

6.1. Para las funciones siguientes, determina si existe su integral y en su caso calculala, usando la definición de integral (o el criterio de Integrabilidad de Riemann).

$$a)\quad f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in[0,2]\backslash\{1\}\\ 2 & \text{si} \quad x=1\end{cases}\qquad b)\quad f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in[0,2]\backslash\{\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\}\\ 2 & \text{si} \quad x=\frac{k}{5},\quad k=1,2,3,4.\end{cases}$$

6.2. Calcula la integral de las siguientes funciones; antes dibuja las gráficas de las mismas.

$$a)\quad f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in[0,1]\\ 2x-1 & \text{si} \quad x\in[1,2]\\ 3x-3 & \text{si} \quad x\in[2,3]\end{cases}$$

b) Si $[x]$ es la parte entera de $x\in\mathbb{R}$ (el mayor entero menor que x), se considera $f(x)=x[x]$. Calcula $\displaystyle\int_1^n f(x)dx$.

6.3. Supongamos que $f\geq 0$ y que f es continua en $[a,b]$. Si $\int_a^b f=0$, prueba que $f(x)=0$, para todo $x\in[a,b]$.

6.4. Prueba que $\displaystyle\frac{\pi}{2}\leq\int_0^\pi \operatorname{sen} x dx\leq\pi$.

Encuentra cotas superiores e inferiores para las siguientes integrales:
a) $\int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x dx$ b) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ c) $\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx$.

6.5. Usa argumentos geométricos para determinar si las siguientes expresiones son ciertas o no.
a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen} x dx$. b) $\displaystyle\int_0^1\sqrt[3]{x}dx=1-\int_0^1 x^3dx$.
c) Sea $y=f(x)$ la tangente a la curva $y=-x^2+4$ por el punto $(\frac{1}{2},4-\frac{1}{4})$. Se considera la expresión $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1 -x^2+4dx$.

6.6. Sea $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$. En los siguientes casos encuentra una expresión explícita de la función F.

$$a)\quad f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in[0,\frac{1}{2}]\\ 2 & \text{si} \quad x\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3}]\\ 3 & \text{si} \quad x\in(\frac{2}{3},1]\end{cases}\qquad b)\quad f(x)=\begin{cases}1-x & \text{si} \quad x\in[0,\frac{1}{2}]\\ 2-x & \text{si} \quad x\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3}]\\ 3-x & \text{si} \quad x\in(\frac{2}{3},1]\end{cases}$$

En ambos casos, ¿es F una función continua?

6.7. Deriva F, definida sobre $[0,2]$ del modo siguiente:
1) $F(x)=\displaystyle\int_0^{\ln(x+1)}\sqrt{t^2+1}dt$. 2)$F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2+1}\frac{1+t}{1+t^2}dt$.
3) $F(x)=\displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x}\frac{t}{t^2+1}dt$. 4) $F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{\ln(x+1)}\sqrt{1+t^2}dt$

6.8. Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$, prueba que existe $c\in[a,b]$ de modo que $f(c)=g(c)$.

6.9. Representa las gráficas de las funciones:
a) $F(x)=\displaystyle\int_0^x -3t^2+24t-45dt,\quad x\in\mathbb{R}$. b) $F(x)=\displaystyle\int_0^{\ln(x+1)}e^{t^2}dt,\quad x\geq 0$.
c)$F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\operatorname{sen}^8 tdt,\quad x\in[0,\pi]$.

6.10. Si la función f es continua en $[0,1]$, prueba que: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k/n)\right) = \displaystyle\int_0^1 f.$

Utiliza lo anterior para calcular $\int_0^1 xdx$ y $\int_0^1 x^2dx$. (**Indicación:** usa el ejercicio 1.2. de la Hoja 1.).

6.11. Utiliza el ejercicio anterior para expresar cada uno de los siguientes límites como una integral. Resuelvelos usando primitivas.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k+n)-\ln(n)}{n})$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+n)(k-n)\ )$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2})$.

