MATEMÁTICAS BÁSICAS   Temas 4 y 5   Grupos de mañana

¡Justifica adecuadamente tu respuesta en cada apartado del examen!

1 a) Se considera el polinomio de coeficientes reales $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$. Halla a, b, c y d sabiendo que $2 - i$ y $1 - i$ son raíces de $P(z)$.
b) Prueba que si $n > 2$ y $\bar{z} = z^{n-1}$, entonces $z = 0$ o $|z| = 1$. Resuelve la ecuación $\bar{z} = z^{n-1}$.
2 a) Justifica que el conjunto

$$A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |(x + iy)(-3 + 4i)| = 10\}$$

es una circunferencia y calcula el centro y el radio de la misma.
b) Si $S : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ está definida para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ por $S(z) = -3x + 4y$, demuestra que el conjunto $S^{-1}(\{0\})$ es una recta e indica su pendiente.

3 a) Aplica el algoritmo de Euclides para decidir para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ los números $n^2 + 6n + 7$ y $n + 1$ son primos entre sí.
b) Se sabe que a_1, a_2, b_1, b_2 son números naturales tales que a_1 y b_1 son primos entre sí y a_2 y b_2 son primos entre sí. Prueba que $a_1 b_2 = a_2 b_1$ implica que $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

4 a) Prueba que dados cinco números complejos no nulos cualesquiera, al menos hay dos de ellos con argumentos que difieren en menos de $\pi/2$.
b) Determina cuántos números naturales menores o iguales que 100 son a la vez múltiplos de los números 3, 5 y 7 o no son múltiplos de ninguno de los tres.

5 a) Para seleccionar a cinco representantes del equipo de yudo de la Universidad Complutense, que consta de 40 miembros, se enfrentan entre sí todos los yudocas del equipo en un combate. ¿Cuántos combates se celebran en total?
b) La entrenadora elige a los cinco mejores para una competición universitaria. Si en la final de la competición hay ocho deportistas y tres de ellos son de la Complutense: ¿cuántas ternas distintas de puestos puede conseguir el equipo complutense? ¿Cuántas listas ordenadas distintas se pueden dar con los nombres de todos los finalistas?

MATEMÁTICAS BÁSICAS Temas 4 y 5 Grupos de tarde

¡Justifica adecuadamente tu respuesta en cada apartado del examen!

1 Calcula z_2 y z_3 si para cada entero positivo n se considera el número

$$z_n := \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n .$$

2 Se definen los conjuntos

$$A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 < |x + iy| < 3\}$$

$$B = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x + iy - 3i| < 3\} \text{ y}$$
$$C = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 < x < 3\}$$

Representa gráficamente los conjuntos A, B, $A \cap B$, C y $A \cap C$.

3 a) En un grupo de 100 personas hay 45 que hablan inglés, mientras que hay 30 que hablan francés y 20 que hablan español. Se sabe, además, que 6 de ellos hablan inglés y francés mientras que solo uno sabe inglés y español, 5 saben francés y español, pero nadie habla los tres. Calcula el número de los que hablan alguno de los tres idiomas y el número de los que no hablan ninguno de los tres.
b) Dado el número entero $n \geq 0$, aplica el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de $4n + 7$ y $2n + 3$. Estudia si es irreducible la fracción

$$\frac{4n+7}{2n+3} .$$

[Dados $a, b \in \mathbb{N}$, la fracción a/b es irreducible si mcd(a, b)=1].

4 En el club de kárate de la Universidad Complutense se celebra una jornada de puertas abiertas, en la que sus cuarenta miembros pueden celebrar un combate con otros karatecas del club. Prueba que hay al menos dos de ellos que al finalizar la jornada han disputado la misma cantidad de combates. [Sugerencia: distingue el caso en que haya un karateca que no ha celebrado ningún combate y el caso en que todos han disputado al menos un combate].

5 Durante una clase de Matemáticas Básicas, en un aula de la Facultad, hay seis sitios libres en la primera fila y tres en la última fila. A mitad de clase llegan nueve estudiantes nuevos.
a) ¿De cuántas maneras pueden sentarse los alumnos en los sitios libres?
b) Uno de los alumnos, José, se ha olvidado las gafas en casa y necesita sentarse en primera fila. ¿De cuántas maneras pueden sentarse ahora los recién llegados con esta restricción?
c) Ante la tardanza en sentarse de los alumnos, la profesora ofrece a José uno de los sitios libres de la primera fila, el más centrado, y para colocar a los ocho estudiantes restantes, coge ocho trozos de papel, escribe **primera fila** en cinco de ellos y **última fila** en los otros tres restantes. ¿De cuántas maneras se pueden dividir los alumnos en las dos filas?