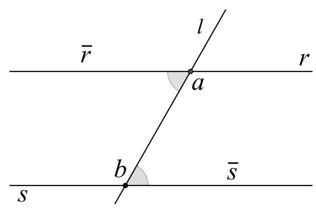
El ejercicio de la demostración en matemáticas

Primero, vamos a ver unos aspectos teóricos necesarios para este tema

1. Axiomas

Axioma 1. Los ángulos alternos internos miden lo mismo, es decir, las amplitudes de los ángulos sombreados coinciden.



Axioma 2. Si las medidas de los ángulos de dos triángulos son iguales dos a dos los lados son proporcionales.
Axioma 3. Si dos triángulos comparten las longitudes de sus lados también comparten las amplitudes de sus ángulos.
Axioma 4. Dadas una recta ℓ y un punto $P \notin \ell$ existe una única recta r paralela a s que pasa por P.

2. Notaciones

(1) Dados dos puntos A, B en el plano denotaremos $d(A, B)$ la distancia entre ellas.
(2) Dados dos puntos distintos A y B en el plano denotaremos $\ell_{A,B}$ a la única recta que pasa por ellos y $[A, B]$ al segmento que los tiene por extremos.

Demostración directa

En el tipo de demostración conocido como **demostración directa** (hacia adelante) se trata de demostrar que $A \Rightarrow B$ partiendo de A y deduciendo proposiciones hasta llegar a B.

1. Demostrar que la suma de las amplitudes de los ángulos de un triángulo es la del ángulo llano, que denotamos π.

2. Demostrar que dadas dos rectas que se cortan, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

3. Sean A y B puntos distintos en el plano. Dibujar la recta m que forma con la recta ℓ_{AB} un ángulo cuya amplitud es la mitad del ángulo llano, esto es, $\pi/2$, y pasa por el punto medio M del segmento $[A, B]$. A los ángulos cuya amplitud es $\pi/2$ se les llama *ángulos rectos* y se dice que las rectas m y ℓ_{AB} son *perpendiculares.* Se dice que m es la *mediatriz* del segmento $[A, B]$.

4. Sean ℓ una recta del plano y P un punto no situado en ℓ. Demostrar que existe una única recta perpendicular a ℓ que pasa por P.

5. Un triángulo $\triangle ABC$ se dice *rectángulo en A* cuando las rectas ℓ_{AB} y ℓ_{AC} son perpendiculares. Demostrar el Teorema de Pitágoras que afirma que en estas condiciones $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = d(B, C)^2$.

6. Sean A y B puntos distintos en el plano.
   - Demostrar que la mediatriz del segmento $[A, B]$ es el conjunto formado por los puntos que equidistan de A y B.
   - Se llaman *mediatrices de un triángulo* a las mediatrices de los segmentos que tienen por extremos sus vértices. Demostrar que las mediatrices de un triángulo concurren en un punto.
   - Demostrar que las diagonales AC y BD de un rombo $ABCD$ son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

7. Se dice que un triángulo es *isósceles* si dos de sus lados miden lo mismo. Demostrar que las amplitudes de dos de los ángulos de un triángulo isósceles coinciden.

8. Demostrar que si una recta ℓ corta a una circunferencia K en dos puntos distintos P y Q entonces los radios de K con extremos P y Q forman con ℓ ángulos iguales.

9. Sean B y C dos puntos distintos situados en una recta ℓ y O un punto exterior a ℓ. Sea $r > 0$ un número real tal que $d(O, B) < r < d(O, C)$. Demostrar que existe un único punto R en el segmento de extremos B y C tal que $d(O, R) = r$.

10. - Demostrar que dadas una circunferencia K y una recta ℓ la intersección $K \cap \ell$ consta de, a lo sumo, dos puntos.
    - Una recta ℓ que corta a K en un único punto P se dice que es *la recta tangente* a K en P. Sea O el centro de K. Demostrar que las rectas ℓ y ℓ_{OP} son perpendiculares.

