ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

PARA CIENCIAS E INGENIERÍA

Miguel García Bravo, José María Prieto Martínez y Luis Felipe Prieto Martínez

Aunque considero esta obra indigna de Vuestra Magneficencia, confío en que la sabréis aceptar, pues no puedo haceros mejor regalo (...).
No he engalanado ni exagerado esta obra con frases interminables, ni con palabras pomposas y extraordinarias (...) porque he querido que o nada la honre o la hagan grata la gravedad del asunto y la veracidad de las observaciones (...).
Acoja Vuestra Magneficencia este pequeño obsequio con la misma buena voluntad que yo lo hago; si lo lee y medita atentamente verá en él un vivo deseo mío: el de que Vuestra Magneficencia llegue a la grandeza que el destino y vuestras dotes personales prometen.

N. Maquiavelo, *El Príncipe*.

Introducción a este documento

Este texto es un material de guía para un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para Ciencias o Ingeniería. Originalmente se preparó para el primer curso de Ingeniería Química en la primavera de 2020.

Comentario para el profesor: Los cursos como este son difíciles de organizar. Y también es complicado elegir qué contar y qué no. Hemos intentado incluir material suficiente para hacer un texto flexible, que pueda adaptarse a diferentes cursos y profesores. Por ejemplo tenemos:

- *Curso reducido:* los temas 7, 8 y 9, son bastante independientes del resto, cualquiera de ellos puede eliminarse para reducir la duración del curso. También puede decidirse no incluir todos los métodos de solución analítica de EDO's (obviando, por ejemplo las secciones 3.6, 3.7, 3.8).
- *Curso de una sola variable:* si no se desea cubrir la parte de sistemas, puede omitirse completamente la Parte IV.

Sobre el formato: este trabajo es más bien un libro de apuntes. No profundiza excesivamente, como otras textos más enciclopédicos, en todos los temas que trata. Contiene exáctamente los contenidos del curso, no más. Y al igual que muchos otros libros para Ciencias o Ingeniería no incluye demostraciones (no está destinado a estudiantes de Matemáticas). A cambio, hemos intentado exponer de forma clara y sucinta las ideas, esperamos que sea de lectura agradable y contiene gran número de ejercicios resueltos. Para nosotros es muy importante que cualquier que abra el libro, pueda localizar de forma rápida lo que busca.

Comentario para el alumno: Se supone que el lector conoce ya algunos contenidos de Matemáticas superiores (métodos de integración, polinomios de Taylor, funciones en varias variables, diagonalización de matrices,...). Por los motivos que discutíamos en los párrafos anteriores, es posible que la lectura de este texto deba ser complementada con la de otros: bien porque traten un tema concreto con mayor profundidad o para consultar los contenidos que se dan por vistos. Puede utilizarse para ello la bibliografía al final.

Sobre la estructura: El libro se divide en cuatro partes. La primera es una introducción (Temas 1 y 2). La segunda trata sobre EDO's de orden 1. La tercera sobre EDO's de orden superior. La última sobre sistemas de EDO's.

Esperamos que el texto te resulte agradable.

Los autores

Índice general

Introducción a este documento **5**

I Cuestiones Iniciales 11

1. Introducción **13**
1.1. ¿Qué es una EDO? 13
1.2. Tipos de criaturas malvadas que nos encontraremos en este curso y dónde encontrarlas 15
1.3. Nuestros primeros métodos para resolver algunas EDO's 17
1.4. ¿Qué deberemos saber hacer con esas criaturas malvadas? 19
Hoja 1 20

2. Modelización y EDO's **21**
2.1. Introducción 21
2.2. ¿Qué es un Modelo? 22
2.3. Modelización con EDO's. Formulación de los modelos de poblaciones exponencial y logístico usando EDO's. 24
2.4. Modelización con sistemas de EDO'S. Formulación del Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra. 25
Hoja 2 26

II EDO's de Primer Orden 27

3. Solución analítica de algunas EDO's **29**
3.1. Introducción 29
3.2. EDO's triviales. Funciones sin primitiva elemental 30
3.3. EDO's de variables separables 31
3.4. EDO's lineales I: variación de constantes 32
3.5. EDO's lineales II: factor integrante 33
3.6. EDO's homogéneas 35
3.7. EDO's exactas 36
3.8. Más métodos. Factores integrantes y cambios de variable. 37
Hoja 3 38

4. Enfoques cualitativo y numérico, existencia y unicidad de soluciones **41**
4.1. Una herramienta para el tratamiento cualitativo: campos de pendientes 41
4.2. Isoclinas 43
4.3. Método de Euler I: una herramienta para el tratamiento numérico 44
4.4. Método de Euler II: el error 46
4.5. Más sobre métodos numéricos 48
4.6. Existencia de soluciones para PVI 49
4.7. Unicidad de soluciones para PVI 51
4.8. Más sobre existencia y unicidad 53
Hoja 4 56

5. EDO's Autónomas **57**
5.1. Introducción 57
5.2. Rectas de fase 58
5.3. Clasificación de los puntos de equilibrio 59
5.4. Dibujos cualitativos que podemos hacer a partir de la recta de fases 60
5.5. EDO's autónomas que dependen de Parámetros. Bifurcación 61
5.6. Una EDO autónoma en Ecología: el modelo logístico 63
Hoja 5 64

III EDO's de Orden Superior **65**

6. Cuestiones Básicas **67**
6.1. Introducción. ¿Qué vamos a ver en este capítulo? 67
6.2. Reducción de orden 68
6.3. Ideas básicas sobre EDO's lineales de orden superior 70
6.4. EDO's lineales con coeficientes constantes homogéneas 72
6.5. ¿Cómo encontrar una solución particular de una EDO lineal no homogénea con coeficientes constantes? 74
Hoja 6 76

7. Algunas EDO's de Orden 2 que aparecen en Física **79**
7.1. Problemas de Cinemática 79
7.2. Oscilador Armónico Simple 80
7.3. Oscilador Armónico Amortiguado y Forzado 81
7.4. Circuitos RC y RLC 82
Hoja 7 84

8. Series de Potencias y Ecuaciones en Diferencias **87**
8.1. ¿Qué es una serie? 87
8.2. Series de Potencias 88
8.3. ¿Por qué nos interesan las series? Motivo I: resolver EDO's 89
8.4. ¿Por qué nos interesan las series? Motivo II: Ecuaciones en Diferencias, la versión discreta de las EDO's 90
8.5. Ecuaciones en Diferencias Lineales Homogéneas de orden 2 91
8.6. De continuo a discreto y de discreto a continuo 92
Hoja 8 93

9. Transformada de Laplace **95**
9.1. Operadores. Transformadas integrales 95
9.2. La transformada de Laplace 96
9.3. Antitransformada o transformada inversa de Laplace 97
9.4. Cómo usar la transformada de Laplace para resolver EDO's de cualquier orden 98
Hoja 9 99

IV Sistemas de EDO's de Primer Orden **101**

10. Conceptos básicos **103**
10.1. Introducción 103
10.2. Curvas y Sistemas de EDO's 104
10.3. Campos de Vectores: Análisis Cualitativo de Sistemas Autónomos 106
10.4. Sistemas Desacoplados 108
Hoja 10 109

11. Sistemas Lineales **111**
11.1. Sistemas Lineales Homogéneos con Coeficientes Constantes 111
11.2. Soluciones en Línea Recta y mediante autovectores generalizados 112
11.3. Sistemas Lineales con coeficientes constantes 2×2: solución general 113
11.4. Sistemas Lineales con coeficientes constantes 2×2: estudio cualitativo 114
Hoja 11 117

12. Sistemas no Lineales **119**
12.1. Introducción 119
12.2. Análisis cualitativo de sistemas autónomos 120
12.3. Método de Euler para sistemas 121
12.4. Aplicaciones: modelos en los que dos poblaciones interactúan entre sí 122
Hoja 12 125

Bibliografía **127**

Sobre los autores **129**

Parte I

Cuestiones Iniciales

Capítulo 1

Introducción

1.1. ¿Qué es una EDO?

- Las **funciones reales de variable real** son las que se estudian en el instituto (que llamaremos sencillamente **funciones** si esto no conduce a confusión, aunque hay más tipos de funciones, como las de varias variables), cuya definición enseguida recordaremos. En este curso, como **variable independiente** usaremos casi siempre la t, y como **variable dependiente** preferiblemente la y. Si necesitamos más de una, usaremos también la x o subíndices $y_1, y_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots$.

- Dado un conjunto D de números reales que llamamos **dominio**, una función es una relación $y : D \to \mathbb{R}$, esto es, que asocia a cada uno de los número reales t del conjunto D otro número real y (se suele escribir $y(t)$ para dejar constancia de que la y es una **variable dependiente** de la t). Muchas veces esta relación viene dada por una fórmula y escribimos, por ejemplo:

$$y : D \to \mathbb{R}$$

$$y(t) = sen(t)$$

- Una **ecuación funcional** es una ecuación en la que las incógnitas son funciones. Por ejemplo, en las siguientes la incógnita es $y(t)$:

$$ln(y(t)) = t^2, \qquad y(y(t)) = t$$

- Si en la ecuación aparecen, no sólo las "funciones-incógnita" sino también sus derivadas, tenemos una **ecuación diferencial** (E. D.). Como las siguientes:

$$y'(t) = sen(t), \qquad y'(t) = y(t), \qquad y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) + t = 0$$

  Véase el Ejercicio Resuelto 1.1.1

- En este curso, vamos a estudiar sólo ecuaciones diferenciales en las que todas las "funciones-incógnita" son funciones **reales de variable real**. Las llamamos **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias** (E.D.O.) para distinguirlas de las demás. Todos los ejemplos del punto anterior son EDO's. Las ecuaciones diferenciales en las que una o más de las funciones-incógnita son funciones de varias variables se llaman **Ecuaciones en Derivadas Parciales** (E.D.P.). Un ejemplo sería el siguiente, con función incógnita $F(x, y)$, que depende de dos variables x e y:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$

  Este tipo de ecuaciones diferenciales son mucho más difíciles de estudiar y se suelen introducir en cursos más avanzados, utilizando herramientas matemáticas más potentes.

- Antes de seguir, debemos tener superado el problema sencillo de **verificar** que una o más funciones son soluciones de una EDO. Véanse los ejercicios resuletos 1.1.2 y 1.1.3

A propósito: existen diferentes opciones para denotar a la derivada o derivadas sucesivas de una función $y(t)$:

- **Notación de Leibnitz:** la más usada (aunque no la única) en los cursos de EDO, $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$
- **Notación de Lagrange:** muy usada en Matemáticas, $y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t), \ldots$
- **Notación de Newton:** de uso amplio en Física, $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots$

Ejercicio Resuelto 1.1.1 ***Invéntate una EDO que tenga como solución a*** $\mathbf{y(t) = sen^2(t)}$***.***

Como $y'(t) = 2cos(t)sen(t) = sen(2t)$, tendríamos que $y''(t) = 2cos(2t)$ y que $y'''(t) = 4sen(2t)$ y podríamos contestar que:

$$y'''(t) = 4y'(t)$$

Ejercicio Resuelto 1.1.2 ***Decide cuál de las siguientes funciones son soluciones de la EDO***

$$\mathbf{\frac{dy}{dt} = \frac{y+1}{t+1}}$$

(a) $\mathbf{y(t) = t}$***, (b)*** $\mathbf{y(t) = 2t+1}$***, (c)*** $\mathbf{y(t) = t^2 - 2}$

(a) $y'(t) = 1$. Por otro lado $\frac{y+1}{t+1} = \frac{t+1}{t+1} = 1$. Por tanto sí es solución.

(b) $y'(t) = 2$. Por otro lado $\frac{y+1}{t+1} = \frac{(2t+1)+1}{t+1} = 2$. Por tanto sí es solución.

