Teoria de la Medida. Grupo A
Hoja 1 (2005)

1. Demuestra que la σ-álgebra de Borel $B(\mathbb{R})$ está generada por la familia de los conjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

2. ¿Coincide con la σ-álgebra de Borel $B(\mathbb{R})$ la engendrada por los intervalos abiertos de extremos racionales?

3. Demostrar con un ejemplo que la unión de una familia de σ-álgebras en un conjunto X puede no ser una σ-álgebra en X. (Hay ejemplos en los que el conjunto X es finito)

4. **(i)** Demuestra que Q es un F_σ pero no un G_δ en $\mathbb{R}$.Indicación: Usar el Teorema de Categoría de Baire:

Teorema de Categoría de Baire. *Sea X un espacio métrico completo no vacío (o un espacio topológico no vacío que puede ser metrizado con una métrica completa). Si $\{G_n\}$ es una sucesión de conjuntos abiertos y densos en X, entonces $\cap_n G_n$ es denso en X. Equivalentemente, si $\{F_n\}$ es una sucesión de conjunto cerrados de X, cada uno con interior vacío, entonces $\cup_n F_n$ tiene interior vacío.*

(ii) Encuentra un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no sea ni un F_σ ni un G_δ.

5. Sea X un conjunto infinito. Sobre $P(X)$ definimos $\mu(E) = 0$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E es infinito. ¿Es μ una medida?

6. Si X es un conjunto no numerable, sea $\mathcal{A}$ la colección de todos los subconjuntos $A \subset X$ tales que A ó $X \setminus A$ es numerable y definamos $\nu(A) = 0$ si A es numerable y $\nu(A) = 1$ en caso contrario. Demuestrese que $(X, \mathcal{A}, \nu)$ es un espacio de medida.

7. Definamos μ en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ de la forma siguiente: $\mu(A)$ es la cantidad de números racionales en A (por supuesto, $\mu(A) = +\infty$ si hay infinitos números racionales en A). Demostrar que μ es una medida σ-finita para la que cualquier abierto no vacío en $\mathbb{R}$ tiene medida infinita.

8. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible.

1. Demostrar que si (μ_n) es una sucesión creciente de medidas en $(X, \mathcal{A})$ ("creciente" significa que $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada n), entonces $\mu(A) = \lim_n \mu_n(A)$ define una medida en $(X, \mathcal{A})$.
2. Demuestra que si (μ_n) es una sucesión arbitraria de medidas en $(X, \mathcal{A})$, entonces $\mu(A) = \sum_n \mu_n(A)$ define una medida en $(X, \mathcal{A})$.

9. Sea (x_n) una sucesión de números reales y definamos una medida μ en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ por $\mu = \sum_n \delta_{x_n}$.

1. Demuestra que μ asigna valores finitos a los subintervalos acotados de $\mathbb{R}$ si y sólo si $\lim_n |x_n| = +\infty$.
2. ¿Para qué sucesiones (x_n) es la medida μ σ-finita?

Problemas Adicionales

10. Si μ es una medida en $(X, \mathcal{A})$ y $A \in \mathcal{A}$ es un conjunto fijo de X, probar que la función $\nu(B) = \mu(B \cap A)$ es una medida en $(X, \mathcal{A})$.

11. (Continuación del 8).(iii) Dar un ejemplo de una sucesión de medidas $\{\mu_n\}$ tal que $\mu = \text{lím}_n \mu_n$ no sea una medida.

Teoria de la Medida. Grupo A
Hoja 2 (2005)

1. Determinar los conjuntos μ_i^*-medibles ($i = 1, 2$) para las medidas exteriores μ_i^* definidas en $P(\mathbb{R})$ de la siguiente forma

$$\mu_1^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es vacío} \\ 1 & \text{si } A \text{ es no vacío} \end{cases}$$

$$\mu_2^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es contable} \\ 1 & \text{si } A \text{ es incontable} \end{cases}$$

2. Definimos funciones μ_i^* (i=1,2,3,4) en $P(\mathbb{R})$ de la siguiente forma

$$\mu_1^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es vacío} \\ \infty & \text{si } A \text{ es no vacío} \end{cases}$$

$$\mu_2^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es acotado} \\ 1 & \text{si } A \text{ es no acotado} \end{cases}$$

$$\mu_3^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es vacio} \\ 1 & \text{si } A \text{ es no vacío y acotado} \\ \infty & \text{si } A \text{ es no acotado} \end{cases}$$

$$\mu_4^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es contable} \\ \infty & \text{si } A \text{ es incontable} \end{cases}$$

1. ¿Cuales de las anteriores funciones son medidas exteriores en $\mathbb{R}$?
2. Si μ_i^* es una medida exterior, determinar los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son μ_i^*-medibles.

3. Llamamos *Contenido exterior de Jordan* de un conjunto $A \subset [0, 1]$ a

$$\gamma^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{k} (b_n - a_n) : \; A \subset \cup_{n=1}^{k} (a_n, b_n), \;\; k \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) Averiguese si el contenido exterior γ^* es una medida exterior sobre $[0, 1]$.
(b) ¿Es γ^* una medida finitamente aditiva en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$?

4. Demostrar que si una medida exterior es finitamente aditiva, entonces es una medida.

5. Demostrar usando la definición que la medida exterior de Lebesgue de un conjunto numerable es cero. Deducir por tanto que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

6. Demostrar que un subconjunto B de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue si y sólo si

$$\lambda^*(I) = \lambda^*(I \cap B) + \lambda^*(I \cap B^c),$$

para todo subintervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

7. Probar que con la medida de Lebesgue, las rectas tienen medida nula en $\mathbb{R}^2$. (En general, se puede demostrar que en $\mathbb{R}^n$ cualquier subconjunto de un subespacio de dimensión $n-1$ tiene medida de Lebesgue nula en $\mathbb{R}^n$).

8.
1. Demostrar que para todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ existe un subconjunto boreliano $B \subset \mathbb{R}^n$ que incluye a A y tal que $\lambda^*(A) = \lambda(B)$.
2. Deducir que si B es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ medible Lebesgue, existe un boreliano G que incluye a B y tal que $N = G \setminus B$ tiene medida (de Lebesgue) nula.
3. Concluir que todo conjunto medible Lebesgue es unión de un boreliano y de un conjunto de medida (de Lebesgue) nula. (Indicación: Si B es medible Lebesgue, su complementario también lo es. Así, existe un boreliano G que incluye a B^c tal que $N = G \setminus B^c$ tiene medida de Lebesgue nula).