11. Sean K una circunferencia y P un punto exterior a ella. Sean ℓ_1 y ℓ_2 las rectas tangentes a K que pasan por P y A_1 y A_2 los puntos de tangencia. Demostrar que $d(P, A_1) = d(P, A_2)$.

12. Sea K una circunferencia de centro O.
    - Demostrar que si P y Q son los extremos de un diámetro de K y $A \in K$ entonces el ángulo $\angle PAQ$ es recto.
    - Sea A, B, C y D cuatro puntos situados en K en ese orden. Probar que $2\angle ABC = \angle AOC$. Relaciona $\angle CDA$ con $\angle ABC$.

13. - La *bisectriz* del ángulo $\angle r, s$ determinado por dos semirrectas r y s que se cortan en un punto D es la semirrecta con origen en D que divide al ángulo $\angle r, s$ en dos partes iguales. Demostrar que los puntos de la bisectriz equidistan de r y s. Trazar con regla y compás la bisectriz del ángulo $\angle r, s$.
    - Demuestra que las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes.

Marcha atrás (con formulación equivalente en cada paso)

Una estrategia para encontrar una demostración directa consiste en proceder **marcha atrás**, más o menos como sigue. Como antes, quieres probar que $A \Rightarrow B$. Te preguntas (siempre con un ojo en A) qué proposiciones implican B. Encuentras que $P \Rightarrow B$; no es lo que buscas, pero tal vez P está más cerca de A. Te preguntas a continuación cómo podrías llegar a P. Encuentras que $Q \Rightarrow P$. Tal vez ahora ya eres capaz de ver que $A \Rightarrow Q$. Si fuera así, ahora ya podrías construir la demostración directa $A \Rightarrow Q \Rightarrow P \Rightarrow B$.

14. Demuestra que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ si $x > 0$.

15. (•) Si x e y son números reales positivos, prueba que

$$\frac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Demostración por contraposición

En ocasiones, para conseguir demostrar la proposición $/A \Rightarrow B/$, resulta más sencillo demostrar la proposición / no $B \;\Rightarrow\;$ no A /. En los siguientes ejercicios te pedimos que, utilizando este método de demostración, llamado **demostración por contraposición**, demuestres las siguientes proposiciones:

16. Sea a un número real. Demuestra que si a es irracional, entonces $7a$ es irracional.

17. Si n es un entero y n^2 es par (respectivamente, múltiplo de 3), prueba que n es par (respectivamente, múltiplo de 3).

18. Si p y q son números reales positivos tales que $\sqrt{pq} \neq \dfrac{p+q}{2}$, entonces $p \neq q$.

19. (*) Si c es un número impar, la ecuación $n^2 + n - c = 0$ no admite soluciones enteras.

20. Si en un cuadrilátero no hay ningún ángulo obtuso, dicho cuadrilátero es un rectángulo.

21. Demuestra que si $(m, n, p) \in \mathbb{Z}^3$ es una terna de números pitagóricos (es decir, verifican que $m^2 = n^2 + p^2$), entonces al menos uno de ellos es par.

Reducción al absurdo

Otra forma de demostración muy utilizada es la conocida como demostración por **reducción al absurdo**: Quieres demostrar que $A \Rightarrow B$ y para ello demuestras que

$$/A \text{ y no } B/ \Rightarrow /P \text{ y no } P/\,,$$

para cierta proposición P.

22. Demuestra que si la recta r corta a una circunferencia K en un punto P y forma con el radio de K que termina en P un ángulo recto, entonces r corta a K solo en P. [Recuerda el ejercicio 8].

23. Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x^2 + 1 \geq 2x$.

24. Si n es un número natural mayor que 2, no hay ningún número natural m con $n + m = nm$.

25. Demuestra que hay una cantidad infinita de números primos.

26. Prueba que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Demuestra que $\sqrt{3}$ es irracional.

27. (•) (*) Prueba que existen dos números irracionales, a y b, tales que a^b es un número racional.