(c) $y'(t) = 2t$. Por otro lado $\frac{y+1}{t+1} = \frac{(t^2-2)+1}{t+1} = t-1$. Por tanto no es solución.

Ejercicio Resuelto 1.1.3 ***Se considera la ecuación diferencial*** $\frac{dy}{dt} = y^2 - 2(t+1)y + (t+1)^2$***. Comprueba que las funciones*** $y_1(t) = t$ ***e*** $y_2(t) = t+2$ ***son soluciones.***

Comenzamos con la primera. Tenemos $y_1(t) = t, y'(t) = 1$. Vemos que

$$t^2 - 2(t+1)t + (t+1)^2 = t^2 - 2t^2 - 2t + t^2 + 2t + 1 = 1$$

Por otro lado, la segunda. Tenemos $y_2(t) = t+2$, $y_2'(t) = 1$. Vemos que:

$$(t+2)^2 - 2(t+1)(t+2) + (t+1)^2 = t^2 + 4t + 4 - 2t^2 - 6t - 4 + t^2 + 2t + 1 = 1$$

1.2. Tipos de criaturas malvadas que nos encontraremos en este curso y dónde encontrarlas

- **EDO's de Primer Orden:** son aquellas en las que sólo aparece la primera derivada de la "función-incógnita" (hasta que lleguemos a sistemas, todas las EDO's tendrán una sola "función-incógnita"). En este curso, todas las que estudiaremos serán (o se podrán escribir tras alguna manipulación) de la forma:
$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \text{ o análogamente } y'(t) = f(t, y(t)),$$
$f(t, y)$ denota una **función real de dos variables reales**. En este caso depende de nuestra variable independiente habitual y nuestra "función-incógnita" (que a su vez depende de t). Análogamente, pueden tener un dominio D que no tiene por qué ser el conjunto de todas las posibles parejas de números reales (denotado por $\mathbb{R}^2$) y usaremos la notación:
$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(t, y) = y^2 + t^2 + 2yt$$

- **Solución general de una EDO de primer orden:** En general, las EDO's tienen más de una solución. Por ejemplo, dada la EDO:
$$\frac{dy}{dt} = t$$
todas las funciones de la forma $y(t) = \frac{t^2}{2} + C$, con $C \in \mathbb{R}$, son soluciones de la EDO.

  El conjunto de todas las soluciones de una EDO se llama **solución general**, y frecuentemente (como en este caso) pueden expresarse todas juntas mediante una expresión que depende de un parámetro (las soluciones forman una **familia uniparamétrica** de funciones).

  Para cada uno de los valores del parámetro tenemos una solución "concreta". A cada una de ellas se les llama **solución particular**.

- **Problemas de Valor Inicial (PVI) de primer orden:** Por contra, si tenemos una EDO y una **condición inicial**, esto es, el valor de y correspondiente a algún valor de t (por ejemplo $y(0) = 5$):
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
podemos esperar, en los casos más sencillos donde la función f sea "suficientemente buena", que exista una única solución de la EDO con esa condición inicial.

- **EDO's de Orden Superior**: Son aquellas en las que intervienen derivadas de orden superior a 1.

  La solución general se define de forma análoga. En este caso, si las funciones involucradas son "suficientemente buenas", en sus soluciones generales aparecen tantos parámetros como el orden (2 parámetros para las EDO's de orden 2, etc...) y los correspondientes PVI's requerirán tantas condiciones iniciales como el orden.

Por ejemplo, pensemos en lo que ocurre en los problemas de Cinemática en los que queremos hallar la posición $x(t)$ de un objeto que se mueve a lo largo de una recta y cuya posición va variando por efecto de una fuerza. Si la fuerza es constante $F \in \mathbb{R}$, y el objeto tiene masa m, entonces la posición del objeto viene determinada por la EDO de orden 2 $mx''(t) = F$ (ya hablaremos de esto en el capítulo correspondiente). Como sabrá el lector, se necesitan cononcer la posición y velocidad iniciales $x(0)$ y $x'(0)$ para determinar completamente la "función-solución" $x(t)$ del problema.

- **Sistemas de EDO's de Primer Orden:** Por último, estudiaremos sistemas de EDO's de Primer Orden, conjuntos de varias ecuaciones en los que aparecen más de una "función-incógnita" $x_1(t), \ldots, x_n(t)$. También en este caso existen PVI's. En este caso se necesita una condición inicial para cada una de las funciones incógnitas: $x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)$.

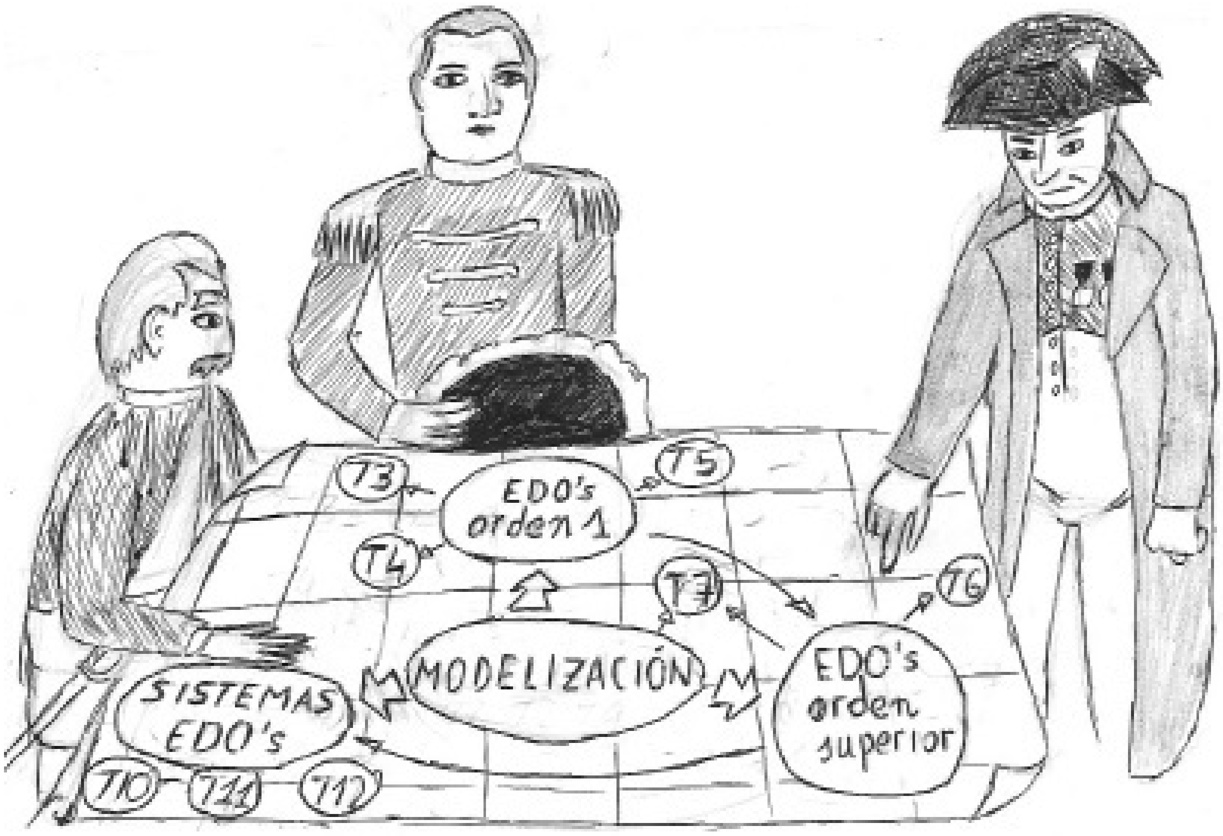


Figura 1.1: La estrategia es sencilla. ¡Estudiándonos todo esto, será como alcanzaremos la victoria!

1.3. Nuestros primeros métodos para resolver algunas EDO's

Todo lo que vamos a contar en esta sección, volveremos a contarlo en detalle en el Capítulo 3. Lo incluímos ahora también para que tengas algunos ejemplos que ilustren esta introducción.

- **EDO's triviales:** son las mas sencillas que veremos. Tienen la forma $\frac{dy}{dt} = f(t)$, y pueden resolverse simplemente haciendo una integral:

$$y(t) = \int f(t)dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

  donde C es la habitual **constante de integración**.

- **EDO's de variables separables:** Este método, como todos los que explicaremos, funciona sólo con algunas EDO's.

  - Vamos a suponer por un momento que $\frac{dy}{dt}$ es de verdad una fracción. Esto es horrible matemáticamente, si no se le da más sentido, pero nos va a servir para lo que vamos a hacer. Ya explicaremos más adelante por qué funciona este método.
  - Decimos que una EDO cumple la **(condición de variables separables)** si es de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \cdot g(t) \tag{1.1}$$

  - En este caso es posible "pasar todos los términos con $t's$ a un lado y los términos con $y's$ al otro" (incluyendo dt, dy) solamente mediante multiplicaciones y divisiones. Por ejemplo:

$$\frac{dy}{dt} = yt \Rightarrow \frac{dy}{y} = tdt$$

  - Cuidado porque en el paso anterior hemos supuesto que $y(t) \neq 0$. Ese caso deberemos considerarlo aparte.
  - Una vez que hayamos hecho esto "integramos en los dos lados" (de nuevo decir esto así es horrible) y obtenemos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int tdt \Longrightarrow ln(|y|) = \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

    Nótese que una sola constante de integración es suficiente, no hace falta poner una a cada lado.

  - Ahora, intentamos despejar la y de la ecuación funcional que nos ha quedado. En este ejemplo obtenemos:

$$ln(|y|) = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow y(t) = (\pm e^C) \cdot e^{\frac{t^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = De^{\frac{t^2}{2}}, \quad D \in \mathbb{R}, D \neq 0$$

- Incluso si se cumple la condición de variables separables, puede ser que no podamos encontrar las soluciones usando este método. Ya hablaremos de eso también más adelante.

- Si hubiéramos tenido un PVI en vez de una EDO "a secas", podríamos ahora utilizar la condición inicial para despejar el valor de la constantes en cada uno de los métodos.

Ejercicio Resuelto 1.3.1 ***Resuelve el siguiente PVI:*** $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \\ y(1) = \pi \end{cases}$

Primero encontramos la solución general de la EDO:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \Longrightarrow y(t) = \int \frac{1}{1+t^2} dt = arctg(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Y después determinamos la constante de integración utilizando la condición inicial:

$$y(1) = \pi \Longrightarrow arctg(1) + C = \pi \Longrightarrow \frac{\pi}{2} + C = \pi \Longrightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

De modo que la (única) solución del PVI es:

$$y(t) = arctg(t) + \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio Resuelto 1.3.2 ***Resuelve el siguiente PVI:*** $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^2 + y \\ y(0) = -2 \end{cases}$

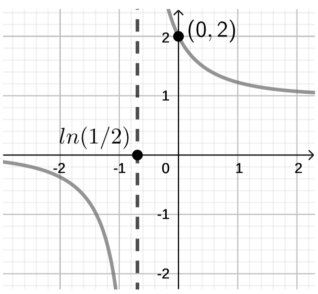
Primero pasamos "los términos con y" a un lado y "los términos con t" al otro. En este caso no hay "términos con t" aparte del propio dt. Y después intentamos "despejar" $y(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + y \Longrightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dt + C, \quad C \in \mathbb{R} \Longrightarrow ln(|y|) - ln(|y+1|) = t + C, \quad C \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{y}{y+1} = \pm e^{t+C}, \quad C \in \mathbb{R} \Longrightarrow \frac{y}{y+1} = De^t, \quad D \in \mathbb{R},\ D \neq 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y = (y+1)De^t, \quad D \in \mathbb{R},\ D \neq 0 \Longrightarrow (1 - De^t)y = De^t, \quad D \in \mathbb{R},\ D \neq 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = \frac{De^t}{1 - De^t}, \quad D \in \mathbb{R},\ D \neq 0}$$

Ahora usamos la condición inicial:

$$y(0) = 9 \Rightarrow \frac{De^0}{1 - De^0} = -2 \Longrightarrow D = 2 \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{2e^t}{1 - 2e^t}}$$

- Obsérvese en el ejemplo anterior que la solución de una EDO no tiene porque estar definida en toda la recta real. En este caso la solución "explota", es decir tiende a infinito, cuando t tiende a $ln(1/2)$.