9. Sea λ^* la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$, y sea $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección $\pi(x, y) = x$. Definimos la función

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0, \infty], \quad \mu^*(A) = \lambda^*(\pi(A)).$$

1. Demuestra que μ^* es una medida exterior en $\mathbb{R}^2$.
2. Demuestra que un subconjunto B de $\mathbb{R}^2$ es μ^*-medible si y solo si existen conjunto medibles Lebesgue B_0 y B_1 en $\mathbb{R}$ tales que $B_0 \subset B_1$, $\lambda(B_1 \setminus B_0) = 0$ y $B_0 \times \mathbb{R} \subset B \subset B_1 \times \mathbb{R}$.

10. Sea $[0, 1] = \cup_n A_n$, dónde cada A_i es medible Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\sum_n \lambda(A_n) < \infty$. Demostrar que el conjunto de los puntos que estan a lo mas en una cantidad finita de conjuntos A_n tiene medida 1.

11. Consideremos el conjunto E no medible Lebesgue construido en $(0, 1)$. Demostrar que todo subconjunto A de E que sea medible Lebesgue tiene medida cero. (Indicación: considerar los conjuntos disjuntos $B_n = r_n + A$, siendo $\{r_n\}_n$ una numeración de los puntos racionales de $(0, 1)$. Entonces, cada B_n es medible Lebesgue y $\lambda([0, 2]) \geq \lambda(\cup_n B_n) = \sum_n \lambda(B_n)$)

12. Demostrar que si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ con medida exterior de Lebesgue positiva, entonces A contiene un subconjunto no medible Lebesgue. (Indicación: Suponer primero que A está incluido en $(0, 1)$. Considerar $A_n = A \cap E_n$, dónde (E_n) es la familia de conjuntos considerados en la demostración de la existencia de un conjunto no medible Lebesgue. Si cada A_n es medible Lebesgue, por el ejercicio anterior $\lambda(A_n) = 0$. Por otra parte se tiene la desigualdad $0 < \lambda^*(A) \leq \sum_n \lambda^*(A_n) = \sum_n \lambda(A_n)$).

Problemas Adicionales

13. Si para $A \subset \mathbb{R}$ se define $\mu^*(A) = 0$ si A es de primera categoría y $\mu^*(A) = 1$ si A es de segunda categoría, demuestrese que μ^* es medida exterior sobre $\mathbb{R}$ y determínense sus conjuntos μ^*-medibles.

Observación. Decimos que un conjunto $A \subset X$, siendo X un espacio métrico (X, d), es de primera categoría si $A = \cup_n A_n$, donde el interior de $\overline{A}_n = \emptyset$ para todo n. Decimos que un conjunto es de segunda categoría si no es de primera categoría.

14. Algunas medidas exteriores surgen al tratar de prolongar a una medida una función de conjunto $\beta : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ definida sobre una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X (llamados *conjuntos elementales*) con la propiedad de que $\emptyset$ es un conjunto elemental y $\beta(\emptyset) = 0$. Decimos entonces que β es una función elemental de conjunto. Probar que dada la función elemental de conjunto β sobre $\mathcal{F}$, por medio de

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_n \beta(A_n) : \ A \subset \cup_n A_n\,,\ A_n \in \mathcal{F} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$

es una medida exterior en X.

15. Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. ¿ Queda la medida μ definida por su valor sobre cualquier familia $\mathcal{F}$ que genere la σ-algebra A? ¿ Queda la medida μ definida por su valor sobre cualquier familia $\mathcal{F}$ que genere la σ-algebra A si además $\mathcal{F}$ verifica que para todo $A \in \mathcal{F}$, necesariamente $A^c \in \mathcal{F}$?

Teoria de la Medida. Grupo A
Hoja 3 (2005)

1. Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, no decreciente, continua por la derecha y tal que $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Sea μ la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F. Demostrar que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $\mu((-\infty, a)) = F(a^-)$, $\mu((a,b)) = F(b^-) - F(a)$, $\mu([a,b]) = F(b) - F(a^-)$ y $\mu([a,b)) = F(b^-) - F(a^-)$.

2. (i) ¿Pueden existir medidas distintas μ y ν en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ acotadas en los acotados tales que $\mu((a,b]) = \nu((a,b])$ para todos a, b en $\mathbb{R}$? Indicación: considerar, en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, para cualquier $N \in \mathbb{N}$, las dos medidas finitas $\mu_N(A) = \mu(A \cap (-N, N])$ y $\nu_N(A) = \nu(A \cap (-N, N])$.
¿Y si no suponemos que μ y ν sean acotadas en los acotados?
(ii) Encontrar la expresión general de una función de distribución F asociada a una medida μ definida en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ y acotada en los acotados, es decir, encontrar una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ creciente, continua por la derecha tal que $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.
(iii) Consideremos en particular la medida μ definida en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ como $\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$, donde $\delta_n(A) = 0$ si $n \notin A$, $\delta_n(A) = 1$ si $n \in A$. Hallar una función de distribución asociada a μ.

3. ¿Existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ no medibles Lebesgue tales que sí son medibles Lebesgue considerados como subconjuntos de $\mathbb{R}^2$?

4. Demuestra que si A es un subconjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$, entonces el conjunto $A \times \mathbb{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$ es un subconjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

5. Probar que si una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitziana entonces transforma conjuntos de medida (de Lebesgue) nula en conjuntos de medida (de Lebesgue) nula.

6. Sea f la función singular de Cantor, y sea μ la medida en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ asociada a la función de distribución

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ f(x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1. Demuestra que la medida de cada uno de los 2^n intervalos disjuntos que forman C_n (el conjunto que se construye en el paso n de la construcción del conjunto de Cantor) es $1/2^n$.
2. Deducir que el conjunto de Cantor tiene μ-medida 1.
3. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$.
   Es decir, toda la masa de μ está concentrada en un conjunto de medida de Lebesgue 0 (el conjunto de Cantor), pero μ no es una suma de medidas de “masa puntual” δ_x.
4. Demostrar que dos funciones continuas $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son iguales en μ-casi todo punto si y sólo si son iguales en el conjunto de Cantor.

7. 1. ¿Es la composición de funciones medibles Borel también medible Borel?

2. Consideremos $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, $A \in \mathcal{A}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $\mathcal{A}$-medible. Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible Borel ¿Es la composición $g \circ f$ $\mathcal{A}$-medible?
3. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible Lebesgue y $B \in \mathcal{M}_\lambda$, ¿es $f^{-1}(B)$ también medible Lebesgue?

8. (i) Demostrar que si h es medible Lebesgue y f es continua, entonces $f \circ h$ es medible Lebesgue.
(ii) Demostrar que la composición de funciones medibles Lebesgue no es en general medible Lebesgue (Indicación: Considerar la función $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ definida a través de la función singular de Cantor f como $g(y) = \text{ínf}\{x \in [0, 1] : f(x) = y\}$ para $y \in [0, 1]$ (visto ya en clase) y la función característica $h = \chi_B$ siendo B un subconjunto no boreliano del conjunto de Cantor que vimos en clase. Comprobar que la composición $h \circ g$ no es medible Lebesgue.)

9. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Probar que f' es medible Borel.

10. Probar que una función supremo de una familia no numerable de funciones medibles Borel (Lebesgue) puede no ser medible Borel (Lebesgue, respectivamente).

11. Construir una función f no medible Borel (Lebesgue) tal que $|f|$ sí lo sea.

12. Sea X un conjunto y $\{A_n\}$ una familia numerable de subconjuntos de X. Demostrar que si llamamos $B = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$ y $C = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$, entonces

$$\liminf_k \chi_{A_k} = \chi_B \quad \text{y} \quad \limsup_k \chi_{A_k} = \chi_C$$

13. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y definimos μ en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ por $\mu = \sum_n \delta_{x_n}$. Demostrar que dos funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son iguales en μ-casi todo punto si y sólo si $f(x_n) = g(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

14. Sean f y g funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que si $f = g$ en λ-casi todo punto (λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$), entonces $f = g$ en todo punto de $\mathbb{R}$.

15. Consideremos un espacio de medida $(X\mathcal{A}, \mu)$ y $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ medible. Demostrar que $\nu(A) := \int_A f \, d\mu$, definido para cada $A \in \mathcal{A}$, es una medida en $(X\mathcal{A})$. ¿Cuando es una medida finita?

16. Demostrar que el conjunto de puntos de $[0, 1]$ cuya expresión decimal no contiene el número 5 tiene medida (de Lebesgue) 0.

Teoria de la Medida. Grupo A
Hoja 4 (2005)

1. Encontrar una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ no medible Lebesgue tal que para cualquier $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in [0,1] : \ f(x) = c\}$ sea medible Lebesgue.

2. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, f y g funciones en

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \quad f \text{ es } \mathcal{A}\text{-medible y } \mu\text{-integrable}\}.$$

Demostrar que $f \vee g$ y $f \wedge g$ están también en $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$.

3. Dar un ejemplo de funciones medibles Borel $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sean integrables Lebesgue tales que el producto fg no sea integrable Lebesgue.

4. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\sum_n \int |f_n| \, d\mu < \infty$. Demostrar que entonces la serie $\sum_n f_n(x)$ converge en casi todo punto a una función f integrable. Demostrar además que $\int f \, d\mu = \sum_n \int f_n \, d\mu$.

5. Sea el espacio de medida $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$, donde μ es la medida de contar. Demostrar que una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable con respecto a esta medida si y sólo si la serie $\sum_n f(n)$ es absolutamente convergente, en cuyo caso $\int f \, d\mu = \sum_n f(n)$.

6. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Prueba que una función integrable $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ que cumpla $\int_E f \, d\mu = 0$ para todo $E \in \mathcal{A}$, es necesariamente cero en casi todo punto.

7. Da ejemplos de sucesiones de funciones (f_n), (g_n) y (h_n) en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda, \mathbb{R})$ que convergan a cero en casi todo punto y que cumplan alguna de las condiciones:
1. $\lim_n \int f_n \, d\lambda = \infty$,
2. $\lim_n \int g_n \, d\lambda = 1$,
3. $\limsup_n \int h_n \, d\lambda = 1$ y $\liminf_n \int h_n \, d\lambda = -1$.

8. Sea una función $f : [0,1] \longrightarrow [0, \infty]$ integrable Lebesgue tal que $\int_{[0,1]} f(x)^n \, d\lambda = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que existe $E \subset [0,1]$ tal que $f = \chi_E$ en casi todo punto. Indicación: Considera los conjuntos $A = \{x \in [0,1] : \ 0 < f(x) < 1\}$, $B = \{x \in [0,1] : \ f(x) = 1\}$ y $C = \{x \in [0,1] : \ f(x) > 1\}$. Entonces $\int_{[0,1]} f(x)^n \, d\lambda = \int_A f(x)^n \, d\lambda + \int_B f(x)^n \, d\lambda + \int_C f(x)^n \, d\lambda = \int_A f(x)^n \, d\lambda + \lambda(B) + \int_C f(x)^n \, d\lambda$. Calcular $\lim_n \int_A f(x)^n \, d\lambda$ y $\lim_n \int_C f(x)^n \, d\lambda$.

9. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ una función integrable. Comprueba que entonces $|f|^{1/n}$ es integrable para todo $n \in \mathbb{N}$ y calcula $\lim_n \int |f|^{1/n} \, d\mu$. Indicación: Considera $A = \{x \in X : \ 0 < |f(x)| \leq 1\}$ y $B = \{x \in X : \ 1 < |f(x)| < \infty\}$. Entonces $\int |f|^{1/n} \, d\mu = \int_A |f|^{1/n} \, d\mu + \int_B |f|^{1/n} \, d\mu$. Calcular $\lim_n \int_A |f|^{1/n} \, d\mu$ y $\lim_n \int_B |f|^{1/n} \, d\mu$.

10. Probar que si una función uniformemente continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable Lebesgue entonces $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$.

11. Probar que el Teorema de la Convergencia Monótona es válido si cambiamos la hipótesis de que las funciones f_1, $f_2, \ldots$ son no-negativas por la hipótesis de que f_1 es integrable. (Observese que, con estas hipótesis las integrales de las funciones f_n y f existen, y pueden ser ∞) Indicación: considera las sucesiones de funciones $\{f_n^+\}$ y $\{f_n^-\}$ y aplicar sobre estas los resultados conocidos sobre intercambios del límite con la integral.

12. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Usar el anterior ejercicio para demostrar que si (f_n) es una sucesión decreciente de funciones medibles y si f_1 es integrable, entonces $\int \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$.

13. Demostrar que si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda, \mathbb{R})$, entonces
$$\int f\, d\lambda = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_{[a,b]} f\, d\lambda.$$

14. ¿Es una función integrable Riemann $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ necesariamente medible Borel? (Indicación: considera la funcion característica χ_B para un adecuado conjunto B).

15. ¿Es la función característica χ_C, donde C es el conjunto de Cantor, integrable Riemann en $[0, 1]$? ¿Y la función característica χ_{C_α}, donde C_α es el conjunto de Cantor generalizado para $0 < \alpha < 1$?