Demostración por inducción

Quieres demostrar que $P(n)$ es cierta, siendo $P(n)$ una proposición que tiene que ver con el número natural n, por ejemplo, que la suma de los n primeros números naturales vale $\frac{n(n+1)}{2}$ (apartado a) del ejercicio 32). Procede así:

- Demuestra que $P(1)$ es cierta.
- Demuestra que si $P(k)$ es cierta, entonces $P(k+1)$ es cierta.

Así queda claro que $P(n)$ es cierta para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

28. Demuestra por inducción que si $f_n(x) = x^n$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $f_n'(x) = nx^{n-1}$, utilizando la fórmula de la derivada del producto.

29. Deduce una fórmula para la derivada n-ésima de la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Demuéstrala por inducción.

30. Demuestra por inducción que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se cumple que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

31. *a*) Demuestra que si $n \in \mathbb{N}$ es par, entonces $10^n - 1$ es múltiplo de 11.

    b) Demuestra que si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces $10^n + 1$ es múltiplo de 11.

32. Demuestra por inducción las siguientes igualdades:

    a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *b*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

    c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ *d*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

    e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ *f*) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \frac{(2n)!}{n!}$

33. Utiliza alguna de las fórmulas del ejercicio 32 para demostrar que el cubo de cualquier número entero es la diferencia de los cuadrados de dos números enteros.

34. (•) Usa fórmulas del ejercicio 32 para calcular las soluciones de la ecuación

$$(x^2 + x + 1) + (x^2 + 2x + 3) + (x^2 + 3x + 5) + \cdots + (x^2 + 20x + 39) = 4500$$

35. Si para cada $a, b, d, r \in \mathbb{R}$ y $k \geq 0$ se consideran los números $a_k = a + kd$ y $b_k = b \cdot r^k$, busca una expresión cerrada para cada una de las siguientes fórmulas

$$\sum_{k=0}^{n} a_k, \sum_{k=m}^{n} a_k, \sum_{k=0}^{n} b_k \ \text{ y } \ \sum_{k=m}^{n} b_k, \quad \text{para todos } m, n \in \mathbb{N} \text{ con } m \leq n.$$

    Demuestra por inducción la validez de las expresiones halladas.

36. Sea $n \in \mathbb{N}$.

    a) Prueba que si $n \geq 3$, se da que $n^2 > 2n + 1$.

    b) Prueba que si $n \geq 5$ entonces $2^n > n^2$.

37. (•)(*) Demuestra que si en una hoja de papel trazas n segmentos, cada uno de los cuales empieza en un punto de un borde del papel y acaba en un punto de otro borde, entonces las regiones de la hoja así definidas se pueden pintar con dos colores de modo que cada dos trozos con borde común tiene distinto color.

38. (•) Demuestra que si tenemos n puntos en el plano de modo que no hay tres en línea recta, el número de segmentos que determinan es $\dfrac{n(n-1)}{2}$

39. Encuentra dónde está el error en el siguiente argumento. Vamos a demostrar que todos los coches de Madrid son rojos. Demostramos por inducción que todos los coches de un conjunto finito de coches son del mismo color. Supongo que la tesis es cierta para cualquier conjunto de n coches y la demuestro para cualquier conjunto de $n+1$ coches. Sea A un conjunto de $n+1$ coches, sea A_1 el subconjunto de A formado por los n primeros coches y A_2 el subconjunto de A formado por los n últimos coches. Consideramos un coche en la intersección $A_1 \cap A_2$. Por la hipótesis de inducción los coches de A_1 tienen todos el mismo color y los coches de A_2 tienen todos el mismo color. Considerando un coche en la intersección $A_1 \cap A_2$, vemos que los coches de A_1 y de A_2 tienen todos el mismo color. Como $A = A_1 \cup A_2$, concluimos que los coches de A todos tienen el mismo color. Como el conjunto de coches en Madrid es finito, todo los coches de Madrid tienen el mismo color. Como mi coche es rojo, todos los coches de Madrid son rojos.