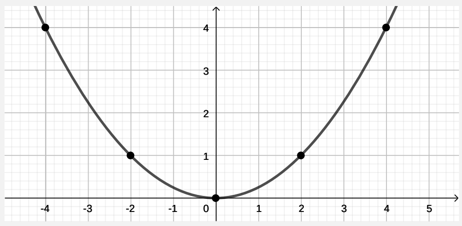


1.4. ¿Qué deberemos saber hacer con esas criaturas malvadas?

- Dada una función (que recordemos que es una forma de asociar a cada número real t de un dominio otro número real y), en el insituto nos decían que hay tres formas razonables de describirla:

(1) **Una fórmula analítica:** la más completa y nuestra favorita. Por ejemplo $y(t) = \frac{t^2}{4}$.

(2) **Una gráfica** en la que se ve mejor la información cualitativa.



(3) **Una tabla de valores:** que aunque es peor que una fórmula analítica, a veces es más fácil de calcular y suficiente para algunas aplicaciones:

t	-4	-2	0	2	4
y	4	1	0	1	4

- Hay tres enfoques para estudiar las soluciones de las EDO's y sistemas de EDO's: como las soluciones de las EDO's son funciones reales de variable real, podemos intentar obtener cualquiera de las tres descripciones anteriores de las mismas. Esto da lugar a tres enfoques para estudiar las soluciones de las EDO's y sistemas de EDO's:

  (1) **Enfoque analítico:** buscar fórmulas explícitas que describan las soluciones de una EDO, o sistema de EDO's (insistimos, no siempre es posible).

  (2) **Enfoque cualitativo:** buscar un panorama del comportamiento de las soluciones (comportamiento a largo plazo, etc.), algo parecido a un esbozo de la gráfica. No permite obtener valores precisos de la y para cada valor específico de la t.

  (3) **Enfoque numérico:** busca aproximar la solución, una tabla aproximada de valores. Generalmente, se requiere la ayuda de un ordenador para generar esa tabla.

- En la sección anterior vimos dos métodos que permitían resolver analíticamente una EDO en algunos ejemplos sencillos. Pero en general:

A diferencia de lo que ocurre con las ecuaciones de primer grado en el instituto, no es fácil resolver explícitamente una EDO. De hecho, y esto es importante saberlo, no siempre es posible hacerlo.

- En relación a esto último, tenemos los llamados **Problema de Existencia y Unicidad para PVI's**. Dado un PVI, deberemos aprender a, sin resolverlo, contestar a las dos siguientes preguntas: (1) ¿tiene solución? (**Problema de Existencia**) y (2) ¿puede tener más de una solución? (**Problema de Unicidad**)

  Necesitaremos una serie de teoremas que, en cada caso (EDO's o sistemas de EDO's de los diferentes tipos que estudiaremos) nos ayuden a contestar a estas preguntas, repetimos, sin la necesidad de resolverlos.

Hoja 1: Introducción

1. Considera la siguiente EDO e indica cuáles de las funciones propuestas son soluciones.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - 1}{t^2 + 2t}$$

(a) $y_1(t) = 1 + t$, (b) $y_2(t) = 1 + 2t$, (c) $y_3(t) = 1$

2. Cuánto tiene que valer m para que $y(t) = t^m$ sea solución de $t^2 y''(t) - 2y(t) = 0$.

3. Encuentra alguna solución para las siguientes EDO's.

   (a) $y' = y(\text{sen}(ty) + 12t^3)$.

   (b) $y' = y$.

   (c) $y' = \cos^2 t$.

4. Invéntate una EDO no trivial que tenga como solución la que se indica en cada apartado:

   (a) $y(t) = sen(t)$,

   (b) $y(t) = e^{t^2}$,

   (c) $y(t) = t^2 - 2t - 2$,

5. Invéntate una EDO no trivial que tenga como solución que se indica en cada apartado. Haz un esbozo de las familias de funciones de los apartados (b), (c), (d).

   (a) la familia de funciones $y(t) = A \cdot e^t + B$,

   (b) la familia de funciones $y(t) = At^2 + A^2$,

   (c) la familia de círculos $(t - c)^2 + (y(t))^2 = 1$,

   (d) la familia de parábolas $(y(t))^2 = 2pt$.

6. Invéntate dos EDO's lo más sencillas posible que no puedan resolverse por el método de separación de variables.

7. Resuelve las siguientes EDO's por el método de separación de variables:

   (a) $(1 + t) \cdot y = -(1 - y) \cdot t \cdot y'$,

   (b) $y' + y \cdot tg(t) = 0$,

   (c) $2t^2 \cdot y \cdot y' = 1 + t^2$,

   (d) $(a^2 + y^2) = 2t \cdot \sqrt{at^2 - a^2} \cdot y'$,

   (e) $(1 + t^2)y' = 1 - y^2$

Capítulo 2

Modelización y EDO's

2.1. Introducción

- El libro [1] (titulado "Ecuaciones Diferenciales") comienza diciendo: *Este libro trata de como podemos predecir el futuro. Para ello, de todo lo que disponemos es el conocimiento de cómo son las cosas y cuáles son las reglas que gobiernan los cambios que ocurrirán.*

- El **determinismo científico** es un paradigma que considera que, a pesar de la complejidad del Universo y su impredictibilidad práctica, el mundo físico evoluciona en el tiempo según principios o reglas totalmente predeterminadas: las **Leyes Naturales**. El azar es solo un fenómeno aparente.

  > *Hemos de considerar el estado actual del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del que ha de seguirle. Una inteligencia que un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan la Naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos, podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más ligero; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos.* **Pierre-Simon Laplace**

- El estudio de las Ecuaciones Diferenciales siempre ha ido de la mano de la Modelización Matemática. Es porque la forma más sencilla de enunciar esas leyes naturales o aproximaciones razonables de las mismas es, en muchas ocasiones, el lenguaje de las EDO.

Figura 2.1: Este malvado personaje se regodea en su crapulencia al ver que los trenecitos están obligados a moverse siguiendo unas leyes (las vías) y, en este caso, son conducidos a un inevitable desastre.

2.2. ¿Qué es un Modelo?

- I. Asimov, explica en [14]: *Si deseáis comprender algún aspecto del Universo, os ayudará a hacerlo simplificar todo aquello que podáis e incluir sólo aquellas propiedades y características esenciales para la comprensión. Si queréis determinar cómo cae un objeto, debéis dejar de pensar en si es viejo o nuevo, rojo o verde, si huele o no. Eliminad aspectos como esos y así no os complicaréis de manera innecesaria. La simplificación la podéis llamar* ***modelo*** *(...). Ahora bien, a medida que se desea saber más y más sobre cualquier fenómeno (...) se necesitan ecuaciones más y más elaboradas (...). En otras palabras, es imposible conseguir una imagen del Universo como un todo si no se estudia el Universo entero.*
- De manera más prosaica, podríamos decir que un **modelo** es una simplificación de la realidad a una situación (1) más susceptible de ser estudiada matemáticamente pero que (2) mantiene las características esenciales que influyen en el resultado.

Figura 2.2: Para estudiar los accidentes de coche se utilizan modelos que se parecen en lo relevante para la Física a las personas (mismo tamaño, misma forma, misma densidad puntual,...) pero que difieren en cosas que no son importantes (como en el color o en que no están vivas... ¡eh, un momento!).

- **Pasos para hacer un buen modelo:**

  (1) Establecer clara y explícitamente las hipótesis en las que se basará el modelo. Así si el modelo no se parece a la realidad, será más sencillo identificar cual de las suposiciones iniciales es errónea.

  (2) Identificar y nombrar las variables y parámetros que se usarán en el modelo.

  (3) **Reducir el problema real a un problema de Matemáticas:** Utilizar las hipótesis del primer paso para escribir una ecuación o "algo" que describa la situación y que podamos estudiar con herramientas exclusivamente matemáticas. En este curso siempre serán EDO's o sistemas de EDO's (practicaremos esto en las siguientes secciones).

  (4) **Resolver el problema de Matemáticas** correctamente (esto es lo que aprenderemos a hacer durante el resto del curso).

  (5) **Contrastar las conclusiones:** Comprobar si el modelo se adapta a la realidad (eso lo hace la Estadística).

- **Variables y Parámetros.** Recordemos que llamamos *variable* a las cantidades cuya variación queremos estudiar. Los *parámetros* son valores desconocidos que permanecen constantes a lo largo de todo el proceso que estemos estudiando.

Ejercicio Resuelto 2.2.1 ***Establece las hipótesis e identifica variables y parámetros de un modelo adecuado para estudiar como varía una población de osos que vive en un bosque inmenso a lo largo de los años.***

Las hipótesis de nuestro modelo (que son muy discutibles) serán:

1. *El crecimiento de la población de osos no depende de factores externos a ella (depredadores, contaminación, migraciones,...).*
2. *El bosque es inmenso, así que suponemos que tiene una cantidad ilimitada de recursos.*
3. *Digamos que (esto es "de media", pero vamos a suponer que es exacto) cada oso tiene, en un año, r descendientes (r no tiene por que ser un número entero, pudiera ser que cada pareja tuviera un descendiente).*

Identificamos ahora nuestras variables y les ponemos nombre. Vamos a denotar por t al tiempo y por y o $y(t)$ al número de osos en el instante t. Nuestro modelo tiene un parámetro: r. Ya fue definido en la hipótesis 3.

Figura 2.3: Cuenta la leyenda que este oso (*ursus arcos*) se aparece en las pesadillas de los alumnos que no estudian suficientes ecuaciones diferenciales.

Ejercicio Resuelto 2.2.2 ***Establece las hipótesis e identifica variables de un modelo adecuado para estudiar como varía una población aislada a lo largo de una epidemia (número de infectados, numero de personas sanas, etc.).***

Esta vez una posible elección de las hipótesis será:

1. *La población permanece constante mientras dure la epidemia (no hay muertes naturales, ni nacimientos, ni movimientos migratorios, o estos no son relevantes para el estudio). Por supuesto sí que puede haber muertes debidas a la enfermedad.*
2. *Las personas sanas son contagiadas, con relación directa al número de encuentros que haya entre las personas sanas y las personas enfermas. Las personas enfermas no manifiestan síntomas en los primeros estadios, así que es posible que estos encuentros ocurran.*
3. *Existe una tasa de personas infectadas que fallece, o se recupera volviéndose inmune, o es aislada del resto de la población.*

Vamos a denotar de nuevo al tiempo transcurrido desde un punto de referencia y por $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ al número de personas sanas (susceptibles de infectarse), infectadas (con capacidad de infectar) y retiradas del estudio (fallecidas o que han superado la enfermedad y ahora son inmunes).

2.3. Modelización con EDO's. Formulación de los modelos de poblaciones exponencial y logístico usando EDO's.

- Las ecuaciones diferenciales aparecieron por primera vez en los trabajos de cálculo de Newton y Leibniz, por su utilidad en Física. Históricamente, se desarrollaron porque eran necesarias en relación a los siguientes problemas de la **cuerda vibrante**, el de la **curva tautócrona**, el de la **curva braquistócrona**, el de la **curva catenaria**, el de la **ecuación del calor** ...

