MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA. GRUPO D. PRÁCTICA 1

NOMBRE Y APELLIDOS:

1) Demuestra por inducción que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad \text{si} \quad r \neq 1.$

2) Sea $p \in \mathbb{Q}, p \neq 0$ y sea $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Prueba que $p+x$ y px son irracionales, es decir que pertenecen a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

3) Encuentra el fallo en la siguiente "demostración": Si $x = y$, entonces $x^2 = xy$ y por tanto $x^2 - y^2 = xy - y^2$. Sacando factor común $(x-y)(x+y) = y(x-y)$ y simplificando $x+y = y$. Como $x = y$, escribimos $2y = y$ y de nuevo simplificando $2 = 1$.

4) Dibuja los subconjuntos de $\mathbb{R}$: $A = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = [1, 3) \bigcup (2, \pi]$.

5) Halla todos los números reales x que satisfacen $x^2 - 4 \geq |2x + 4|$.

6) Calcula cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo (si existen) del conjunto $A \subset \mathbb{R}$ de modo que si $x \in A$ y su forma decimal es $x = c'a_1a_2a_3....a_n...$ (con $c, a_1, a_2, ... \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$) se tiene que $a_{2k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA. GRUPO D. PRÁCTICA 2

NOMBRE Y APELLIDOS:

1) Dada un sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, escribe lo que significa por definición que $lim_{n\to\infty} a_n = 1/3$.

- ¿Puede existir algún n tal que $a_n > 10$?

- ¿E infinitos n tales que $a_n > 10$?

- ¿y que cumplan $|a_n - 1/3| < \frac{1}{10^{40}}$?

2) Halla un número natural N tal que para todo $n \geq N$ se tenga que $|\dfrac{n^2}{3n^2+1} - \dfrac{1}{3}| < 10^{-4}$.

3) ¿Tiene límite la sucesión $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$?

4) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+5^n}{2^{n+2}+5^{n+1}}$.

5) Sea $x \in \mathbb{R}$ cuya forma decimal es $x = r, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots\ldots$. Se considera la sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty} = (r, a_1 \ldots a_k)_{k=1}^{\infty}$. Prueba que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

6) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^3(n)\, \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA. GRUPO D. PRÁCTICA 3

NOMBRE Y APELLIDOS:

1) Halla $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+n}\right)^{2n}$

2) Halla $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}\right)$

3) Halla $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n^2+1} + \dfrac{n-1}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2+n}\right)$

4) Si se invierten 1000 euros al 6 % de interés compuesto anualmente, significa que cada año te dan el 6 % de interés que se reinvierte automáticamente al año siguiente. Escribe la sucesión a_n que te da el valor al cabo de n años. Determina los primeros 3 términos de la sucesión a_n. ¿Converge o diverge? ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que dupliques tu capital?

5) Calcula $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 2^n}{16^n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+5}}{3^{n+3}}$

6) Se inyecta a un paciente 10 unidades de un cierto medicamento cada 24 horas. El medicamente se elimina exponencialmente quedando después de t días una fracción de $f(t) = e^{-t/5}$ por unidad de medicamento. Si se continúa el tratamiento por tiempo indefinido, halla cuántas unidades de medicamento quedarán en el cuerpo del paciente a largo plazo.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA. GRUPO D. PRÁCTICA 4

NOMBRE Y APELLIDOS:

1) ¿Es la serie $\displaystyle\sum_{n=20}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ convergente o divergente?

2) ¿Es la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a^n n^a$ convergente o divergente? $a > 0$ es una constante.

3) ¿Es la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$ convergente? ¿Y converge absolutamente?

.

4) a) Demuestra, usando la definición de límite (es decir la condición $\epsilon - \delta$) que $\lim_{x \to 2} 3x + 5 = 11$.

b) Encuentra un $\delta > 0$ de modo que si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}$.