16. Demuestra que existe una sucesión decreciente de funciones continuas $f_n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ tales que $\lim_n f_n$ no es integrable Riemann. (Indicación: Considerar un conjunto de Cantor generalizado C_α y elegir una sucesión $\{f_n\}$ cuyo límite sea χ_{C_α})

17. Calcúlense los límites,
$$\lim_n \int_o^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{\alpha x}\, d\lambda(x), \quad \lim_n \int_o^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{-\alpha x}\, d\lambda(x).$$
Indicación: Para el primero puedes usar que la función $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ es creciente. Para el segundo, para $\alpha > -1$ utiliza el lema de Fatou, y para $\alpha \le -1$ la desigualdad $1 + y \le e^y$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

18. Utilizar el Teorema de la convergencia dominada para hallar
$$\lim_n \int_o^\infty \frac{1}{x^{1/n}\,(1 + x/n)^n}\, d\lambda \quad \text{y} \quad \lim_n \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\frac{x}{n}\, d\lambda.$$
Indicación: Puedes utilizar de nuevo la indicación del anterior ejercicio o la desigualdad $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \cdots \ge 1 + x + \frac{n(n-1)}{2}\frac{x^2}{n^2} = 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2} \ge \frac{1}{4}x^2$ para todo $n \ge 2$ y $x \ge 0$.

19. Demostrar que no existe ninguna serie trigonométrica del tipo
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))$$
tal que $\sum_n (|a_n| + |b_n|) < \infty$ y que sobre $[-\pi, \pi]$ sea convergente en λ-casi todo punto hacia 1. (λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$). Indicación: comprueba que la anterior serie es absolutamente convergente para todo x y la función que define la serie es integrable Lebesgue. Calcula su integral.

20. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, y sean $A, A_1, A_2, ...$ conjuntos que pertenen a $\mathcal{A}$. Demostrar que

1. $\{\chi_{A_n}\}$ converge a cero en medida si y sólo si $\lim_n \mu(A_n) = 0$,
2. $\{\chi_{A_n}\}$ converge a cero en casi todo punto si y sólo si $\mu(\cap_{n=1}^\infty \cup_{k=n}^\infty A_k) = 0$,
3. $\{\chi_{A_n}\}$ converge a χ_A en casi todo punto si y sólo si los conjuntos $\cap_{n=1}^\infty(\cup_{k=n}^\infty A_k)$, $\cup_{n=1}^\infty(\cap_{k=n}^\infty A_k)$ y A difieren sólo en conjuntos μ-nulos.

Indicación: Puede ser útil el problema 12 de la hoja anterior: Recordemos que $\liminf_k \chi_{A_k} = \chi_B$ y $\limsup_k \chi_{A_k} = \chi_C$ siendo $B = \cup_{n=1}^\infty \cap_{k=n}^\infty A_k$ y $C = \cap_{n=1}^\infty \cup_{k=n}^\infty A_k$.

21. Sea μ la medida de contar en la σ-álgebra de todos los subconjuntos de $\mathbb{Z}$, y sean $f, f_1, f_2, ...$ funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que $\{f_n\}$ converge a f en medida si y sólo si $\{f_n\}$ converge a f uniformemente.

Teoria de la Medida
Hoja 5 (2005)

1. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ funciones en $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Demostrar que si (f_n) converge a f en media de forma tan rápida que $\sum_n \int |f_n - f| d\mu < \infty$, entonces (f_n) converge a f en μ-casi todo punto.

2. Sean las funciones $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$. Comprueba que

$$\sum_n \int_0^\infty f_n \, d\lambda \neq \int_0^\infty \big(\sum_n f_n\big) \, d\lambda.$$

3. Comprobar que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n-1,n)}$ no es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$ pero existe la integral impropia de f en $[0, \infty)$.

4. Prueba que

$$\text{(i)} \ \lim_n \int_0^\pi \frac{\sin nx}{nx} \, dx = 0, \qquad \text{(ii)} \ \lim_n \int_0^\infty \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2x^2} \, dx = 0.$$

Indicación: Para el segundo límite, busca una acotación de la sucesión de funciones en $[0, 1]$ y otra acotación en $[1, \infty)$.

5. Demuestra, usando el Teorema de la convergencia dominada que

$$\lim_n \int_a^n \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1 + x^2} \, dx = 0$$

para todo $a > 0$, pero que sin embargo no es cierto para $a = 0$.
Indicación: Para $a = 0$, no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. No calcular la integral de las f_n, sino acotar inferiormente f_n por otra función (no negativa) cuya integral sea más sencilla de calcular.

6. Demuestra que si $p > -1$ entonces

$$\int_0^1 \frac{(-\log x)\, x^p}{1 - x} \, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(p + n)^2}.$$

Indicación: $\sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$, si $0 < x < 1$.

7. Comprueba los siguientes cálculos:

(i) $\displaystyle \lim_n \int_0^1 \frac{n \sin \frac{x^2}{n}}{x^2} \, dx = 1.$

(ii) $\displaystyle \int_0^1 e^{x^2} \, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!(2n + 1)}.$

(iii) $\displaystyle \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n+1} e^{2x^2} \, dx = \frac{e - 1}{2}.$

Indicación: Para (ii) y (iii), recuerda que $e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$.

8. En los siguientes casos comprueba que φ está bien definida y calcula su valor derivando respecto del parámetro t:

(i) $\displaystyle \varphi(t) = \int_0^\pi \frac{e^{xt}}{x} \sin x \, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$

Indicación: Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, aplicar el teorema de derivación bajo el signo integral a la función $f : [0, \pi] \times [-n, n] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, t) = \frac{e^{xt}}{x} \sin x$.

(ii) $\varphi(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\log x}\, dx, \qquad t > -1.$

Indicación: Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, aplicar el teorema de derivación bajo el signo integral a la función $f : [0,1] \times [-1 + \frac{1}{n}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,t) = \frac{x^t - 1}{\log x}$.

(iii) $\varphi(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}(1 - \cos tx)}{x}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$

(iv) $\varphi(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{x}\, dx, \quad t > 0.$

Indicación: Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, aplicar el teorema de derivación bajo el signo integral a la función $f : (0,\infty) \times [\frac{1}{n}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,t) = \frac{e^{-tx}}{x}$.

(v) $\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad t > 0.$

Indicación: para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, considera la función $f : (0,\infty) \times [\frac{1}{n}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,t) = e^{-tx} \frac{\sin x}{x}$ y aplica el teorema de derivación bajo el signo integral a f.

(vi) $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(tx)\, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$

9. Probar que en un espacio de medida *finita* $(X, \mathcal{A}, \mu)$,

(i) una sucesión de funciones $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ converge en medida a $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo f_n y f $\mathcal{A}$-medibles, si y sólo si cada subsucesión de $\{f_n\}_n$ tiene una subsucesión que converge a f en casi todo punto.

(ii) si $\{f_n\}_n$ converge en medida a f y $\{g_n\}_n$ converge en medida a g, siendo f_n, g_n y f, g $\mathcal{A}$-medibles, entonces $\{f_n g_n\}_n$ converge en medida a fg.

(iii) Comprobar que en el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda)$, las sucesiones de funciones $f_n(x) = x$ y $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{\mathbb{R}}$ convergen en medida a $f(x) = x$ y $g = 0$, respectivamente, pero $f_n g_n$ no converge en medida al producto fg. (De lo que se deduce, que la condición de medida finita es necesaria en los anteriores apartados).