- Tenemos un capítulo entero dedicado a las aplicaciones de las EDO's a problemas de la Física en estos apuntes, así que lo que haremos en esta sección es mostrar dos ejemplos de EDO's que describen modelos muy importantes de crecimiento de poblaciones que aparecerán más veces en este texto.

Ejercicio Resuelto 2.3.1 (Modelo Exponencial de Malthus) ***Escribe una ecuación que describa el comportamiento de la población $y(t)$ de acuerdo a las hipótesis del Ejercicio 2.2.1.***

$y'(t) = r \cdot y(t)$. No lo piden, pero usando separación de variables llegamos a $y(t) = e^{rt} + C$.

Ejercicio Resuelto 2.3.2 (Modelo Logístico de Verhulst) ***Establece las hipótesis e identifica variables y parámetros de un modelo adecuado para estudiar como varía una población de osos que vive en un bosque de unas dimensiones y recursos reducidas a lo largo de los años. Después formula una EDO que describa la situación.***

Las hipótesis de nuestro modelo (que son muy discutibles) serán:

1. *El crecimiento de la población de osos no depende de factores externos a ella (depredadores, contaminación, migraciones,...).*

2. *El bosque es limitado. Tiene recursos y espacio suficientes para, a lo sumo, C osos.*

3. *El crecimiento de osos es directamente proporcional al número de osos (a más osos más reproducción) pero también a los recursos disponibles (a menos espacio disponible menor reproducción).*

Identificamos ahora nuestras variables y les ponemos nombre. Vamos a denotar por t al tiempo y por y o $y(t)$ al número de osos en el instante t. Nuestro modelo tendrá dos parámetros: C (capacidad máxima de osos en el bosque) y k (constante de proporcionalidad relativa a la hipótesis 3).

De forma que, una EDO razonable para describir el comportamiento de la población $y(t)$ es:

$$y' = k \cdot y \cdot (C - y)$$

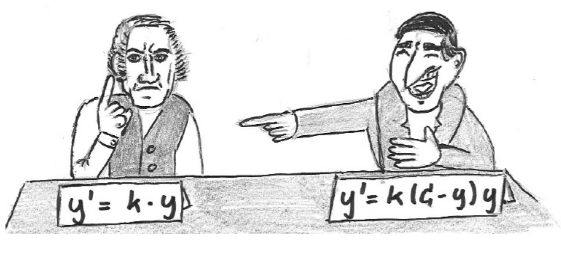


Figura 2.4: Malthus defendía que el crecimiento incontrolado de la población, por encima de los recursos disponibles, nos conduciría a la catástrofe (malthusiana). Verhulst contradijo después esta tesis: defendía que el crecimiento se frenaría a medida que llegaráramos al límite de los recursos disponibles.

2.4. Modelización con sistemas de EDO'S. Formulación del Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra.

Ejercicio Resuelto 2.4.1 (Ecuaciones de Lotka-Volterra) ***Establece las hipótesis e identifica variables y parámetros de un modelo adecuado para estudiar como varían dos poblaciones, una de conejos y otra de zorros, que viven en un bosque enorme, sabiendo que los zorros se alimentan exclusivamente de los conejos y que los conejos tienen recursos inagotables para alimentarse.***

Se dan los siguientes supuestos:

1. *Suponemos que las presas tienen alimento ilimitado y que se reproducen a ritmo constante. Puede que también mueran "de viejas" a ritmo constante. Pero supondremos que nacen más de las que mueren de forma que la población, en total, experimenta un crecimiento a ritmo constante.*
2. *Suponemos también que la única causa externa de desaparición de las presas es la depredación.*
3. *Por otro lado, los depredadores se reproducen de manera directamente proporcional a las presas que cazan y tienen una tasa de mortandad constante.*

Vamos a denotar por t al tiempo a partir de que comencemos el estudio. El número de presas (conejos) es $x(t)$ y el de depredadores (zorros) $y(t)$.

Hay más de un posible sistema de EDO's que describa la situación anterior. El modelo de Lotka-Volterra usa el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Aquí se está usando, y es muy importante entender esto, el término "xy" para representar la depredación, como una medida de los encuentros fortuitos entre ambas especies (pensemos como de grande es xy si x es muy grande e y es muy grande, si x muy pequeño, ... y todas las combinaciones para comprender por qué xy es una buena manera de representar el número de encuentros).

Hemos introducido los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, que deben ser todos positivos.

- *α es la tasa a la que las presas se multiplican .*
- *El término xy representa una medida de lo frecuentes que son los encuentros entre ambas especies. Por eso β representa una tasa de mortandad producida por la depredación (o en qué porcentaje de los encuentros el conejo es atrapado) y δ una tasa de crecimiento en los depredadores producida por su alimentación (que no tiene por qué ser igual a β).*
- *γ es la tasa de mortandad natural de los depredadores.*

Ejercicio Resuelto 2.4.2 ***Escribe un sistema de ecuaciones que describa el comportamiento de las poblaciones $S(t), I(t), R(t)$ de acuerdo a las hipótesis del Ejercicio 2.2.2.***

$$\begin{cases} S' = -\alpha \cdot S \cdot I \\ I' = \alpha \cdot S \cdot I - \beta I \\ R' = \beta I \end{cases}$$

Hoja 2: Modelización con EDO's.

1. Diseña un modelo sencillo para estudiar la evolución de una población aislada de 100 personas (no van a nacer ni a morir más mientras dure nuestro estudio) en la que aparece una misteriosa infección zombie. Cuando una persona sana y un zombie se encuentran, la personas sana puede resultar contagiada en un 50 % de los casos. Denota por t al tiempo desde la hora 0 de comienzo de la infección y por $y(t)$ la cantidad de personas sanas en el instante t.

2. Una población de hongos $y(t)$ se extiende en un ecosistema de forma muy similar a la predicha por el Modelo Exponencial de Malthus (explicado en el Ejercicio Resuelto 2.3.1).

   (a) Utiliza variables separadas para resolver la correspondiente ecuación diferencial y obtener una expresión de $y(t)$ (que dependerá de dos parámetros).

   (b) Sabiendo que la población de hongos (en millares de individuos) es 5000 en el instante $t = 0$ y es de 10000 en el instante $t = 1$, da una fórmula explícita (que no dependea ya de ningún parámetro) para $y(t)$.

3. Durante la crisis del COVID-19 se insistió a la población a que se quedara en sus casas y no saliera más que lo imprescindible. Suponiendo que, tomando la medida y sin tomarla, esta epidemia estuviera bien descrita por un modelo como el de los ejercicios 2.2.2 y 2.4.2 ¿qué estaríamos alterando en las ecuaciones al quedarnos en casa?

4. De nuevo sobre el Ejercicio Resuelto 2.2.2 y su continuación 2.4.2, contesta a las siguientes preguntas:

   (a) ¿Cómo puedes justificar, a partir de las ecuaciones del Ejercicio Resuelto 2.4.2 que la población total del pueblo, como se exige en las hipótesis del modelo, permanece constante?

   (b) Cambia o añade alguna hipótesis en el Ejercico Resuelto 2.2.2 para conseguir un modelo más realista y escribe el sistema de EDO's correspondiente.

5. Un tanque está lleno de 100l de agua en los que se han disuelto 20kg de una sal. Un segundo tanque contiene 1kg de sal por litro y su contenido es bombeado al primer tanque a razón de 7l por minuto. La solución obtenida en el tanque principal es bombeada, a su vez, hacia el exterior a razón de 8l por minuto. Determinar, en función del tiempo t, la cantidad $y(t)$ de sal en cada instante. ¿Se vaciará, con el paso del tiempo, el tanque principal?

6. Un día se puso a nevar intensamente a ritmo constante desde por la mañana y no paró en todo el día. A las 8:00 se puso en marcha una máquina quitanieves. A las 9:00 la máquina había recorrdio 2 km de la carretera y a las 10:00 ya eran 3 km. La máquina quita un cantidad de nieve constante por hora, esto es, se mueve a una velocidad inversamente proporcional a la cantidad de nieve en cada instante que se va encontrando a su paso. ¿A qué hora comenzó a nevar?

7. **(PARA SABER MÁS)** En el artículo [9] se propone un modelo mejorado del que aparecen en los ejercicios 2.2.2 y 2.4.2, también para describir la evoluciónd de una población afectada por el COVID-19. Busca este artículo y explica en que se basa este modelo (al principio de la sección 2).

Parte II

EDO's de Primer Orden

Capítulo 3

Solución analítica de algunas EDO's

3.1. Introducción

- Lo más importante que debes aprender de este capítulo es que no para cualquier EDO:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

vamos a poder encontrar una "formulita" para la solución $y(t)$ (una expresión analítica explítica). Por cierto, ¿qué quiere decir "formulita"?

- Las funciones que más nos satisfacen son las que llamamos **funciones elementales**: dadas por una expresión analítica en la que aparezcan polinomios, raíces, exponenciales, logarítmos, funciones trigonométricas y funciones trionométricas inversas combinadas mediante sumas, restas, productos, cocientes y composiciones de funciones.

- No todas las funciones son elementales. A veces, seremos capaces de resolver una EDO y obtener algún tipo de "fórmula" o expresión más general para $y(t)$, aunque no sea una función elemental. La función de distribución de una variable aleatoria normal de parámetros 0,1 es un ejemplo de este tipo de funciones. Por eso usamos "la tabla de la normal". Veremos más ejemplos en la siguiente sección.

  Con este tipo de funciones, pasará como ya ocurre con las exponenciales de base e o con los logaritmos: las tendremos "controladas" en el sentido de que, aunque nosotros somos incapaces de hacerlo eficientemente "con nuestras manos", con una calculadora o algún método informático (numérico) podremos calcular cuánto vale $y(t)$ (al menos aproximadamente) en el valor de t que nos interese.

Figura 3.1: Cavernícolas cazando y calculando exponenciales con sus propias manos.

- Por último en muchas ocasiones... encontraremos EDO's para las que no sabremos encontrar ningún tipo de expresión para describir $y(t)$.

3.2. EDO's triviales. Funciones sin primitiva elemental

- Recordemos que llamamos **EDO trivial** a una de la forma $\frac{dy}{dt} = f(t)$, que se resuelve integrando (podemos dar una "formulita" para la $y(t)$):

$$y(t) = \int f(t)dt + C,\ C \in \mathbb{R}$$

- Pero dicha "formulita" no tiene porque ser una expresión que corresponda a una función elemental. Recordemos que una **primitiva** de una función $f(t)$ es otra función $F(t)$ que cumple $F'(t) = f(t)$. Liouville a principios del siglo XIX demostró que:

  Teorema 3.2.1 *No todas las funciones elementales $f(t)$ tienen una primitiva $F(t)$ que sea, a su vez, una función elemental.*

  Sin embargo la derivada de una función elemental $f(t)$ siempre es otra función elemental (porque se aplican las reglas de derivación que nos enseñaron en el instituto).

- El **Algoritmo de Risch** permite identificar qué funciones tienen y cuales no tienen una primitiva elemental. A continuación damos una lista de algunas funciones elementales más conocidas sin primitiva elemental. Para más información, véase [8] y para información aún más técnica y completa [11].

  Alguna primitivas de funciones elementales que no son elementales:

  - $\int \sqrt{x^3 - 1}dx$
  - $\int \frac{1}{lnt}dt$
  - $\int \frac{sen(t)}{t}dt$
  - $\int e^{e^t}dt$
  - $\int ln(ln(t))dt$
  - $\int e^t lntdt$
  - $\int e^{cost}dt$
  - $\int e^{p(t)}dt$
  - $\int sen(p(t))dt$

  donde, en estas dos últimas, $p(t)$ es cualquier polinomio de grado mayor o igual que 2.