6.12. Calcula las siguientes primitivas elementales.

a) $\int xdx$ b) $\int x^3dx$ c) $\int 3x^5+2x^3+7dx$ d) $\int(x-2)^2dx$

e) $\int\cos xdx$ f) $\int \operatorname{sen} xdx$ g) $\int 3\cos x+2\operatorname{sen} xdx$ h) $\int 2x\cos x^2dx$

i) $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx$ j) $\int\dfrac{1}{x^k}dx$ con $k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ k) $\int e^xdx$ l) $\displaystyle\int\frac{2x}{(x^2-1)^3}dx$

m) $\int\cosh xdx$ n) $\int\operatorname{senh} xdx$ ñ) $\int 3\cosh x+2\operatorname{senh} xdx$ o) $\int\cosh x\cosh(\operatorname{senh} x)dx$

p) $\displaystyle\int\frac{1}{x-1}dx$ q) $\displaystyle\int\frac{1}{x+1}dx$ r) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}dx$ s) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ t) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

6.13. Calcula las siguientes primitivas usando la Regla de Integración por Partes.

1) $\int xe^xdx$ 2) $\int x\operatorname{sen} xdx$ 3) $\int x\cos xdx$ 4) $\int\frac{x}{e^x}dx$

5) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$ 6) $\int e^x\operatorname{sen} xdx$ 7) $\int\operatorname{arc\,tg} xdx$ 8) $\int\operatorname{arc\,sen} xdx$.

6.14. Demuestra las siguientes fórmulas de reducción:

1) $\displaystyle\int\operatorname{sen}^n xdx=-\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\operatorname{sen}^{n-2}xdx$, $n>2$ y par.

2) $\displaystyle\int\cos^n xdx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen} x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}xdx$, $n>2$ y par.

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$.

6.15. Comprueba las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}=\ln|\tan\frac{x}{2}|$ b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}=\ln|\operatorname{tg}(\tfrac{x}{2}+\tfrac{\pi}{4})|$

6.16. Obtén, mediante un cambio de variable, una primitiva en los casos siguientes:

1) $\displaystyle\int x\sqrt[5]{5-x^2}dx$ 2) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ 4) $\displaystyle\int\frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}dx$

5) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx$ 6) $\displaystyle\int\frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 7) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

8) $\displaystyle\int\operatorname{tg}(\sqrt{x-1})\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$. 9) $\displaystyle\int x^2\cosh(x^3+3)dx$.

6.17. Calcula las siguientes primitivas con el cambio de variable que se indica.

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(1-x)}$; ($x=\operatorname{sen}^2 t$, y usa 6.15.). b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$; ($x=\sqrt{2}\cosh u$).

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+1}$; ($x=-\ln t$). d) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$; ($t=\sqrt{x+1}$).

e) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$; ($x=\operatorname{tg} t$, y usa 6.15.). f) $\displaystyle\int\sqrt{a^2+x^2}dx$; ($x=a\operatorname{senh} t$, usa 4.5.).

6.18. Calcula las siguientes primitivas utilizando las identidades trigonométricas "adecuadas."

a) $\int \cos^2 x dx$. b) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx$. c) $\int \operatorname{sen}^2 x dx$.

d) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$. e) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} dx$. f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$.

6.19. Calcula las primitivas siguientes.

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$. 3) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-7x+13} dx$.

4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-6x+10} dx$. 5) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx$.

6.20. Calcula las primitivas de las funciones racionales siguientes.

1) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$. 2) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx$. 3) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$. 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$,(usa 6.14.).

6.21. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y de periodo p. Demuestra la igualdad

$$\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$$

6.22. a) Calcula $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x dx$.

b) Análogamente, prueba que si $F = \int f$, entonces

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)).$$

c) Usa lo anterior para calcular $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1} dx$.