10. Consideramos $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y una sucesión de funciones $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que converge en medida a $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo f_n y f $\mathcal{A}$-medibles. Probar que el límite es único en casi todo punto.

11. Estudiar los diferentes tipos de convergencia en $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda)$ para las sucesiones de funciones

(a) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\chi_{[0,n]}(x)$,

(b) $g_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1/n]}(x)$,

(c) $h_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h_n(x) = \frac{1}{x}\chi_{[0,1/n]}(x)$,

(d) $r_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $r_n(x) = ne^{-nx}$.

12. Consideramos $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f_n, $f : X \longrightarrow [0,\infty)$ funciones medibles tales que f_n converge a f en medida. Probar que

$$\int f\, d\mu \leq \liminf_n \int f_n\, d\mu.$$

Indicación: Suponer, por reducción al absurdo, que se tiene la desigualdad contraria. Entonces, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_k$ tal que

$$\lim_k \int f_{n_k}\, d\mu = \liminf_n \int f_n\, d\mu < \int f\, d\mu.$$

Además, $\{f_{n_k}\}_k$ converge en medida a f, y por tanto, tiene una subsucesión convergente a f en c.t.p.

TEORIA DE LA MEDIDA
HOJA 6 (2005)

1. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos y $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Demuestra que si para μ-casi todo $x \in X$, $\nu(E_x) = 0$, entonces para ν-casi todo $y \in Y$ se verifica que $\mu(E^y) = 0$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \text{ y } \quad x \leq y < x+1 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \text{ y } \quad x+1 \leq y < x+2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostrar que $\int \int f(x,y)\, dy\, dx \neq \int \int f(x,y)\, dx\, dy$. ¿Porqué esto no contradice el Teorema de Fubini?

3. Estudia si la siguiente función es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \frac{e^{-x}(1 - \cos(xy))}{y^2}\, \chi_{(0,\infty)\times(0,\infty)}.$$

4. En los siguientes ejemplos estudia si f es integrable Lebesgue en E, y cuando lo sea calcula $\int_E f\, d\lambda$.

1. $f(x,y) = (1 + x^2 + y^2)^{-1}$, $E = \mathbb{R}^2$.
2. $f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$, $E = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.
3. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, $E = \{(x,y) : y \leq x\}$.
4. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)\log^2(x+y)}$, $E = \{(x,y) : 0 < y < 1 < x+y\}$.
5. $f(x,y,z) = \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, $E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

5. Aplica el Teorema de Fubini a la función $f(x,y) = e^{-y}\sin(2xy)$ en el recinto $[0,1] \times [0,\infty)$, para demostrar que

$$\int_0^\infty e^{-y}\, \frac{\sin^2 y}{y}\, dy = \frac{1}{4}\log 5.$$

6. Sea $f(x,y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\chi_A(x,y)$, siendo $A = (0,\infty)^2$. Calcula $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy$, y deduce que

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

7. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Si $f : X \longrightarrow [0,\infty]$ es $\mathcal{A}$-medible, usar el Teorema de Fubini para demostrar que

$$\int_X f\, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f(x) \geq t\})\, dt.$$

Indicación: Considerar el conjunto $E = \{(x,r) : x \in X,\ r \in [0,\infty),\ f(x) \geq r\} \subset X \times \mathbb{R}$. Comprobar que $E \in \mathcal{A} \times B(\mathbb{R})$. ¿Cuanto vale $(\mu \times \lambda)(E)$?

8. (a) Demostrar, utilizando el Teorema de Fubini, que si $\{a_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión doble de números reales no-negativos, entonces $\sum_n \sum_m a_{n,m} = \sum_m \sum_n a_{n,m}$. Definimos para una sucesión $\{a_{n,m}\}$ de números no negativos, la serie doble $\sum_{n,m} a_{n,m} \equiv \sum_n \sum_m a_{n,m} = \sum_m \sum_n a_{n,m}$. Indicación: Considerese el espacio de medida $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$, donde μ es la medida de contar en $P(\mathbb{N})$ (espacio de medida σ-finito) y calcúlese la integral doble de la función $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(n,m) = a_{n,m}$

(b) Deduce que si $\sum_{n,m} |a_{n,m}| < \infty$ entonces $\sum_n \sum_m a_{n,m} = \sum_m \sum_n a_{n,m}$.

9. Consideremos $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de Lispchitz, con constante de Lipschitz K (es decir $||g(x) - g(x')|| \leq K||x - x'||$, para todo $x, x' \in A$).

(a) Demostrar que si $C \subset A$ es un cubo n-dimensional de lado r, es decir, C es de la forma $I_1 \times \cdots \times I_n$, I_i intervalo y longitud$(I_1) = \cdots =$longitud $(I_n) = r$, entonces $g(C)$ está incluido en un cubo n-dimensional de lado $\sqrt{n}\, K\, r$. Indicación: Si a es el centro de C, acota $||g(x) - g(a)||_\infty$, para $x \in C$.

(b) Demostrar que si U es un abierto de A con $\lambda_n(U) < \infty$, entonces $\lambda_n^*(g(U)) \leq K^n\, n^{n/2}\, \lambda_n(U)$. Y deducir, por la regularidad de λ, que $\lambda_n^*(g(B)) \leq K^n\, n^{n/2}\, \lambda_n(B)$, para todo $B \subset A$ medible Lebesgue tal que $\lambda_n(B) < \infty$. Indicación: Usar el hecho de que cualquier abierto en $\mathbb{R}^n$ es unión disjunta de una colección numerable de cubos n-dimensionales de la forma $[t_1, t_1 + s) \times \cdots \times [t_n, t_n + s)$.

10. Demostrar que si A es un abierto de $\mathbb{R}^n$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 y $N \subset A$ tiene medida de Lebesgue nula en $\mathbb{R}^n$, entonces $g(N)$ tiene medida de Lebesgue nula en $\mathbb{R}^n$. Indicación: Usar que A es una unión numerable de cubos n-dimensionales cerrados (con interiores disjuntos dos a dos). Para cada cubo C de la anterior unión considera $N_C = N \cap C$. Prueba que $||Dg(\cdot)||$ está acotada en C y deduce que g es de Lipschitz en C. Finalmente, aplica el ejercicio 9(b) al conjunto N_C.

11. Demuestra que si f, g y h están en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda_1}, \lambda_1, \mathbb{R})$, entonces $f * g = g * f$ y $(f * g) * h = f * (g * h)$.
Indicación: (1) Recuerda que se define $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - t)g(t)d\lambda(t)$. Hacer el cambio de variable $y = x - t$. (2) Por otro lado, $((f * g) * h)(x) = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x - t)h(t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} (g * f)(x - t)h(t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x - t - z)f(z)d\lambda(z) \right) h(t)d\lambda(t)$ y aplicar el teorema de Fubini.