Figura 3.2: Con las funciones elementales pasa como con los magos en las novelas de Harry Potter. Si tu eres un mago, tus hijos son magos. Pero si tu eres un mago puede ser que tus padres sean "muggles" (bueno, por lo visto en el ejemplo con magos hay alguna excepción, pero con las funciones no). Por cierto, ¿estudiarán matemáticas en Hogwarts?

3.3. EDO's de variables separables

- Ya vimos en el primer capítulo algo sobre el método de variables separables (véase la ecuación (1.1)). Para que este método pueda aplicarse, la EDO debe ser de la forma $\frac{dy}{dt} = f(y) \cdot g(t)$.
- **Justificación del Método:** Aquel "juego" de multiplicar los dos lados de la ecuación por dt que hacíamos en el primer capítulo "tiene sentido" debido a lo siguiente:

$$y'(t) = f(y(t)) \cdot g(t) \Rightarrow \frac{1}{f(y(t))} y'(t) = g(t) \Rightarrow \int \frac{1}{f(y(t))} y'(t)dt = \int g(t)dt$$

Véase que en la integral de la izquierda, podemos utilizar un cambio de variable $u = y(t)$. Vamos a abusar de la notación y llamar a la variable de nuevo y en lugar de u, obteniendo:

$$\int \frac{1}{f(y)} dy = \int g(t)dt \tag{3.1}$$

- **Soluciones Faltantes:** En el paso anterior hemos dividido por $f(y)$, asumiendo que $f(y) \neq 0$. Hay que estudiar ese caso por separado. Para ello, resolvemos, si es posible, la ecuación funcional $f(y) = 0$. Despues habrá que comprobar si esas soluciones son solución de (1.1). Ver Ejercicio Resuelto 3.3.1.

Ejercicio Resuelto 3.3.1 ***Resuelve la EDO:*** $\mathbf{\frac{dy}{dt} = (1 - y^2) \cdot t}$.

Si $y \neq \pm 1$ entonces de la EDO del enunciado obtenemos que:

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1-y^2} = \int tdt \qquad \Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-y} + \frac{\frac{1}{2}}{1+y} \right) = \int tdt \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1-y} + \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1+y} = \frac{1}{2} t^2 \qquad \Rightarrow ln\,|1-y| + ln\,|1+y| = t^2 + C,\ C \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1-y| \cdot |1+y| = De^{t^2}, D > 0 \qquad \Rightarrow 1 - y^2 = De^{t^2},\ D \neq 0 \Rightarrow \boxed{y(t) = \pm\sqrt{1 - De^{t^2}},\ D \neq 0}$$

Ahora miramos aparte que ocurre cuando $1 - (y(t))^2 = 0$ ($y(t) = \pm 1$). Vemos que en ese caso, podríamos expresar todas las soluciones juntas $y(t) = \pm\sqrt{1 - De^{t^2}},\ D \in \mathbb{R}$.

- **Aun cumpliendo la condición de variables separables es posible que el método no nos permita resolver una EDO.**
  1. En la ecuación (3.1) hay que calcular las primitivas $F(y) = \int \frac{1}{f(y)} dy$ y $G(t) = \int g(t)dt$. Ya vimos en la sección anterior que es posible que esto no pueda hacerse.
  2. Tras calcular esas primitivas, hay que resolver la ecuación funcional $F(y) = g(t)$. No siempre es posible despejar la $y(t)$ de ahí. Véase el Ejercicio Resuelto 3.3.2.

Ejercicio Resuelto 3.3.2 ***Resuelve la EDO:*** $\mathbf{\frac{dy}{dt} = \frac{y}{1 + y^2}}$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+y^2} \Rightarrow \int (\frac{1}{y} + y)dy = \int dt \Rightarrow ln\,|y| + \frac{y^2}{2} = t + C, \qquad C \in \mathbb{R}^2$$

*No es posible despejar explícitamente la $y(t)$ en la ecuación funcional $ln\,|y| + \frac{y^2}{2} = t + C$. Este tipo de ecuaciones funcionales se suelen llamar **trascendentales** y sus soluciones no pueden expresarse en términos de funciones elementales (véase por ejemplo la función W de Lambert). Es posible dar una descripción de $y(t)$ en términos del polinomio de Taylor, pero no nos detendremos en eso ahora.*

3.4. EDO's lineales I: variación de constantes

- En esta sección y en la siguiente consideramos ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \cdot y(t) + r(t)$$

  o equivalentemente (que además nos viene mejor):

$$\frac{dy}{dt} + a(t) \cdot y(t) = r(t) \tag{3.2}$$

- El primer método que presentamos para resolverlas, está muy relacionado con algo que veremos los capítulos sobre EDO's de orden superior.

Método de variación de las constantes:

(1) Primero consideremos la que se llama **ecuación homogénea asociada** a la ecuación (3.2):

$$\frac{dy}{dt} + a(t) \cdot y(t) = 0. \tag{3.3}$$

(2) Obsérvese que se trata de una ecuación en variables separadas. Resolveremos primero esta ecuación, cuya solución general viene dada por

$$y_h(t) = Ce^{\int -a(t)\,dt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(3) Obviamente (3.2) y (3.3) no tienen las mismas soluciones, por eso hemos llamado a la solución de la segunda y_h. Así que en segundo lugar, construiremos una solución y_p de (3.2) a partir de y_h. Vamos a suponer que y_p es de la forma $y_p(t) = C(t)e^{\int -a(t)\,dt}$ y ahora vamos a "hacer variar la constante C" para que y_p cumpla (3.3).

(4) Por último la solución general de (3.2) vendrá dada por $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ (comprobar por qué pasa esto es uno de los ejercicios de este capítulo).

Ejercicio Resuelto 3.4.1 ***Resuelve la EDO:*** $\mathbf{t\frac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t}$

Escribimos la EDO como $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ *para ver claramente que es una ecuación lineal del tipo* (3.2). *La ecuación homogénea asociada será*

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = 0$$

que siendo de variables separadas sabemos resolver. Su solución es

$$y_h(t) = C\frac{1}{t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ahora hacemos variar la constante C para buscar una solución particular de nuestra EDO original que tenga la forma

$$y_p(t) = C(t)\frac{1}{t^2}.$$

La derivada de y_p es $y_p'(t) = C'(t)\frac{1}{t^2} - C(t)\frac{2}{t^3}$, y como sabemos que es solución podemos escribir

$$y_p' + \frac{2}{t}y = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \Rightarrow C'(t)\frac{1}{t^2} - C(t)\frac{2}{t^3} + \frac{2}{t}C(t)\frac{1}{t^2} = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \Rightarrow C'(t) = t \operatorname{sen} t \Rightarrow C(t) = \operatorname{sen} t - t\cos t + D, \; D \in \mathbb{R}$$

Tomando $D = 0$ una solución particular será $y_p(t) = \frac{\operatorname{sen} t - t\cos t}{t^2}$ y la solución general de nuestra EDO inicial es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \frac{1}{t^2}\left(\operatorname{sen} t - t\cos t + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

3.5. EDO's lineales II: factor integrante

- En esta sección veremos otro método para resolver la EDO (3.2) utilizando una técnica de la que hablaremos un poco más en la Sección 3.8.

FACTOR INTEGRANTE PARA RESOLVER EDO's LINEALES

Intentamos relacionar el término a la izquierda del igual en (3.2) con la expresión que aparece al derivar un producto. Para ello multiplicaremos toda la ecuación por una función $\mu(t)$, que llamamos **factor de integración**, obteniendo:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y(t) = \mu(t)r(t) \tag{3.4}$$

Para que lo de la izquierda sea la derivada del producto $\mu(t)y(t)$ tiene que pasar que:

$$\frac{d\mu}{dt} = a(t)\mu(t) \tag{3.5}$$

Conseguir esto es fácil, porque la ecuación anterior es de variables separadas. Obviamente, hay más de una $\mu(t)$ que cumpla (3.5), escogeremos siempre la más sencilla. Si alguien quiere, puede memorizar la fórmula:

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$$

Como en el caso de variables separadas, este método tiene sus obstáculos. Pudiera ser que la primitiva que aparece en la expresión anterior no sea una función elemental.
Escogiendo $\mu(t)$ para que cumpla (3.5), la ecuación (3.4) puede escribirse como:

$$\mu(t) \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt} \cdot y(t) = \mu(t) \cdot r(t)$$

o lo que es lo mismo:

$$(\mu(t) \cdot y(t))' = \mu(t) \cdot r(t)$$

Integramos en ambos lados respecto a t para obtener finalmente que:

$$\mu(t) \cdot y(t) = \int \mu(t) \cdot r(t)\, dt \Longrightarrow y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) \cdot r(t)\, dt$$

De nuevo, pudiera ser que la primitiva que hay que calcular no fuera una función elemental.

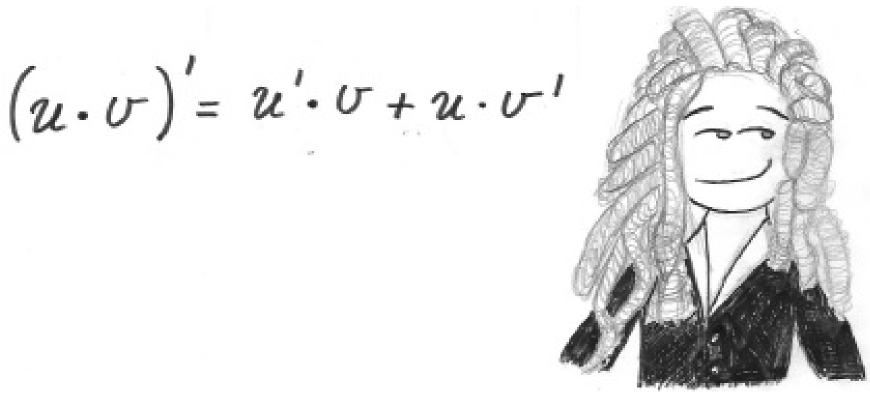


Figura 3.3: La fórmula de la derivada del producto, se conoce también como *Regla de Leibniz.* #datito #grandesexitosdelasderivadas

Ejercicio Resuelto 3.5.1 ***Resuelve la EDO:*** $\mathbf{\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{t} + 2}$

Escribimos la EDO como hemos dicho:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t} \cdot y = 2$$

y multiplicamos todo por $\mu(t)$*:*

$$\mu(t) \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}\mu(t) \cdot y(t) = 2 \cdot \mu(t) \tag{3.6}$$

Para que lo de la izquierda sea la derivada de $\mu(t) \cdot y(t)$*, necesitamos que:*

$$\mu'(t) = \frac{1}{t}\mu(t) \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow ln\,|\mu(t)| = ln\,|t| + C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu(t) = Dt,\ D \neq 0$$

Podemos coger el $\mu(t)$ *que mejor nos venga. Cojamos sencillamente* $\mu(t) = t$*. Así que* (3.6) *nos queda:*

$$t \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = 2t \Rightarrow (t \cdot y(t))' = dt \Rightarrow t \cdot y(t) = t^2 + C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = t + \frac{C}{t},\ C \in \mathbb{R}$$

Ejercicio Resuelto 3.5.2 ***Resuelve el PVI:*** $\mathbf{\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \frac{y}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \\ y(1) = 2 \end{cases}}$

Esta vez usaremos las fórmulas para ahorrar tiempo:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{dt}{1+t^2}} = e^{arctg(t)}$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{arctg(t)}} \int e^{arctg(t)} \frac{1}{1+t^2} dt = 1 + \frac{C}{e^{arctg(t)}}$$

De la condición inicial obtenemos:

$$y(1) = 1 + \frac{C}{e^{arctg(1)}} = 2 \Rightarrow C = e^{\frac{\pi}{4}}$$

así que la única solución del PVI es:

$$y(t) = 1 + e^{\left(\frac{\pi}{4} - arctg(t)\right)}$$

3.6. EDO's homogéneas

- Una función real de variable real $f(t)$ decimos que es **homogénea de orden** k si cumple la siguiente propiedad:
$$\forall\lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda t) = \lambda^k \cdot f(t)$$
Las funciones lineales cumplen esa propiedad para $k = 1$.

