CONCEPTOS Y RESULTADOS BÁSICOS SOBRE TRIÁNGULOS

En las hojas de problemas de la asignatura Matemáticas Básicas se utilizan conceptos y resultados relativos a triángulos. Para facilitar la resolución de los problemas correspondientes, se enumeran varias definiciones y teoremas bien conocidos. Es muy conveniente disponer de una hoja de papel y un bolígrafo para ir dibujando los puntos, segmentos y configuraciones que se describen.

Definición 1: Un **triángulo** es un polígono de tres lados y tres vértices (puntos de corte de dos lados). Llamaremos a los vértices con letras mayúsculas, A, B, C, y con letras minúsculas a los lados, a el lado opuesto a A, etc.

Definición 2: En un triángulo hay tres **ángulos interiores**, que tienen por vértices los del triángulos y están determinados por los lados del triángulo que pasan por cada uno de los vértices.

Definición 3: Un triángulo es **equilátero** si tiene sus tres lados iguales. Es **isósceles** si tiene dos lados iguales. Es **escaleno** si los tres lados son distintos entre sí.

Definición 4: Un triángulo es **acutángulo** si sus tres ángulos interiores son agudos. Es **rectángulo** si uno de sus ángulos es recto y **obtusángulo** si uno de sus ángulos es obtuso.

Teorema 5: La suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados (o π radianes). La demostración se verá en la asignatura.

Teorema 6: Un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales. La demostración de verá en la asignatura.

Definición 7: El segmento que tiene un extremo en un vértice del triángulo y el otro extremo en el punto medio del lado opuesto a dicho vértice se llama **mediana** del triángulo. Por tanto, en un triángulo hay tres medianas.

Teorema 8: Las medianas de un triángulo se cortan en un punto que se llama **baricentro** del triángulo, se le suele denotar por G. Si M es el punto medio del lado BC, la mediana AM, se verifica que $AG = 2GM$, y lo mismo ocurre con las otras dos medianas.

Definición 9: El segmento que tiene un extremo un vértice de un triángulo y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto se llama **altura**. El otro extremo de la altura es el punto de corte del segmento con la recta que contiene al lado opuesto. Por tanto en un triángulo hay tres alturas.

Preguntas 10: Razona si las alturas de un triángulo son siempre segmentos interiores al triángulo y si en algún caso pueden coincidir con algún lado del triángulo.

Teorema 11: Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto que se llama **ortocentro** del triángulo, se suele denotar por H.

Definición 12: Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son **iguales** si los lados correspondientes son iguales y los ángulos correspondientes son iguales, es decir, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, y los ángulos $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$.

Definición 13: Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son **semejantes** si $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$. Se puede demostrar que dos triángulos semejantes tienen los lados correspondientes proporcionales, es decir, existe número positivo, k, tal que $AB = kA'B'$, $AC = kA'C'$ y $BC = kB'C'$.

Definición 14: En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el lado restante, **hipotenusa**.

Teorema 15 (de Pitágoras): Si en un triángulo rectángulo, a es la hipotenusa y b y c son los catetos. Entonces,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Teorema 16 (del seno): En un triángulo ABC se verifican las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Teorema 17 (del coseno): Es una generalización tel Teorema de Pitágoras, que es un caso particular de este teorema, cuando imponemos que el ángulo sea recto. Sea un triángulo ABC, entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\,.$$

Escribe el enunciado para los lados b y c.

Teorema 18 (de la altura): Sea ABC un triángulo rectángulo y sea h la altura sobre la hipotenusa, BC. Sea D el pie de la altura h, es decir, el punto de corte de h con el lado BC. Entonces, $h^2 = BD \times CD$.

Definición 19: Sea un triángulo ABC, se llama **circunferencia circunscrita** de ABC a la única circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo. Su centro se llama **circuncentro** y en las hojas de problemas veremos que es el punto de corte de las mediatrices de los lados del triángulo.

Definición 20: Sea un triángulo ABC, se llama **circunferencia inscrita** de ABC a la única circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo. Su centro de llama **incentro** y en las hojas de problemas veremos que es el punto de corte de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo.

Teorema 21 (de Tales): Si dos rectas, no necesariamente paralelas, son cortadas por tres o más rectas paralelas, entonces los segmentos que resultan sobre una de las dos rectas son proporcionales a los correspondientes segmentos obtenidos sobre la otra.