5) Considera la función $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x}$. Indica cual es su dominio, y los límites (o límites laterales) relevantes para representar la gráfica de la función.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA. GRUPO D. PRÁCTICA 5

NOMBRE Y APELLIDOS:

1) De la siguiente función calcula su dominio y los límites (o límites laterales) relevantes para representar su gráfica: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x+1}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2) Estudia si la siguiente función es continua en $x = 0$: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3) Para cada una de las siguientes funciones f polinómicas encuentra un entero $m \in \mathbb{Z}$ de modo que la ecuación $f(x) = 0$ tenga una solución en $[m, m+1]$.
a) $f(x) = x^3 - x + 3$ b) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$
c) $f(x) = x^5 + x + 1$ d) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

4) Sabemos que toda función continua en un intervalo $[a, b]$ tiene máximo y mínimo. Haz un dibujo de la función $h(x) = \dfrac{x}{2} + |x|$ en $[-2, 2]$ e indica cual es el $\max_{[-2,2]} h$ y $\min_{[-2,2]} h$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA. GRUPO D. PRÁCTICA 6

NOMBRE Y APELLIDOS:

1) Considera la funciones $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Calcula la derivada $f'(x)$ para $x \neq 0$. ¿Existe $f'(0)$? *Indicación: para calcular $f'(0)$ tienes que usar la definición de derivada.*

2) **Deduce** las derivadas de las funciones $\tan x$, $\operatorname{cotan} x$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ y $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$.

3) Utiliza las reglas de derivación para calcular f' en función de g' en los siguientes casos:
a) $f(x) = g(x + g(a))$ b) $f(x) = g(xg(a))$ c) $f(x) = g(xg(x))$
d) $f(x) = g(x)(x - a)$ e) $f(x) = g(a)(x - a)$ f) $f(x + 3) = g(x^2)$.
Indicación: por ejemplo, para b) por la regla de la cadena $f'(x) = g(a)g'(xg(a))$.

4) a) Halla la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \ln(\ln x)$ en el punto $x = e^2$. *Indicación: recuerda que la recta tangente en un punto* x_0 *tiene ecuación* $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

b) Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de la parábola $y = x^2 - x$. Al desconectar el cohete, viajará a lo largo de la tangente a la curva por el punto de desconexión. ¿En que punto deberá parar el motor para alcanzar el punto $(3, 2)$? *Indicación: escribe la ecuación de la recta tangente a la curva que pasa por el punto* (x_0, y_0) *siendo* $y_0 = x_0^2 - x_0$. *Halla* x_0 *para que esta recta tangente pase por* $(3, 2)$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA. GRUPO D. PRÁCTICA 7

NOMBRE Y APELLIDOS:

1) **4.9.** Empareja cada una de las gráficas (a-e) con la de su derivada (i-v). Explica tu razonamiento.

2) En un rectángulo de 4m de perímetro se sustituyen cada lado por semicircunferencias exteriores. ¿Entre que valores está comprendida el área de esta nueva figura?

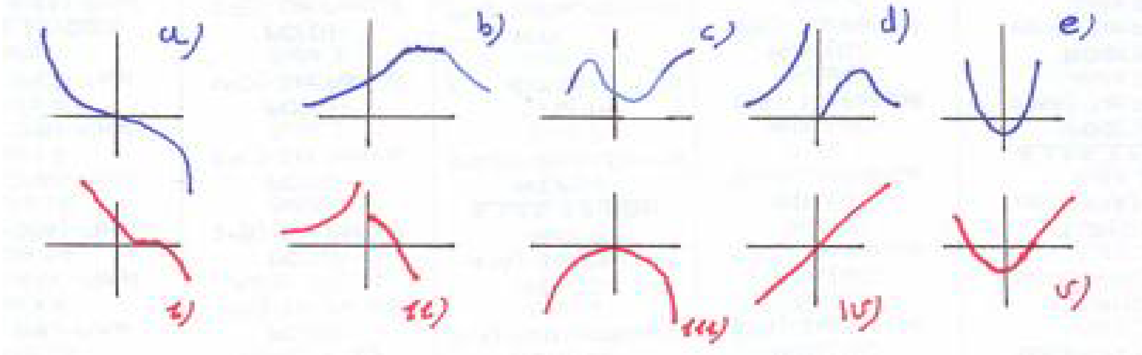
3) Sea $f(x) = |4x - 3| - x^2$. Determina los valores máximo y mínimo que alcanza la función f en el intervalo $[-3, 3]$. ¿Existe $x_0 \in [0, \frac{2}{3}]$ para el cuál $f(x_0) = 0$?