- La misma definición puede hacerse para una funciones reales en varias variables $F(t, y)$. En este caso, la propiedad es:
$$\forall\lambda \in \mathbb{R},\ F(\lambda t, \lambda y) = \lambda^k \cdot F(t, y)$$

- Una EDO es **homogénea** si es de la forma:
$$M(t, y)\frac{dy}{dt} + N(t, y) = 0$$
donde $M(t, y)$, $N(t, y)$ son homogéneas del mismo orden. O alternativamente si es de la forma:
$$\frac{dy}{dt} = F(t, y)$$
donde $F(t, y)$ es una función homogénea de orden 0.

- Para resolver estas ecuaciones, vamos a hacer un **cambio de variable**. Definimos $\boxed{u = \frac{y}{t}}$. En cuyo caso tenemos que:
$$y = u \cdot t, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot t + u \tag{3.7}$$
Sustituimos y, $\frac{dy}{dt}$ en la EDO. Ocurre lo siguiente:

> **Teorema 3.6.1** *Tras realizar ese cambio de variable, la ecuación que nos queda depende de u y de t y es de variables separables.*

Recordemos: no nos han preguntado cuánto vale $u(t)$, si no cuánto vale $y(t)$. Así que para terminar recuperamos $y(t) = t \cdot u(t)$.

Ejercicio Resuelto 3.6.1 ***Resuelve la EDO*** $\mathbf{ty\frac{dy}{dt} + t^2 + y^2 = 0}$.

Es una EDO homogénea de orden 2 ya que $\forall\lambda \in \mathbb{R}$:
$$M(\lambda t, \lambda y) = (\lambda t)(\lambda y) = \lambda^2(ty) = \lambda^2 M(t, y), \qquad N(\lambda t, \lambda y) = (\lambda t)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2(t^2 + y^2) = \lambda^2 N(t, y)$$
Realizamos el cambio de variable $u = \frac{y}{t}$ y sustituimos en la EDO de acuerdo con (3.7):
$$t(ut)\left(\frac{du}{dt}t + u\right) + t^2 + (ut)^2 = 0 \Longrightarrow \frac{u}{1 + 2u^2} \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{1}{t} \Rightarrow \int \frac{u}{1 + 2u^2}du = -\int \frac{dt}{t} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow ln\left|1 + 2u^2\right| = -4ln\,|t| + C,\ C \in \mathbb{R} \Longrightarrow (t^4 + 2t^4u^2) = D, D \neq 0$$
Habrá que tener cuidado cuando $t = 0$ por lo que acabamos de hacer. Ahora, como sabemos que $u = \frac{y}{t}$ volvemos a sustituir en la última expresión y llegamos a:
$$t^4 + 2t^2u^2 = D, D \neq 0$$
Ecuación funcional que podemos resolver. Omitimos los detalles.

3.7. EDO's exactas

- Una EDO del tipo:
$$P(t,y)+Q(t,y)\frac{dy}{dt}=0$$
es **exacta** si existe una función de dos variables $U(t,y)$ tal que:
$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,y)=P(t,y),\qquad \frac{\partial U}{\partial y}(t,y)=Q(t,y) \tag{3.8}$$

- En otras palabras, la EDO es del tipo:
$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}(t,y)\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial y}(t,y)\right)\cdot\frac{dy}{dt}=0 \tag{3.9}$$

- El siguiente resultado nos permite comprobar de manera más sencilla si se cumple la condición (3.8):

> **Teorema 3.7.1 (Teorema de Schwarz, Clairaut o de Young)** *La función $U(t,y)$ de la condición (3.8) existe si y sólo si:*
> $$\frac{\partial P}{\partial y}(t,y)=\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y) \tag{3.10}$$

- Es fácil ver que para resolver (3.9) sólo tenemos que integrar contra t en los dos lados de la igualdad y resolver la ecuación funcional:
$$U(t,y)=C,\qquad C\in\mathbb{R}$$

- Encontrar esa $U(t,y)$ no tiene por qué ser inmediato. Puede verse cómo hacerlo de forma ordenada en el siguente ejemplo:

Ejercicio Resuelto 3.7.1 ***Resuelve la EDO*** $\mathbf{cos(y)+(y^2-tsen(y))\frac{dy}{dt}=0}$.

Vemos que $\frac{\partial}{\partial y}(cos(y))=\frac{\partial}{\partial t}(y^2-tsen(y)$*. Por lo tanto la EDO es exacta. Sabemos entonces que:*

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial t}(t,y)=cos(y)\\ \frac{\partial U}{\partial y}(t,y)=y^2-tsen(y)\end{cases}$$

De la primera ecuación, integrando contra y, sacamos:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,y)=cos(y)\Longrightarrow U(t,y)=tcos(y)+\phi(y)\Longrightarrow\frac{\partial U}{\partial y}(t,y)=-tsen(y)+\frac{\partial\phi}{\partial y}(y)$$

Igualanado ahora:

$$y^2-tsen(y)=-tsen(y)+\frac{\partial\phi}{\partial y}(y)\Rightarrow\phi(y)=\frac{y^3}{3}$$

y llegamos a que:

$$U(t,y)=tcos(y)+\frac{y^3}{3}$$

Las soluciones de la EDO son, por lo tanto, las de la ecuación funcional siguiente, que no se pueden expresar con fórmulas analíticas sencillas:

$$tcos(y)+\frac{y^3}{3}=C,\ C\in\mathbb{R}\Longrightarrow 3tcos(y)+y^3=D,\ D\in\mathbb{R}$$

3.8. Más métodos. Factores integrantes y cambios de variable.

- Existen más métodos para resolver EDO's de los que hemos visto en este curso.
- Para terminar el capítulo, presentaremos dos grandes grupos de "trucos" generales que sí debemos conocer. Los dos permiten convertir otras EDO's en alguna de las que hemos estudiado en este capítulo.

Factor integrante: Ya hemos visto un ejemplo en la sección de EDO's lineales. Dada una EDO

$$\frac{dy}{dy} = f(t, y)$$

un factor integrante es una función $\mu(t, y)$ que se multiplica a los dos lados de la ecuación:

$$\mu(t, y) \cdot \frac{dy}{dt} = \mu(t, y) \cdot f(t, y)$$

Este método se usa, por ejemplo, para convertir EDO's en otras que sean exactas. Se intentan buscar en primer lugar funciones lo más sencillas posibles (que sólo dependan de y o que dependan de xy, por ejemplo).

Cambio de variable: Ya hemos visto un ejemplo en la sección de EDO's homogéneas. Partimos de una EDO

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \tag{3.11}$$

- Se definen nuevas variables u, s que dependan de y, t.
- Se calcula también cuánto valen y, t y $\frac{dy}{dt}$ en términos de u y de s.
- Se sustituyen las expresiones del paso anterior en (3.11), obtenéndose una nueva EDO en la que sólo aparecen las nuevas variables u y s, que esperamos que sea una de las que sabemos resolver.
- Se obtiene una solución $u(s)$ de la nueva EDO.
- Después se sustituyen u y s en dicha solución por sus expresiones en función de y, t e intentamos conseguir una expresión para $y(t)$.

- Por supuesto hay ciertos criterios a la hora de buscar factores integrantes o de realizar cambios de variables. Pero no los veremos en este curso.
- En los ejercicios hay algún ejemplo concreto de este tipo de manipulaciones.

Hoja 3: Solución Analítica de algunas EDO's.

1. Resolver la siguientes EDO's de variables separadas:

   a) $4yy' + t = 0$

   b) $y'\sqrt{t^2+1} = te^{-y}$

   c) $y' = (t-y)^2 + 1$.

2. Resolver la siguientes EDO's lineales:

   (a) $ty' + (1-t)y = te^t$,

   (b) $y' = \frac{1}{e^y - t}$,

   (c) $y' + y \operatorname{tg} t = \sec^2 t$,

   (d) $y' = t + y$,

   (e) $y' = 1 + t^2 y$,

   (f) $y' - \frac{2}{1+t}y = (t+1)^3$.

3. Sea la EDO lineal $y'(t) + a(t)\cdot y(t) = r(t)$. Supongamos que tiene una solución $y_p(t)$. Demuestra que para cualquier solución $y_h(t)$ de la ecuación homogénea asociada $y'(t) + a(t)\cdot y(t) = 0$, se tiene que $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ es solución de la EDO original.

4. Resolver la siguientes EDO's homogeneas:

   (a) $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2+y^2}{ty}$

   (b) $t(t^2 - 6y^2)\frac{dy}{dt} = 4y(t^2 + 3y^2)$.

   (c) $\frac{dy}{dt} = \frac{(t-y+1)^2}{t-y)^2}$.

   (d) $y - (t+y)\cdot\frac{dy}{dt} = 0$,

   (e) $2t^3\cdot\frac{dy}{dt} = y(y^2 + 3t^2)$,

   (f) $\frac{dy}{dt} = \frac{y+t}{y-t}$.

5. Resolver la siguientes EDO's exactas:

   (a) $-(2y + te^{-y})\frac{dy}{dt} + e^{-y} = 0$,

   (b) $(t^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\frac{dy}{dt} = -2ty\log y$,

   (c) $(3y^2 - t) + (2y^3 - 6ty)\frac{dy}{dt} = 0$, sabiendo que el factor de integración es de la forma $\mu(y^2+t)$,

   (d) $(t^2 - y) - t\cdot\frac{dy}{dt} = 0$,

   (e) $t^2 + y^2 + t + 2ty\frac{dy}{dt}$.

6. Halla las curvas que tienen la longitud de la tangente en cada punto (el segmento contenido en la recta tangente cuyos a la curva en cada punto cuyos extremos son el eje OX y el punto de tangencia) constante.

7. Dada la EDO $y + ty' = -\dfrac{2ye^{1/y}}{y - 2e^{1/y}}$. De entre los métodos principales que hemos visto en este tema (EDO's triviales, variables separables, EDO's lineales, EDO's homogéneas y EDO's exactas) ¿cuales puedes utilizar para resolverla? Elige el que quieras y resuélvela.

8. Dada la EDO $\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{t} + 3t$. De entre los métodos principales que hemos visto en este tema (EDO's triviales, variables separables, EDO's lineales, EDO's homogéneas y EDO's exactas) ¿cuales puedes utilizar para resolverla? Elige el que quieras y resuélvela.

9. Dada la EDO $(2te^{t/y} - y)y' = 2ye^{t/y}$:

   (a) De entre los métodos principales que hemos visto en este tema (EDO's triviales, variables separables, EDO's lineales, EDO's homogéneas y EDO's exactas) ¿puedes utilizar alguno de ellos para resolverla?

   (b) Resuélvela por el método que escogieras en el apartado anterior.

   (c) Vamos a resolverla de otra forma. Encuentra un factor integrante que dependa sólo de y ($\mu(y)$) que, al ser multiplicado a los dos miembros de la EDO, de lugar a una EDO exacta.

   (d) Utiliza el factor integrante anterior para resolver la EDO como una EDO exacta.

10. Dada la EDO $\frac{dy}{dt} = -\frac{(y^3+ty^2+y)}{t^3+t^2y+t}$. Busca un factor integrante del tipo $\mu(t\cdot y)$ (una función que dependa de $(t\cdot y)$ como por ejemplo $\mu(t\cdot y) = \frac{1+ln(t\cdot y)}{(t\cdot y)^2}$) que la convierta en exacta. Después resuélvela.

