Números complejos

1. Resuelve las siguientes cuestiones.

   a) Determina los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

   b) Encuentra los números complejos cuyo conjugado coincide con su inverso.

   c) Halla los números complejos que son iguales al cuadrado de su conjugado.

   d) Encuentra los números complejos cuyo cuadrado coincide con el cuadrado de su conjugado.

   e) Encuentra los números complejos z tales que la suma (respectivamente, la diferencia) de z y su conjugado es nula.

   f) Halla los números complejos cuyos inversos son iguales a sus opuestos.

   g) Representa en el plano $\mathbb{C}$ los siguientes conjuntos de números complejos: $A = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \text{ es imaginario puro}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \text{ es real positivo}\}$ y $C = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \text{ es real negativo}\}$.

2. Representa gráficamente los siguientes conjuntos de números complejos:
   $A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |(-3+4i)z| = 10\}$, $B = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -3x + 4y = 0\}$, $C = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -3x + 4y > 0\}$, $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z - 3i| = 3\}$, $E = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 < |x + iy| < 3\}$, $F = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x + iy - 3i| < 4\}$, $G = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 < x < 3\}$ y $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -1 < y < 4\}$.

3. Si $z \neq 0$ es un número complejo, prueba que $z, \dfrac{1}{\overline{z}}, 0, -z, \dfrac{-1}{\overline{z}}$ están alineados. Decide cuáles están en la misma semirrecta que z de las dos que determina el origen 0. Escribe $-z, 1/z, \overline{z}$ y $1/\overline{z}$ en forma módulo-argumental.

4. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ y tal que $|z| = 1$. Prueba que $z + z^{-1}$ es real y que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es imaginario puro.

5. a) Considera $z, w \in \mathbb{C}$ distintos, no nulos y no alineados con 0, y el cuadrilátero $\mathbf{K}$ que tiene como vértices $0, z, w, z+w$. Justifica que $\mathbf{K}$ es un paralelogramo. Calcula las longitudes de los lados de $\mathbf{K}$. Comprueba que las diagonales de $\mathbf{K}$ miden $|z+w|$ y $|z-w|$.

   b) *Identidad del paralelogramo.* Prueba que para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se satisface que $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Interpreta este resultado a la vista del apartado anterior.

6. Calcula las raíces cúbicas de la unidad y represéntalas gráficamente. Calcula el producto de las dos raíces distintas de 1 y el cuadrado de cada una de ellas.

7. Determina las tres raíces cúbicas de -64 y sus seis raíces sextas.

8. Sean $z = 1 - i$ y $w = 1 + \sqrt{3}i$. Determina los números $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $z^p, w^q \in \mathbb{R}$.

9. Determina, en cada caso, los números reales x, y que cumplen a) $x + iy = |x + iy|$, b) $x + iy = ((\sqrt{2} - i\sqrt{2})/2)^{8n+3}$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, c) $x + iy = \sum_{k=0}^{100} i^k$.

10. a) Sean $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ y $P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z^2 + z + 1$. Demuestra que las raíces n-ésimas de la unidad distintas de 1 son las soluciones de la ecuación $P(z) = 0$. [Sugerencia: Justifica y usa que $P(z)(z - 1) = z^n - 1$].

    b) Si $w = \cos(2\pi/5) + i \operatorname{sen}(2\pi/5)$, prueba que w satisface la ecuación $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Justifica que $w^4 = \overline{w}$ y que $w^3 = \overline{w^2}$.

    c) Calcula $\cos(2\pi/5)$. [Sugerencia: usa el apartado anterior].

11. a) Justifica que si w es raíz de un polinomio $P(z)$ con coeficientes reales, entonces $\overline{w}$ también lo es. Prueba que si w es raíz de multiplicidad $m \geq 2$ de un polinomio con coeficientes reales, entonces $\overline{w}$ también lo es.

    b) Utiliza el apartado anterior para probar que si $P(z)$ es un polinomio de grado impar con coeficientes reales, al menos una de sus raíces tiene que ser real.

    c) Calcula las soluciones de la ecuación $z^7 + z^5 - z^2 - 1 = 0$. [Observa que i es solución].

    d) Si $w \in \mathbb{C}$ es distinto de cero, calcula las n soluciones distintas de $z^n = w^n$. [Usa que w es una solución].