12. Probar que en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_{\lambda_1} \times \mathcal{M}_{\lambda_1})$ las medidas $\lambda_1 \times \lambda_1$ y λ_2 coinciden. Indicación: Usar que todo conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ es unión de un boreliano de $\mathbb{R}^2$ y un conjunto de medida de Lebesgue 0 en $\mathbb{R}^2$, así como el hecho, ya probado, de que $\lambda_1 \times \lambda_1 = \lambda_2$ en $B(\mathbb{R}^2)$.

13. Consideremos T un cambio de variables entre dos abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$, es decir, una biyección $T : U \longrightarrow V$ de clase C^1 con inversa de clase C^1. Probar que $M \subset U$ es medible Lebesgue si y sólo si $T(M)$ es medible Lebesgue. Indicación: Probar primero, usando el ejercicio 10, que $N \subset U$ tiene medida de Lebesgue 0 si y sólo si $T(N)$ tiene medida de Lebesgue 0. Despues, usar que todo medible Lebesgue es unión de un boreliano y un conjunto de medida de Lebesgue 0.

Teoria de la Medida. Grupo A
Hoja 7 (2005)

1. Demostrar que $L^\infty[0,1]$ no es separable. Indicación: considerar para cada $a, b \in [0,1]$, $a \leq b$ la función característica $\chi_{[a,b]}$. ¿Cuanto vale $||\chi_{[a,b]} - \chi_{[c,d]}||_\infty$ si $[c,d]$ es otro subintervalo distinto de $[a,b]$?

2. Demostrar que en $L^\infty[0,1]$ el subespacio H generado por las funciones características en subintervalos de $[0,1]$ no es denso (con la norma $||\cdot||_\infty$). Indicación: Considerar una unión infinita de intervalos disjuntos en $[0,1]$, por ejemplo $C = \cup_n(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1})$. ¿Cuanto vale $||\chi_C - f||_\infty$ si $f \in H$? Puedes considerar f de la forma $f = \sum_{i=1}^n t_i\, \chi_{[a_i,b_i]}$ y $a_i < b_i$ (para intervalos abiertos o semiabiertos se hace un argumento similar). Distingue los casos (a) $a_i > 0$ para todo i, (b) existe i tal que $a_i = 0$ (por ejemplo $i = 1$).

3. Demostrar que en $L^\infty[0,1]$ el subespacio formado por todas las funciones continuas en $[0,1]$ no es denso (con la norma $||\cdot||_\infty$). Indicación: Si $a < c < b$, acota inferiormente $||\chi_{[a,c]} - f||_\infty$ para una función continua cualquiera f definida en $[0,1]$: demuestra que, por continuidad, para x en un cierto intervalo $(c-\delta, c+\delta)$, $|(\chi_{[a,c]} - f)(x)| = |f(x)| \geq |f(c)| - \frac{1}{4}$ si $x \in (c, c+\delta)$ y $|(\chi_{[a,c]} - f)(x)| = |1 - f(x)| \geq 1 - |f(c)| - \frac{1}{4}$ si $x \in (c-\delta, c)$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Lebesgue en cada compacto de $\mathbb{R}$ y sea g de clase C^n tal que g se anula fuera de un compacto. Demostrar que la función convolución $f * g$ es de clase C^n y se verifica que la derivada k-esima $(f*g)^{(k)} = f * g^{(k)}$, $k = 1, ..., n$. Indicación: Comprobar primero que $f*g$ está bien definida. Para estudiar su diferenciabilidad, puesto que la función convolución está definida a través de la integral $f*g(t) = \int f(x)\, g(t-x)\, dx$, comprobar que se cumplen las hipótesis para derivar bajo el signo integral. Para ello, fijar $N \in \mathbb{N}$ y definir $F : \mathbb{R} \times [-n,n] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x,t) = f(x)g(t-x)$. Acotar $\left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|$ por una función integrable $g(x)$.

5. Aproximación uniforme por funciones C^∞ mediante convoluciones:

Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función fija no negativa con soporte en $[-1,1]$, de clase C^∞ y cuya integral en $\mathbb{R}$ sea 1.

1. Consideremos para cada $\rho > 0$ las funciones $g_\rho(x) = \rho^{-1}\, g(\frac{x}{\rho})$. Comprobar que el soporte de g_ρ está incluido en $[-\rho, \rho]$ y que la integral en $\mathbb{R}$ de cada una de estas funciones es 1. Hacer un dibujo aproximado de como varían estas funciones cuando ρ tiende a cero.

2. Demostrar que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es unifomemente continua, entonces $f * g_\rho$ converge uniformemente a f cuando ρ tiendo a cero. Observar que, por el ejercicio 4, esto implica que toda función uniformemente continua se puede aproximar uniformemente en $\mathbb{R}$ por funciones de clase C^∞. Indicación: Comprobar que $f(x) - (f*g_\rho)(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(y))\, g_\rho(x-y)\, dy$ y utilizar que el soporte de la función g_ρ está incluido en $[-\rho, \rho]$.

3. Demostrar que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $f*g_\rho$ converge a f cuando ρ tiende a cero unifomemente en cada acotado. Observar que, por el ejercicio

4, esto implica que toda función continua se puede aproximar uniformemente en los acotados por funciones de clase C^∞.

6. 1. Demuestra que, si $1 \leq p < \infty$, el subespacio de $L^p(\mathbb{R}) := L^p(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda, \mathbb{R})$ formado por las combinaciones lineales finitas de funciones características sobre intervalos acotados es denso en $L^p(\mathbb{R})$.

2. Demuestra que si $1 \leq p < \infty$, el subespacio de $L^p(\mathbb{R})$ formado por las funciones continuas con soporte acotado es denso en $L^p(\mathbb{R})$.

Indicación: Aproximar cada función $f \in L^p(\mathbb{R})$ por $f\,\chi_{[a,b]}$, para cierto intervalo acotado $[a, b]$. Aplicar los resultados vistos en teoría relativos a la densidad del subespacio formado por las combinaciones lineales de funciones características sobre intervalos en $L^p[a, b]$. De forma análoga, utilizar que el subespacio formado por las funciones continuas en $[a, b]$ es denso en $L_p[a, b]$.

7. Aproximación en L^1 por funciones C^∞ mediante convoluciones:

Considerar $f \in L^1(\mathbb{R}) := L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda, \mathbb{R})$ y g_ρ las funciones definidas en el ejercicio 5. Demostrar que $\lim_{\rho \to 0} ||f - f * g_\rho||_1 = 0$. Indicación: Aproximar f por una función continua g con soporte acotado (problema 6). Probar que $||f - f * g_\rho||_1 \leq ||f - g||_1 + ||g - g * g_\rho||_1 + ||(g - f) * g_\rho||_1$. Aplicar un argumento similar al del problema 5 para obtener la desigualdad $||g - g * g_\rho||_1 \leq 2(M + 1)||g - g * g_\rho||_\infty$, donde el soporte de g está incluido en $[-M, M]$.