6.23. Calcula una primitiva en los siguientes casos:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$. 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$. 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\operatorname{tg} x}$. 6) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x dx$. 7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$. 8) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

9) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$. 10) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x} dx$. 11) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x \int_0^x \operatorname{sen} t dt) dx$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

7. La Integral Impropia. Aplicaciones de la Integral

7.1. a) Demuestra que el área de un círculo de radio r es πr^2. (Recuerda que π es el área del círculo unidad por definición).
b) Calcula la longitud de media circunferencia de radio r.

7.2. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función positiva ($f \geq 0$), decreciente e integrable en $[0, \infty)$.
a) Se define la función $g(x) = f([x] + 1)$, donde $[x]$ es la parte entera de x con $x \in [0, \infty)$. Prueba que

$$\int_0^\infty f(x)dx \geq \int_0^\infty g(x)dx.$$

b) Deduce de a) que si $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ es convergente.
c) Estudia la convergencia de las series:

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{n}$.

7.3. Calcula las siguientes integrales impropias, si existen:

1) $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} x dx$. 2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$. 3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} x dx$.

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, con $p > 0$. 5) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$, con $p > 0$.

6) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$. 7) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$. 8) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$. 9) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

7.4. Determina la convergencia o divergencia de las integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3}$. b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. c) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{x}{(1+5x^2)^{2/3}} dx$.

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$. e) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4+1}}$. f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} dx$.

7.5. Sean $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ y su transformada de Laplace $Lf(s) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx, s > 0$.

a) Calcula $Lf(s)$ para $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$.

b) Si f' es la derivada de f, calcula una expresión de $Lf'(s)$, suponiendo que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-sx} = 0, \qquad s > 0.$$

7.6. Para cada $x > 0$ se define la función **Gamma de Euler** por $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$.

a) Prueba que la función Gamma está bien definida.
b) Usando la regla de integración por partes, prueba que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.
c) Calcula $\Gamma(1)$ y deduce que $\Gamma(n) = (n - 1)!$ para $n \in \mathbb{N}$.
d) Con el cambio de variable $u = t^x$, prueba que

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^{\frac{1}{x}}} du \qquad \text{y} \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du.$$

7.7. Si conocemos que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calcula las integrales impropias
a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]}dx$ (Indicación: $u = \frac{x-\mu}{\tau}$). b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]}dx$

7.8. Halla el área de los recintos limitados entre las gráficas:
1) $y = 2 - x^2$ y $y^3 = x^2$ 2) $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$.
3) $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3 - 2x$.
4) Entre la curva $y = \frac{1-x}{1+x}$, su asíntota $y = -1$ y la recta $x = 1$.
5) $y = \frac{x^2}{3}$ y $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$. 6) $y = \frac{1}{1+x^2}$ y $y = \frac{x^2}{2}$.

7.9. Halla el volumen que se produce al girar, alrededor del eje $0X$, el arco de catenaria $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ para $a \in [-a, a]$.

7.10. Halla el volumen del cuerpo que se produce al girar, alrededor del eje $0Y$, el arco de parábola $y^2 = 4ax$ desde el origen hasta que corta a la recta $x = a > 0$.

7.11. a) Comprueba que las siguientes igualdades son ciertas:

$$1) \quad \int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi. \qquad 2) \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 nxdx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nxdx = \pi, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$3) \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\operatorname{sen}(mx)dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)dx = 0,$$

$\forall n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$.

(*Indicación:* considera las siguientes igualdades trigonométricas $\cos A\cos B = 1/2(\cos(A+B)+\cos(A-B))$, $\cos A\operatorname{sen} B = 1/2(\operatorname{sen}(A+B)-\operatorname{sen}(A-B))$ y $\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B = 1/2(\cos(A-B)-\cos(A+B))$.)

b) Dada una función f continua en $[0, 2\pi]$, se definen sus **coeficientes de Fourier** por:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{y} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Y se llama **serie de Fourier** de f a la expresión: $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)$.

Calcula la serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$
Observación: se puede probar que toda función f derivable y 2π-periódica se puede escribir igual a su serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx).$$