11. Resuelve la EDO $2ty + (y + y^2 - t^2)\cdot y' = 0$.

12. Dada la EDO $y' = 2(t+y)$:

   (a) Resuélvela por los dos métodos que hemos explicado para EDO's lineales.

   (b) Conviértela en una EDO de variables separadas con el cambio de variable $u = t + y$ y después resuélvela.

13. **La Ecuación de Bernoulli:**

   (a) Dada una EDO del estilo $\frac{dy}{dt} + a(t)\cdot y = r(t)y^n$. ¿El cambio de variable $u = \frac{1}{y^{n-1}}$ en qué tipo de ecuacíon la convierte? Resuélvela.

   (b) Resuelve la EDO $t\cdot\frac{dy}{dt} + y = t^4y^3$.

14. **La ecuación de Ricatti:** Consideramos una ecuación diferencial del tipo $y' = f(t)y^2 + g(t)y + h(t)$. ¿Qué tipo de EDO tenemos si $f(t) = 0$?, ¿y si $h(t) = 0$? Si ni $f(t)$ ni $h(t)$ son constantemente nulas estamos ante una Ecuación de Ricatti, que en general no tendrá solución. Sin embargo, si conocemos una solución particular podemos transformarla en una Ecuación de Bernuilli, la cual ya sabemos resolver. Sea
$$y' = ty^2 + y + \frac{1}{t^2}.$$

   (a) Encontrar una solución particular $y_1(t)$.

   (b) Realizar el cambio de variable $u(t) = y(t) - y_1(t)$ y resolver la ecuación de Bernoulli resultante con "función-incógnita" u.

   (c) Dar la solución general.

Capítulo 4

Enfoques cualitativo y numérico, existencia y unicidad de soluciones

4.1. Una herramienta para el tratamiento cualitativo: campos de pendientes

- Dada una ecuación diferencial $dy/dt = f(t, y)$ su **campo de pendientes** o **campo de direcciones** es un diagrama formado por varios "pequeños segmentos" colocados en puntos del plano (t, y), todos del mismo tamaño. Idealmente deberíamos representar un segmento por cada punto del plano pero, como eso es imposible, intentaremos representar "cuantos más mejor". El segmento correspondiente a un punto (t_0, y_0) debe tener pendiente $f(t_0, y_0)$. Como consecuencia:

> Se debe cumplir que el segmento correspondiente al punto (t_0, y_0) sea tangente a la gráfica de la solución de la EDO que pasa por ese punto.

- Así como una EDO determina un campo de pendientes, un campo de pendientes también determina una EDO y sus soluciones.

- Para dibujar el campo de pendientes de $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ debemos dibujar en cada punto (t, y) un segmento paralelo al vector $(1, f(t, y))$, pues éste tiene pendiente exactamente $y' = f(t, y)$ (ver imagen del Ejercicio Resuelto 4.1.1).

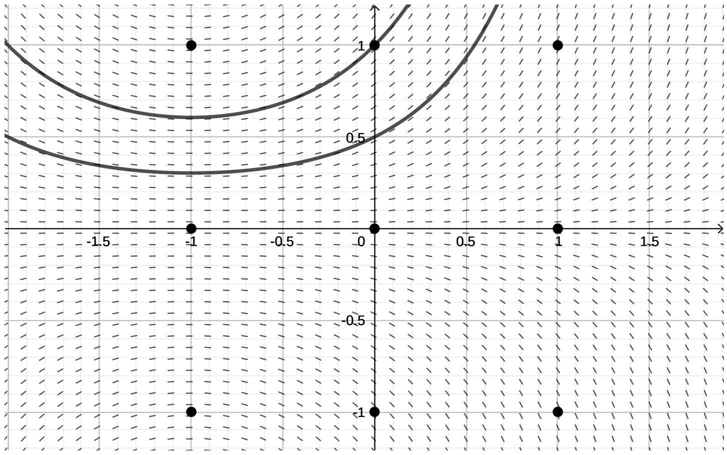
- **¿Para qué sirven los campos de pendientes?**

> El campo de pendientes de una EDO nos permite intuir el comportamiento cualitativo de las gráficas de las soluciones e incluso llegar a esbozarlas, a pesar de no disponer de la fórmula explícita de las mismas.

Ejercicio Resuelto 4.1.1 ***Dibuja el campo de pendientes de la EDO*** $\mathbf{\frac{dy}{dt} = (t+1)y}$. ***Dibuja, sobre dicho campo, dos soluciones de la EDO.***

Nosotros en el dibujo hemos usado un programa informático y hemos pintado un montón de "pequeños segmentos". Pero para dibujar el campo a mano, lo suyo sería hacer una tabla de valores. Hemos marcado en el dibujo, los puntos correspondientes a la tabla que hemos hecho "a mano".

t	y	$(t+1)y$
-1	-1	0
-1	0	0
-1	1	0
0	-1	-1
0	0	0
0	1	1
1	-1	-2
1	0	0
1	1	2



La EDO la podemos resolver por el método de separación de variables.

$$\frac{dy}{dt} = (t+1)y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{t+1}{dt} \Rightarrow y = e^{t^2/2+t+C} = De^{t+2/2+t}$$

Nosotros hemos representado las soluciones correspondientes a $D = 1$ (arriba) y $D = 0{,}5$ (abajo). Nótese que todas las soluciones son dilataciones verticales las unas de las otras.

4.2. Isoclinas

- Dada una EDO, se denomina **isoclina** al lugar geométrico de los puntos del plano a los que en el correspondiente campo de pendientes, les corresponden segmentos con la misma pendiente.

  La isoclina $f(t, y) = 0$ informa de la posible situación de máximos y mínimos locales en las gráficas de las soluciones.

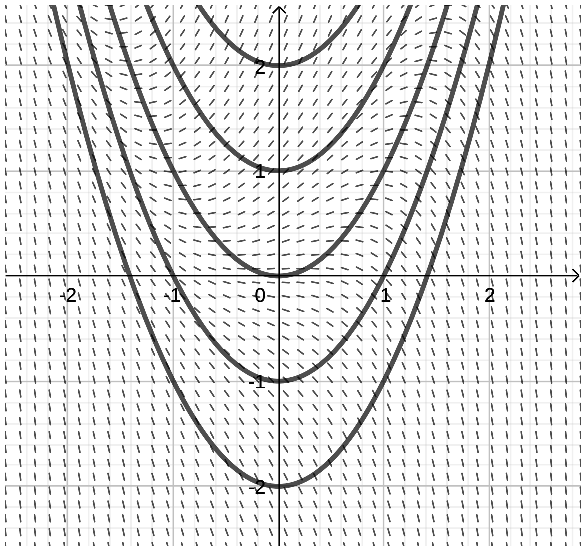
  Las isoclinas pueden ayudarnos a estudiar el campo de pendientes correspondiente a una EDO.

Ejercicio Resuelto 4.2.1 ***Considera la ecuación diferencial*** $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{y} - \mathbf{t^2}$***. Calcula y representa las isoclinas asociadas a los valores*** $\mathbf{y}' = \mathbf{-2, -1, 0, 1, 2}$***. Después encuentra una solución de la EDO (por tanteo, sin resolver la EDO), calcula sus extremos locales y comprueba que corresponden a puntos en la isoclina*** $y' = 0$***.***

Comenzamos calculando las isoclinas:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) = -2 \iff y = t^2 - 2 \\ y' = f(t, y) = -1 \iff y = t^2 - 1 \\ y' = f(t, y) = 0 \iff y = t^2 \\ y' = f(t, y) = 1 \iff y = t^2 + 1 \\ y' = f(t, y) = 2 \iff y = t^2 + 2 \end{cases}$$

Por último, vemos que una posible solución es $y(t) = t^2 + 2t + 2$. Es una parábola que "mira hacia arriba". Sòlo tiene un extremo, un mínimo global, que se alcanza en $t = -1$ y vale $y = 1$. Efectivamente el punto $-1, 1$ está en la isoclina de ecuación $y = t^2$.



- Si una isoclina continene a una línea recta no vertical, dicha recta (la función asociada a su ecuación explítica) es una solución de la EDO.

- **Dos casos especiales:** En los campos de pendientes de una EDO del tipo $dy/dt = F(t)$ a todos los puntos con la misma abscisa (coordenada t) les corresponde un segmento con la misma pendiente (las isoclinas son conjuntos de una o más rectas verticales). Por el contrario, en los campos de pendientes de EDO's del tipo $dy/dt = G(y)$, que se llaman **autónomas**, a todos los puntos con una misma ordenada (coordenada y) les corresponde un segmento con la misma pendiente (las isoclinas son conjuntos de una o más rectas horizontales). El estudio cualitativo de este último tipo de ecuaciones diferenciales a través de su campo de pendientes se verá son en detalle en la Sección 5.4.

4.3. Método de Euler I: una herramienta para el tratamiento numérico

- Vamos a utilizar las ideas de los campos de pendientes de la sección anterior para, no sólo hacer esbozos de las soluciones, sino calcular soluciones numéricas aproximadas de problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Dada una función $y = f(t)$, una **solución numérica aproximada** es una tabla:

t	$\widetilde{y}$
t_0	$\widetilde{y}_0$
t_1	$\widetilde{y}_1$
$\vdots$	$\vdots$
t_n	$\widetilde{y}_n$

donde $\widetilde{y}_k \approx y(t_k)$. Habitualmente, los valores $t_0, t_1, \ldots, t_n$ suelen elegirse **equidistantes** ($t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \ldots = t_n - t_{n-1}$).

- **Idea del Método:** El Método de Euler nos permite calcular una solución numérica aproximada para un PVI:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

"cerca" del punto t_0. Gracias a la condición incial, nosotros sabemos que la gráfica de $y(t)$ pasa por el punto (t_0, y_0) y sabemos el valor de la pendiente $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$.

La recta tangente a la gráfica de $y(t)$ en el punto (t_0, y_0) es "la recta que mejor aproxima a la gráfica cerca de (t_0, y_0)". Con esto queremos decir que si la recta tiene ecuación $\widetilde{y}(t)$ "cerca" del punto t_0 el error $|y(t) - \widetilde{y}(t)|$ es "pequeño".

En base a lo anterior, la recta tangente tiene ecuación $\widetilde{y}(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0)$. Por lo tanto, para cualquier valor t_1 cercano a t_0, si aproximamos la curva de la gráfica por la recta tangente, obtenemos una aproximación $y(t_1) \approx \widetilde{y}_1$, donde $(t_1, \widetilde{y}_1)$ es el punto que esta en la recta tangente que tiene por abscisa t_1.

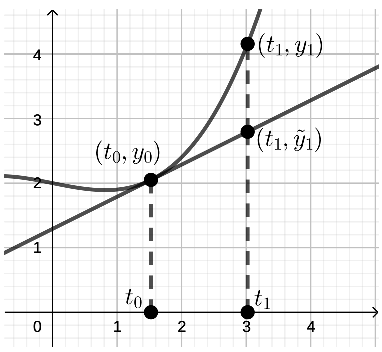


Figura 4.1: En la imagen podemos ver la gráfica de cierta función $y(t)$. En este caso $t_0 = 1,5$ e y_0 es un valor muy próximo a 2. Por otro lado, $t_1 = 3$ y vemos que, aunque el valor de la función en t_1 es un número y_1 mayor que 4, nosotros lo vamos a aproximar por el valor $\widetilde{y}_1$ correspondiente a la estimación de la recta tangente, y que es un número menor que 3.

Basándonos en que la gráfica pasa "aproximadamente" por el punto $(t_1, \widetilde{y}_1)$ con pendiente $y'(t_1) \approx f(t_1, \widetilde{y}_1)$, repetimos lo anterior para obtener $(t_2, \widetilde{y}_2)$ y así sucesivamente.