8. Sea una función $f \in L^p(\mathbb{R}) := L^p(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda, \mathbb{R})$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, definimos la función trasladada $f_x(t) = f(t - x)$, $t \in \mathbb{R}$. Demuestra que

$$\lim_{x \to 0} ||f - f_x||_p = 0 \tag{1}$$

(para $1 \leq p < \infty$) mediante los siguientes pasos:

1. Comprueba que $f_x \in L^p(\mathbb{R})$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
2. Demuestra que la igualdad (1) se verifica si f es una función característica sobre un intervalo acotado de $\mathbb{R}$.
3. Demuestra que la igualdad (1) se verifica si f es combinación lineal de funciones características sobre intervalos acotados de $\mathbb{R}$.
4. Usa el ejercicio 6 y el apartado anterior para demostrar la igualdad (1) para cualquier función de $L^p(\mathbb{R})$. Indicación: Observa que, por el ejercicio 6, el espacio formado por las funciones del apartado (3) es denso en $L^p(\mathbb{R})$.

9. Demostrar que si f y g están en $L^1(\mathbb{R})$ y si g está acotada, entonces $f * g$ es continua. Indicación: usar el ejercicio 8.

10. 1. Demostrar que si A es medible Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $0 < \lambda(A) < \infty$, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda(A \cap (x + A))$ es continua y es no nula en un entorno de 0. Indicación: prueba que $f = \chi_{-A} * \chi_A$ y utiliza el anterior ejercicio.

2. Utilizar el apartado anterior para demostrar que si M es un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}$ tal que $\lambda(M) > 0$, entonces $M - M = \{x - y : x, y \in M\}$ incluye un intervalo abierto $(-\delta, \delta)$, para algún $\delta > 0$.

Teoria de la Medida. Grupo A
Hoja 8 (2005)

1. Consideramos $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, μ una medida con signo en $(X, \mathcal{A})$ y $A \in \mathcal{A}$.
(a) Probar que $|\mu|(A) = 0$ si y sólo si para todo $B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, se verifica que $\mu(B) = 0$.
(b) Comprobar que en general $\mu(A) = 0$ no implica $|\mu|(A) = 0$.

2. Consideramos $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, μ una medida con signo en $(X, \mathcal{A})$ y μ_1, μ_2 medidas en $(X, \mathcal{A})$ tales que $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Probar que $\mu^+ \leq \mu_1$ y $\mu^- \leq \mu_2$.

3. ¿Para que sucesiones de números reales $\{r_n\}$, la expresión $\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \, \delta_n(E)$, $E \in P(\mathbb{N})$ es una medida con signo en $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$? Hallar en este caso una descomposición de Hahn para ν.

4. Consideremos un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ y ν una medida con signo en $(X, \mathcal{A})$.
(a) ¿Es cierta la igualdad $\nu(\cup_n E_n) = \lim_n \nu(E_n)$ para toda sucesión creciente de conjuntos $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$?
(b) ¿Es cierta la igualdad $\nu(\cap_n E_n) = \lim_n \nu(E_n)$ para toda sucesión decreciente de conjuntos $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ tal que $|\nu(E_{n_0})| < \infty$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$?

5. Consideramos $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, ν una medida con signo en $(X, \mathcal{A})$. Demuestra que

$$|\nu|(E) = \sup \Big\{ \sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| : \ \{E_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A} \text{ y disjuntos, } \cup_{i=1}^{n} E_i = E \Big\}.$$

6. Consideremos $\{r_n\}$ una numeración de los racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ continua, tal que $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 1$ y f_n se anula fuera del intervalo de longitud $\frac{1}{2^n}$ centrado en r_n. En el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda)$, definimos $\mu(A) = \int_A \sum_n f_n \, d\lambda$, para cada $A \in \mathcal{A}$.
(a) Demuestra que $\sum_n f_n(x) < \infty$ en λ-casi todo punto $x \in X$.
(b) Demuestra que μ es σ-finita, que $\mu << \lambda$ y que para cada abierto (no vacío) $U \subset \mathbb{R}$, se verifica que $\mu(U) = \infty$.

7. (a) Probar que si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y ν es una medida finita en $(X, \mathcal{A})$, entonces $\nu << \mu$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) < \delta$ entonces $\nu(A) < \varepsilon$.
(b) Hallar un ejemplo donde lo anterior no ocurre si ν no es finita. Indicación: Considera por ejemplo la medida ν en $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda)$ definida por $\nu(A) = \int_A |x| \, d\lambda(x)$.

8. (a) Probar que en el espacio vectorial $M(X, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ de las medidas con signo finitas definidas en el espacio medible $(X, \mathcal{A})$, la expresión $||\mu|| = |\mu|(X)$ define una norma.
(b) Si $\mu \in M(X, \mathcal{A}, \mathbb{R})$, probar que $M_1 = \{\nu \in M(X, \mathcal{A}, \mathbb{R}) : \nu \perp \mu\}$ y $M_2 = \{\nu \in M(X, \mathcal{A}, \mathbb{R}) : \nu << \mu\}$ son subespacios vectoriales cerrados del espacio normado $(M(X, \mathcal{A}, \mathbb{R}), || \cdot ||)$.

9. Consideremos μ y ν medidas σ-finitas definidas en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$. Demostrar que son equivalentes:
(a) $\nu << \mu$ y $\mu << \nu$,
(b) ν y μ tienen exactamente los mismos conjuntos de medida 0,
(c) exite una función $\mathcal{A}$-medible $g : X \longrightarrow (0, \infty)$ tal que $\nu(A) = \int_A g \, d\mu$ para todo $A \in \mathcal{A}$

10. Descomposicion de una medida finita definida en $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda)$ en tres medidas, una medida discreta (y por tanto singular con respecto a la medida de Lebesgue), una medida continua y también singular con respecto a la medida de Lebesgue y una absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue:
(a) Considerar $C = \{x \in \mathbb{R} : \ \nu(\{x\}) \neq 0\}$ y probar que es numerable. Definir $\nu_1(A) = \nu(A \cap C)$, para $A \in \mathcal{M}_\lambda$.
(b) Por otra parte, considerar la descomposición de Lebesgue de la medida $\mu(A) = \nu(A \cap C^c)$.

11. Da un ejemplo de medidas sobre el mismo espacio medible tales que no se verifica ninguna de la relaciones $\mu << \nu$, $\nu << \mu$, $\mu \perp \nu$.

