MATEMÁTICAS BÁSICAS   Temas 1, 2 y 3, Grupos de mañana

¡Justifica adecuadamente tu respuesta en cada apartado del examen!

1 Escribe la siguiente proposición y su negación con cuantificadores. Justifica cuál de las dos es verdadera.
P: / Para cualquier número entero impar c se puede encontrar un número entero n que cumple $n^3 - 3n + c = 0$ /.

2 Demuestra por inducción que para todo $n > 1$ se cumple que $n! < n^n$

3 Sean x, y numeros reales. Demuestra que si $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 5} \neq \sqrt{y^4 + 2y^2 + 5}$, entonces $x \neq y$.

4 Se considera el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y el subconjunto $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dado por $A = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m - n > 0\}$.
a) Representa gráficamente el conjunto A.
b) Si $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ está definida por $f((m, n)) = m - n$, determina $f((3, 2))$, $f((2, 3))$, $f((1, 1))$ y $f((2, 2))$. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?
c) Describe los conjuntos $\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : f((m, n)) = 0\}$ y $\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : f((m, n)) = -1\}$.
d) Prueba la siguiente proposición
P: / $(m, n) \in A$ si y sólo si $f((m, n)) \in \mathbb{N}$. /

5 Se consideran los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$ y $B = \{p \in \mathbb{N} : \text{p es primo}\}$ y definimos $f : A \to B$ asignando a cada $n \in A$ el **mayor** primo que divide a n.
a) Calcula $f(4)$, $f(6)$, $f(15)$ y $f(18)$. ¿Es f inyectiva? ¿Es sobreyectiva?
b) Se considera la relación en el conjunto A dada por nRm si $f(n) = f(m)$. Demuestra que es una relación de equivalencia en A.
c) Determina primero la clase de equivalencia de 2 para la relación anterior (es decir, el conjunto $[2] = \{m \in A : 2Rm\}$). Describe la clase del 3.

MATEMÁTICAS BÁSICAS   Temas 1, 2 y 3,   Grupos de tarde

¡Justifica adecuadamente tu respuesta en cada apartado del examen!

1 Los números m, n son enteros. Escribe la siguiente proposición y su negación con cuantificadores. Justifica cuál de las dos es verdadera.
P: / Si para todo número natural p se cumple $m - n \leq p$, entonces $m < n$/.

2 Se consideran los números naturales $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ y, para $n \geq 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Determina los números a_3, a_4 y a_5. Demuestra por inducción completa que $a_n < (7/4)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3 Demuestra marcha atrás que si $m \geq 3$, entonces $\dfrac{(m-1)^2}{m} \leq m - \dfrac{5}{3}$.

4 Para un subconjunto A del dominio de la aplicación f, se usará la notación habitual $f(A)$ para el conjunto $\{f(a) : a \in A\}$.
a) Representa gráficamente los conjuntos $B = \{0\} \times \mathbb{Z}$ y $C = \mathbb{Z} \times \{0\}$.
b) Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la aplicación dada por $f(m, n) = 2m + 3n$. Describe $f(B)$ y $f(C)$, con B y C los conjuntos del apartado anterior.
c) Determina el conjunto $f(B) \cap f(C)$ y justifica que $f(B) \cap f(C) \neq f(B \cap C)$.

5 Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que hace corresponder a cada natural n el número de divisores de n. Por ejemplo, $f(2) = 2$ y $f(6) = 4$.

a) Razona si f es inyectiva y si es sobreyectiva.
b) Determina $f(12), f(31)$ y $f(2019)$ [$2019 = 3 \cdot 673$ y ambos factores son primos].
c) Encuentra tres elementos distintos de $f^{-1}(\{6\})$.
d) Determina $f^{-1}(\{2\})$.