4) Encuentra una estimación del error máximo que se puede cometer al tomar $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ en vez de $\ln(1 + x)$ para $x \in [-0.2, 0.2]$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA. GRUPO D. PRÁCTICA 7

NOMBRE Y APELLIDOS:

1) **4.9.** Empareja cada una de las gráficas (a-e) con la de su derivada (i-v). Explica tu razonamiento.



2) En un rectángulo de 4m de perímetro se sustituyen cada lado por semicircunferencias exteriores. ¿Entre que valores está comprendida el área de esta nueva figura?

3) Sea $f(x) = |4x - 3| - x^2$. Determina los valores máximos y mínimos que alcanza la función f en el intervalo $[-3, 3]$. ¿Existe $x_0 \in [0, \frac{2}{3}]$ para el cuál $f(x_0) = 0$?

4) Encuentra una estimación del error máximo que se puede cometer al tomar $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ en vez de $\ln(1 + x)$ para $x \in [-0.2, 0.2]$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA. GRUPO D. PRÁCTICA 8

NOMBRE Y APELLIDOS:

1) Estudia el crecimiento, concavidad y convexidad de la función $\dfrac{\ln x}{x}$ en $(0, \infty)$. ¿Qué es mayor: e^π ó π^e?

2) Calcula los siguientes límites por la regla de L'Hôpital:

2.a) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - \sqrt{x}}$

2.b) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x$

2.c) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} (e^x + x)^{1/x}$

2.d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}$

3) Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 2x-1 & \text{si } x \in [1,2] \\ 3x-3 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$ y calcula $\int_0^3 f$ basándote en la intepretación de la integral como el área de una determinada región del plano.

4) Encuentra una estimación del error máximo que se puede cometer al tomar $e(1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!})$ en lugar de e^x si $x \in [0.8\,,1.2]$. *Indicación: Obtén el polinomio de Taylor de orden 3 y resto de Taylor de la función exponencial e^x en $x_0 = 1$ y acota el valor absoluto del resto.*

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA. GRUPO D. PRÁCTICA 9

NOMBRE Y APELLIDOS:

1) Utiliza sumas de Riemann para expresar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}(k+n)(k-n)\right)$ como la integral de una determinada función. Calcula después la integral de esa función por la regla de Barrow.

2) Cuatro estudiantes de ingeniería informática, de software y de computadores no se ponen de acuerdo sobre el valor de la integral $\int_0^\pi \sin^8 x\,dx$. Antonio dice que vale π, Beatriz que es igual a $\frac{35\pi}{128}$; Carlos dice que vale $\frac{3\pi}{90}-1$ mientras que Diana dice que es $\frac{\pi}{2}$. Uno de los cuatro está en lo cierto. ¿Quién es? (No intentes calcular la integral; elimina las respuestas que creas erróneas).

3) Calcula F' y F'' para la función $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln(x+1)} e^{t^2} dt$ y $x > -1$ e indica los intervalos de crecimiento, decrecimiento, convexidad y concavidad.

4) Calcula el área del recinto limitado entre las gráficas de $y = \frac{x^2}{3}$ e $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA. GRUPO D. PRÁCTICA 10

NOMBRE Y APELLIDOS:

1) Utiliza integración por partes para obtener $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$.

2) Mediante un cambio de variable, obtén $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx$.

3) Mediante un cambio de varible, obtén $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} dx$.

4) Calcula la siguiente primitiva utilizando una identidad trigonométrica “adecuada”: $\int \sin^2 x dx$.

5) Calcula la siguiente primitiva $\int \frac{1}{x(x+2)}\, dx$.

6) Calcula la siguiente primitiva $\int \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}\, dx$.