12. Consideremos $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$. Definimos las medidas en $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda)$, $\nu(A) = \int_A f\, d\lambda$ y $\mu(A) = \int_A g\, d\lambda$, para cada $A \in \mathcal{M}_\lambda$. Hallar la descomposición de Lebesgue de ν con respecto a μ.

13. Describir la descomposición de Hahn y la de Lebesgue de la medida $\mu = \lambda - \delta_0$ definida en $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ respecto de λ (la medida de Lebesgue), siendo $\delta_0(E) = \operatorname{card}(E \cap \{0\})$.

14. Consideremos μ y ν medidas positivas en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ tales que para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $A \in \mathcal{A}$ que verifica $\mu(A) < \varepsilon$ y $\nu(A^c) < \varepsilon$. Demuestra que son medidas mutuamente singulares. Indicación: Elegir conjuntos A_n tales que $\cap_n \cup_{k \geq n} A_k$ satisface $\mu(A) = 0$ y $\nu(A^c) = 0$.

15. A dos conjuntos A y B medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ les asociamos las medidas $\mu_A(E) = \lambda(E \cap A)$ y $\mu_B(E) = \lambda(E \cap B)$ definidas en $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda)$.

1. ¿Bajo qué condiciones es $\mu_A << \mu_B$? En este caso, determinar la correspondiente derivada de Radon-Nikodym.
2. ¿Cuando es $\mu_A \perp \mu_B$?
3. Describir la descomposición de Lebesgue de μ_A respecto de μ_B.

16. Considera la medida de contar ν en $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda)$. Probar que no podemos hacer una descomposición de Lebesgue de ν respecto de la medida de Lebesgue.

17. Si μ y ν son dos medidas sobre el espacio medible $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ para las que todo conjunto unitario tiene medida finita y $\nu << \mu$, hallar la derivada de Radon-Nikodym de ν respecto de μ, es decir hallar una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty)$ tal que para todo $A \subset \mathbb{N}$ se verifica que $\nu(A) = \sum_{n \in A} f(n)\, \mu(\{n\})$.

15. Consideramos dos medidas con signo σ-finitas definidas en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ tales que $\nu << \mu$. Si $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-medible verifica que $\nu(A) = \int_A g\, d\mu$, para todo $A \in \mathcal{A}$, decimos que g es **la derivada de Radon-Nikodym de ν con respecto a μ y la denotamos por** $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Consideremos tres medidas con signo σ-finitas $\nu,\ \mu,\ \gamma$ en $(X, \mathcal{A})$ tales que $\nu << \mu << \gamma$.

(a) Probar que $\left|\dfrac{d\nu}{d|\nu|}\right| = 1$ en $|\nu|$-casi todo punto $x \in X$.

(b) Probar que una función $\mathcal{A}$-medible $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es ν-integrable si y sólo si fg es ν-integrable y en este caso $\displaystyle\int_X f\, d\nu = \int_X fg\, d\mu$

(c) Probar que $\dfrac{d\nu}{d\gamma} = \dfrac{d\nu}{d\mu} \cdot \dfrac{d\mu}{d\gamma}$ en λ-casi todo punto $x \in X$.

(d) Si $\mu << \nu$ y $\nu << \mu$, probar que $\left(\dfrac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1} = \dfrac{d\mu}{d\nu}$, en μ-casi todo punto.

18. Considera un espacio medible $(X, \mathcal{A})$, una medida σ-finita μ y una medida σ-finita con signo en $(X, \mathcal{A})$. Considerar la descomposición de Lebesgue de $\nu = \nu_s + \nu_a$ con respecto a μ. Demostrar que $||\nu|| = ||\nu_s|| + ||\nu_a||$.

Teoria de la Medida
Hoja 8 (2001)

1. Demostrar que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función monótona es numerable. Deducir, por tanto, que esto también es cierto para funciones de variación acotada.

2. Demostrar que la función $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$ y $f(0) = 0$ no es de variación acotada en $[0,1]$.

3. Prueba que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona entonces $V_f[a,b] = |f(a) - f(b)|$.

4. Calcula la variación total de la función $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin x$.

5. Prueba que si f es Lipschitziana entonces $V_f[a,b] \leq K(b-a)$, dónde K es la constante de Lipschitz. Deduce que la función $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$ y $f(0) = 0$ es de variación acotada en $[0,1]$.

6. Calcula la variación total de las siguientes funciones en el intervalo $[0,1]$: $f(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f(x) = \chi_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]}$, $f(x) = \chi_{(0,\frac{1}{2}]}$.

7. Demuestra que si una función F definida en $\mathbb{R}$ es de variación acotada en $\mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ y el $\lim_{x\to\infty} F(x)$ existen.

8. Prueba que $V_{f+g}[a,b] \leq V_f[a,b] + V_g[a,b]$ y que $V_{\lambda f}[a,b] = |\lambda| V_f[a,b]$. Como consecuencia, el conjunto de las funciones de variación acotada sobre un intervalo $[a,b]$ es un espacio vectorial.

9. Prueba que si f y g son de variación acotada en $[a,b]$, entonces también lo es el producto fg.

10. Demuestra, usando la definición, que la función singular de Cantor (que es continua) no es absolutamente continua.

11. Demuestra que una función Lipschitziana es absolutamente continua. Deduce que una función de clase C^1 en un intervalo $[a,b]$ es absolutamente continua en dicho intervalo.

12. Demostrar que si f es una función absolutamente continua y monótona en un intervalo $[a,b]$ y si E tiene medida de Lebesgue cero, entonces $f(E)$ tiene medida de Lebesgue cero.

13
1. Si $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es no decreciente sabemos que existe existe $F'(x) \geq 0$ para λ-c.t.p. de $[a,b]$. Comprobar, usando el lema the Fatou que
$$\int_a^b F'(x)\,dx \leq F(b) - F(a).$$
2. Comprobar, usando lo anterior, que si G es de variación acotada en $[a,b]$ entonces G' (que existe en λ-c.t.p de $[a,b]$) es integrable Lebesgue en $[a,b]$.
3. Demostrar que toda función de variación acotada G en el intervalo $[a,b]$ admite una descomposición $G = G_1 + G_2$, siendo G_1 absolutamente continua y $G_2' = 0$ en λ-c.t.p de $[a,b]$ (función singular).

14. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones sobre $[a,b]$ tal que cada f_n es no decreciente y $\sum_1^\infty f_n(x) = f(x)$, serie convergente en $\mathbb{R}$ para cada $x \in [a,b]$. Demostrar que $f'(x) = \sum_1^\infty f'_n(x)$ en λ-c.t.p. $x \in [a,b]$.

15. Demostrar que si f es una función definida en un intervalo $[a,b]$ y absolutamente continua entonces

$$V_f[a,b] = \int_a^b |f'(t)|dt.$$