12. En el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos se define la relación $\leq$ mediante

$$a + bi \leq c + di \ \text{ (o, equivalentemente, } c + di \geq a + bi) \ \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} a < c \\ \text{ o bien} \\ a = c \text{ y } b \leq d \end{array} \right.$$

    a) Analiza si $\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{C}$ y si es total o parcial. Comprueba que $-i \leq 0 \leq i$.

    b) Recuerda que si x, y son números reales positivos, entonces $x + y$ y xy son también positivos. Para la relación $\leq$ introducida en $\mathbb{C}$, comprueba que se cumple que $z + w \geq 0$ si $z, w \geq 0$. ¿Se satisface que el producto $zw \geq 0$ cuando $z, w \geq 0$?

13. Comprueba las siguientes afirmaciones para la transformación

$$T : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \, , z \mapsto T(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\overline{z}}$$

    a) $T(T(z)) = z$, para todo $z \neq 0$; $T(z) = z$ si $|z| = 1$ y $|T(z)| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$.

    b) Si $z := x + iy \neq 0$ está en la recta $y = x$, entonces $T(z)$ también.

    c) Si $z := x + iy$ está en la recta $x = 1$, entonces $T(z)$ está en la circunferencia de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$.

    d) Si $z \neq 0$ está en la circunferencia $|z - 2| = 2$, entonces $T(z)$ está en la recta $x = 1/4$.

    e) Si z está en la circunferencia $|z-2| = 1$, entonces $T(z)$ está en una circunferencia. ¿En cuál?

14. Describe geométricamente la imagen de un punto cualquiera (x,y) del plano mediante un giro σ de ángulo α y centro un punto $P := (p_1, p_2)$. Prueba que el punto (u,v) resultado de girar (x,y) un ángulo α con centro P cumple

$$u + iv = p_1 + ip_2 + (\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))(x - p_1 + i(y - p_2)).$$

Expresa el resultado en forma matricial.

15. ($\bullet$) Demuestra de modo intuitivo que los giros preservan distancias; es decir, que dado un giro σ y dos puntos A, B del plano, la distancia entre A y B coincide con la distancia entre $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$.

16. Encuentra el transformado del punto del plano $(-1,3)$ por el giro de ángulo $\pi/4$ y centro el punto $(0,0)$ y el del punto del plano $(-1,3)$ por el giro de ángulo $\pi/3$ y centro el punto $(2,2)$

17. Expresa la ecuación de la circunferencia de centro $(1,2)$ y radio 3 en términos de los números complejos. Calcula la imagen de dicha circunferencia por el giro de ángulo $\pi/4$ y centro el punto $(1,1)$. Misma cuestión si el centro del giro es el centro de la circunferencia.

En el conjunto $\mathbb{C}$ se define la función exponencial como $e^z = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y)$, para todo $z = x + iy$, donde las funciones exponencial, seno y coseno son las funciones reales conocidas.

18. Calcula $e^{i\pi}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{-i\pi}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $e^{-1+i\frac{\pi}{2}}$, $e^{\log(2)+i\frac{3\pi}{2}}$ y $e^{\log(4)+i\pi}$.

19. Determina todos los números complejos z tales que $e^z = -1$ y aquellos tales que $e^z = -i$. ¿Existe algún número complejo w tal que $e^w = 0$?

Ejercicios de reserva

20. Dadas $f(z) = z^3 - 2iz^2 - (1-i)z - 2i$ y $g(z) = 2z^3 + (1+i)z^2 - (3+2i)z - 7 + 16i$ calcula $f(i), f(1-i), g(1+i), g(2-i)$ y $g(2i)$. [Solución: $f(i) = -1-2i$, $f(1-i) = -6-2i$, $g(1+i) = -14+17i$, $g(2-i) = -4-8i$ y $g(2i) = -7-10i$].

21.
    a) Halla el valor de $E = (1+\sqrt{3}i)^n - (1-\sqrt{3}i)^n$, siendo n un número natural.
    b) Halla los valores de n naturales para los que $(1+i)^n$ es un número real positivo.

22. Determina los conjuntos $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3i| = 2\}$, $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3ie^{i\pi/4}| = 2\}$ y $C_3 = \{z \in \mathbb{C} : |e^{i\pi/3}z - 3i| = 2\}$.

23. Se consideran un número real $r \in (0,1)$ y $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| < 1$.

    a) Describe el conjunto $\{e^{it} + re^{-it} : t \in [0, 2\pi]\}$.

    b) Describe el conjunto $\{e^{it} + we^{-it} : t \in [0, 2\pi]\}$. [Sugerencia: si $w = |w|e^{i\theta}$, escribe $e^{it} + we^{-it} = e^{i(\theta/2)}(e^{i(t-\theta/2)} + |w|e^{-i(t-\theta/2)})$].