Sistemas de numeración

El sistema de numeración binario emplea solamente las cifras 0 y 1, es posicional y se utiliza en la mayoría de los sistemas operativos. Un número natural puede representarse de manera única como suma de potencias de dos distintas (no negativas); en este caso suele decirse que está escrito en base dos. Por ejemplo,

$$6 = 2^2 + 2^1 = 1{\cdot}2^2 + 1{\cdot}2^1 + 0{\cdot}2^0 \text{ y } 5 = 2^2 + 2^0 = 1{\cdot}2^2 + 0{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0.$$

Sus respectivas expresiones binarias son $(110)_2$ y $(101)_2$.

A continuación detallamos los procedimientos para transformar la expresión decimal de un número natural en binaria (y recíprocamente, la binaria en decimal), tanto para números naturales como para los comprendidos entre 0 y 1.

1. Dado un número natural, podemos dar su expresión binaria (o en base dos) sin más que escribir de derecha a izquierda los restos sucesivos de dividir entre dos el número y sus cocientes. Por ejemplo, $19 = \mathbf{1}{+}9{\cdot}2$; $9 = \mathbf{1}{+}4{\cdot}2$; $4 = \mathbf{0}{+}2{\cdot}2$ y $2 = \mathbf{0}{+}\mathbf{1}{\cdot}2$ y $19 = (10011)_2 = 2^4 + 2^1 + 2^0$. Análogamente, $31 = (11111)_2$ y $32 = (100000)_2$.

2. Para escribir en base diez un número conocida su expresión en base dos, basta sumar aquellas potencias de dos que corresponden a los unos. Por ejemplo, $(1010101)_2 = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 64 + 16 + 4 + 1 = 85$; $(110010)_2 = 2^5 + 2^4 + 2^1 = 50$ y $(110011)_2 = 2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0 = 51$.

3. Un número entre 0 y 1, escrito en base diez, puede escribirse en base dos como suma de potencias de dos, distintas y negativas. El procedimiento es el siguiente: se multiplica por 2 sucesivamente, hasta que el producto sea mayor o igual que 1. Se colocan tantos ceros como veces hayamos multiplicado por 2 sin llegar a 1, y a continuación un 1 y, luego repetimos el procedimiento con los decimales que excedan 1 en el producto obtenido. En el caso de $x = 0{,}3125$, $2x = 0{,}625$, $4x = 1{,}25$ y las dos primeras cifras de x en base dos serán 0 (ya que $2x$ es menor que 1) y 1 (ya que $4x$ es mayor que 1). Ahora tomamos $4x - 1 = 0{,}25 = y$ y aplicamos el proceso anterior: $2y = 0{,}5$; $4y = 1$

y corresponden 0 y 1 como cifras finales. Así, $0{,}3125 = (0{,}0101)_2$. Observa que $(0{,}0101)_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} = 0{,}25 + 0{,}0625 = 0{,}3125$. El mismo proceso con $x = 0{,}140625$ nos lleva a $2x = 0{,}28125$, $4x = 0{,}5625$, $8x = 1{,}125$; $y = 8x - 1 = 0{,}125$; $2y = 0{,}25$; $4y = 0{,}5$ y $8y = 1$. Es decir, $x = (0{,}001001)_2$.

4. Observa que un número decimal escrito con una cantidad finita de cifras puede tener infinitas en base dos. Por ejemplo, $x = 0{,}4$. Puesto que $2x = 0{,}8$ y $4x = 1{,}6$, al considerar $y = 4x-1 = 0{,}6$ tendremos $2y = 1{,}2$; $z = 2y - 1 = 0{,}2$ y $2z = 0{,}4 = x$. Es decir, en la expresión en base 2 de 0,4 se repetirán indefinidamente las cifras 0110 y $0{,}4 = (0.\widehat{0110})_2$.

5. Convertir a base diez un número entre 0 y 1 expresado en base dos se reduce a sumar las potencias de dos correspondientes a las posiciones donde aparezcan unos. Por ejemplo,

$$(0{,}0010001)_2 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^7} = 0{,}1328125\,.$$

En el caso de expresiones periódicas, tendremos que calcular la suma infinita correspondiente. Recuerda que si $|r| < 1$, la suma infinita

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

Si $x = (0.\widehat{101})_2$, se tiene que

$$x = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots =$$

$$= (\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3})(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \cdots) = \frac{5/2^3}{1 - 1/2^3} = \frac{5}{7} = 0.\widehat{714285}\,.$$