La **inducción completa** es una generalización del método de inducción. Procedes de la siguiente forma:

- Demuestras que $P(1)$ es cierta.
- Demuestras que si $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ son ciertas, entonces $P(k+1)$ es cierta.

Así pruebas que $P(n)$ es cierta para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

40. Prueba que todo número natural distinto de 1 se puede representar como producto de primos.

41. Demuestra que cualquier número natural se puede escribir como suma de distintas potencias de 2.

42. (•) Demuestra que cualquier polígono, convexo o no, se puede descomponer en triángulos mediante diagonales disjuntas. [Indicación: Todo polígono tiene al menos una diagonal totalmente contenida en su interior]. Demuestra que la suma de los ángulos de todo polígono de n lados, no necesariamente convexo, es $(n-2)180$ grados.

Soluciones a los ejercicios con (*)

19 Si n es un entero cualquiera, $n^2 + n$ siempre es par [justifícalo] y, por lo tanto, $n^2 + n - c$ siempre es impar si c es impar.

27 Por reducción al absurdo, supongamos lo contrario de lo que queremos probar, es decir, que para todos dos números irracionales, p y q, se cumple que p^q es irracional. Entonces, $p = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional. Y aplicando de nuevo lo que estamos dando por cierto, $p^{\sqrt{2}}$ es también un número irracional, pero hemos llegado a contradicción porque dicho número es 2, que es racional. Por tanto el enunciado inicial es cierto.

37 Si sólo hay un segmento, está claro que se puede colorear. Supongamos que también se puede cuando hay k segmentos. Queremos ver que también se puede cuando hay $k + 1$ segmentos. Nos ponemos delante de una hoja con $k + 1$ segmentos. Quitamos uno cualquiera. Nos queda una hoja con k segmentos. Según la hipótesis se puede colorear. Lo coloreamos. Ahora reponemos el segmento que hemos quitado. Éste divide el papel en dos partes. A todos las regiones que quedan en una de las dos partes les cambiamos de color. Las regiones de la otra parte conservan el color que tenían. La hoja inicial de $k+1$ segmentos queda coloreado de acuerdo con las normas dadas. Si un trozo de ese segmento que hemos quitado y hemos puesto es frontera de dos regiones, éstas tienen distinto color. Cualquier otro segmento de frontera delimita regiones de distinto color.

Ejercicios de reserva

43. Si dos rectas de un plano se cortan en un punto P y cortan a una circunferencia en los puntos A y B y C y D, respectivamente, entonces los productos de los segmentos $AP \cdot BP$ y $CP \cdot DP$ son iguales.

44. (Recíproco del Teorema de Pitágoras). Si el triángulo T de lados a, b y c cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces T es rectángulo y su hipotenusa es c.

45. Prueba que si A es un subconjunto no vacío de números naturales, entonces existe $a \in A$ tal que $a \leq b$ para todo $b \in A$. [Se sugiere suponer que A no tiene primer elemento, considerar el conjunto $B := \{k \in \mathbb{N} : 1, 2, 3, ..., k-1, k$ no pertenecen a $A\}$ y probar por inducción que $B = \mathbb{N}$ y por tanto A sería vacío].

46. Con el ejemplo sugerido en la solución del ejercicio 27, da una demostración directa de que existen a, b irracionales tales que a^b es racional.

47. Se colocan de forma arbitraria 10 puntos en una circunferencia y se numeran al azar con los números $1, 2, \ldots, 9, 10$. Se forman las diez ternas de puntos consecutivos y se calcula la suma de cada una de ellas (observa que las diez cantidades suman 165, dado que cada número interviene en tres ternas y la suma de los diez primeros naturales es 55). Demuestra por contraposición que hay una terna de puntos que suma al menos 17.