- **Descripción detallada del Método:**

MÉTODO DE EULER

Dado el PVI:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Fijamos un **paso** lo más pequeño posible, que se suele denotar por h o por Δt. Definimos ahora:

$$t_1 = t_0 + h,\ t_2 = t_1 + h,\ \ldots,\ t_n = t_{n-1} + h$$

Ahora es cuando empieza el método propiamente dicho:

Paso 0: $\widetilde{y}_0 = y_0$.

Paso 1: $\widetilde{y}_1 = \widetilde{y}_0 + f(t_0, \widetilde{y}_0) \cdot h$.

Paso 2: $\widetilde{y}_2 = \widetilde{y}_1 + f(t_1, \widetilde{y}_1) \cdot h$.

$\vdots$

Paso k: $\widetilde{y}_k = \widetilde{y}_{k-1} + f(t_{k-1}, \widetilde{y}_{k-1}) \cdot h$.

$\vdots$

Ejercicio Resuelto 4.3.1 ***Dado el PVI*** $\begin{cases} y'(t) = t^2 - t \\ y(0) = 0 \end{cases}$ ***utiliza el método de Euler en el intervalo*** $[\mathbf{0}, \mathbf{2}]$ ***con paso*** $\mathbf{h = 0{,}5}$***, para dar una solución aproximada.***

En este caso, la $f(t, y)$ en nuestra fórmula es $t^2 - t$. Por tanto, la recurrencia que hay que seguir es $\widetilde{y}_{k+1} = \widetilde{y}_k + (t_k^2 - t_k) \cdot 0,5$ y la tabla correspondiente:

t	$\widetilde{y}$
$t_0 = 0$	$\widetilde{y}_0 = 0$
$t_1 = 0,5$	$\widetilde{y}_1 = \widetilde{y}_0 + (t_0^2 - t_0) \cdot 0,5 = 0$
$t_2 = 1$	$\widetilde{y}_2 = \widetilde{y}_1 + (t_1^2 - t_1) \cdot 0,5 = -0,125$
$t_3 = 1,5$	$\widetilde{y}_3 = \widetilde{y}_2 + (t_2^2 - t_2) \cdot 0,5 = -0,125$
$t_4 = 2$	$\widetilde{y}_4 = \widetilde{y}_3 + (t_3^2 - t_3) \cdot 0,5 = 0,25$

Ejercicio Resuelto 4.3.2 ***Dado el PVI*** $\begin{cases} y'(t) = y + t + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ ***utiliza el método de Euler en el intervalo*** $[\mathbf{0}, \mathbf{2}]$ ***con paso*** $\mathbf{h = 0{,}5}$.

En este caso, $f(t, y) = y + t + 1$. La recurrencia que hay que seguir es $\widetilde{y}_{k+1} = \widetilde{y}_k + (\widetilde{y}_k + t_k + 1) \cdot 0,5$ y la tabla correspondiente:

t	$\widetilde{y}$
$t_0 = 0$	$\widetilde{y}_0 = 0$
$t_1 = 0,5$	$\widetilde{y}_1 = \widetilde{y}_0 + (\widetilde{y}_0 + t_0 + 1) \cdot 0,5 = 0,5$
$t_2 = 1$	$\widetilde{y}_2 = \widetilde{y}_1 + (\widetilde{y}_1 + t_1 + 1) \cdot 0,5 = 1,5$
$t_3 = 1,5$	$\widetilde{y}_3 = \widetilde{y}_2 + (\widetilde{y}_2 + t_2 + 1) \cdot 0,5 = 3,25$
$t_4 = 2$	$\widetilde{y}_4 = \widetilde{y}_3 + (\widetilde{y}_3 + t_3 + 1) \cdot 0,5 = 6,125$

4.4. Método de Euler II: el error

- Al usar el método de Euler para aproximar los valores $\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots$ evidentemente se comete un error. El error cometido en el instante t_k se define como $error(t_k) = y(t_k) - \widetilde{y}_k$. Estimar cómo de grande es ese error es un problema muy importante.

- Sí que daremos unos "principios". Son unas hipótesis un poco vagas. En la práctica suelen funcionar bien y nos inducen a pensar que el error no va a ser muy grande. Pero en realidad, y esto hay que tenerlo muy claro, no nos garantizan nada. Más bien al contrario: si un PVI no cumple alguno de los principios, deberíamos desconfiar de nuestra solución aproximada.

- **Principio del paso pequeño:** Cuanto más cerca están los t_i entre sí, cabría esperar que el error fuera menor... Esto suele ser cierto, pero no es necesariamente así en todos los casos.

- **Principio de la acumulación del error:** el error cometido en la aproximación $\widetilde{y}_{i+1}$ es típicamente mayor que el cometido en $\widetilde{y}_i$.

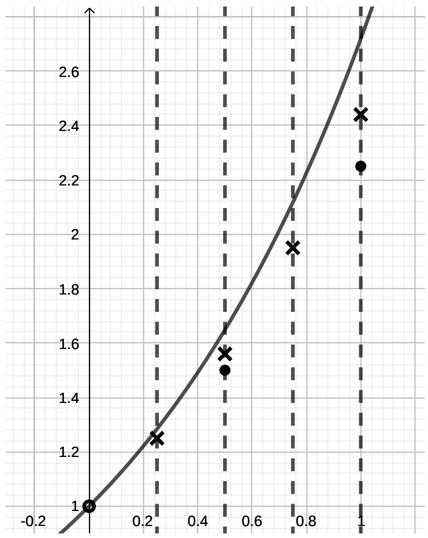
Ejercicio Resuelto 4.4.1 ***Sea el PVI correspondiente a la ecuación* $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$ *y a la condición inicial* $y(0) = 1$*. (a) Resuélvelo analíticamente. (b) Aplica el método de Euler en el intervalo* $[0, 1]$ *con paso* $h = 0,5$*. (c) Aplica el método de Euler en el intervalo* $[0, 1]$ *con paso* $h = 0,25$*. (d) Representa la gráfica de la solución, y los puntos correspondientes a la solución numérica aproximada.***

(a) La solución es (variables separadas) $y(t) = e^t$.

(b)	t	$\widetilde{y}$
	$t_0 = 0$	1
	$t_1 = 0,5$	$\widetilde{y}_1 = 1 + 0,5 \cdot 1 = 1,5$
	$t_2 = 1$	$\widetilde{y}_2 = 1,5 + 0,5 \cdot 1,5 = 2,25$

(c)	t	$\widetilde{y}$
	$t_0 = 0$	1
	$t_1 = 0,25$	$\widetilde{y}_1 = 1 + 0,25 \cdot 1 = 1,25$
	$t_2 = 0,5$	$\widetilde{y}_2 = 1,25 + 0,25 \cdot 1,25 \approx 1,56$
	$t_3 = 0,75$	$\widetilde{y}_3 \approx 1,56 + 0,25 \cdot 1,56 \approx 1,95$
	$t_4 = 1$	$\widetilde{y}_4 \approx 1,95 + 0,25 \cdot 1,95 \approx 2,44$

(d) Los puntos negros corresponden a la solución numérica aproximada obtenida en el apartado (b) y las aspas a la del apartado (c). Suele ser habitual unir los puntos con segmentos, aunque en este caso no lo haremos para que se aprecie mejor.



- **Estimación del Error.** Utilizando el desarrollo de Taylor (suponiendo que $y(t)$ lo admita) podemos estimar el error cometido al utilizar el método de Euler. Sólo explicaremos como estimar el error cometido en el primer paso ($error(t_1)$).

Sea la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ sujeta a la condición inicial $y(t_0) = y_0$. Supongamos que la solución $y(t)$ es de clase C^2. Entonces (recordemos que $t_1 = t_0 + h$):

$$y(t_1) = y(t) + y'(t_0)h + error(t_1)$$

Por el **Teorema del Valor Medio del Resto de Lagrange** sabemos que:

$$error(t_1) = \frac{y''(c)}{2!}h^2 \text{ para algún } c \in [t_0, t_1]$$

- **Principio de la segunda derivada:** Lo anterior nos da otra idea importante: en principio, cuanto menor (en valor absoluto) es la segunda derivada de $y(t)$ "cerca" de t_0, cabría esperar que el error cometido fuera menor.

Ejercicio Resuelto 4.4.2 *Considera el siguiente PVI:* $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y + t \\ y(0) = 100 \end{cases}$

(a) ***Resuélvelo:***

Es una ecuación lineal, así que se resuelve usando un factor integrante $\mu(t)$*:*

$$\frac{dy}{dt} + y = t \Longrightarrow \mu \cdot \frac{dy}{dt} + \mu \cdot y = \mu \cdot t$$

Si $\mu' = \mu$*, o sea* $\mu(t) = e^t$*, entonces de la ecuación anterior obtenemos:*

$$(e^t \cdot y)' = t \cdot e^t \Longrightarrow e^t \cdot y = \int t \cdot e^t dt = t \cdot e^t - \int e^t dt = (t-1)e^t + C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(t) = (t-1) + \frac{C}{e^t} \Longrightarrow y(0) = (0-1) + C = 100 \Longrightarrow C = 101 \Longrightarrow y(t) = (t-1) + 101e^{-t}$$

(b) ***Utiliza el método de Euler, con paso*** $h = 1$***, para obtener una solución numérica aproximada en el intervalo*** $[0,3]$ ***del PVI anterior.***

Sean $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$*, sea* $f(t,y) = -y + t$*. Lo que se nos pide es la tabla:*

t	$\widetilde{y}$
0	100
1	$100 + f(0,100) \cdot 1 = 0$
2	$0 + f(1,0) \cdot 1 = 1$
3	$1 + f(2,1) \cdot 1 = 2$

(c) ***Haz una estimación del error cometido en el primer paso utilizando el procedimiento con el Polinomio de Taylor de orden 2.***

Calculamos en primer lugar la segunda derivada de y, $y''(t) = 101e^{-t}$*. Tenemos que* $t_0 = 0, t_1 = 1, h = 1$*, luego aplicando la fórmula del error,*

$$error(t_1) = \frac{y''(c)}{2!}h^2 = \frac{101e^{-c}}{2!} \text{ para algún } c \in [t_0, t_1]$$

Como $e^{-c} \leq 1$ *para todo* $c \in [0,1]$ *concluimos que* $|error(t_1)| \leq 50{,}5$*.*

(d) ***Conociendo la solución*** $y(t)$ ***del PVI (primer apartado). Calcula (ayudándote de la calculadora) para*** $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$ ***los valores exactos de*** $y(t)$ ***y los errores*** $error(t_k)$***. ¿Ha funcionado bien el método de Euler? ¿A qué factores crees que ha podido deberse? ¿Ha sido buena la estimación del error del apartado anterior para el primer paso?***

Representándolo todo en la misma tabla vemos que:

t	$\widetilde{y}$	y	$error$
0	100	100	0
1	0	$(1-1) + 101e^1 \approx 37{,}16$	$37{,}16$
2	1	$(2-1) + 101e^2 \approx 14{,}67$	$13{,}67$
3	2	$(3-1) + 101e^3 \approx 7{,}03$	$5{,}03$

La aproximación no ha funcionado nada bien. Esto se debe en parte al tamaño tan grande del paso, pero sobre todo al hecho de que la derivada de $y(t)$ *en* $t = 0$ *es "enorme".*

La estimación del error del apartado (c) sin embargo ha funcionado bastante bien pues $|error(t_1)| = 37{,}16 \leq 50{,}5$*.*

4.5. Más sobre métodos numéricos

- **Para saber más:** Existen muchos métodos numéricos más, y existen algunos más potentes. En el grado en Matemáticas se dedica prácticamente una asignatura entera a estas cuestiones, y sólo se vislumbra el principio de los problemas de verdad.
- Mostramos como ejemplo el siguiente método:

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Dado el PVI:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Fijamos un **paso** lo más pequeño posible, que se suele denotar por h o por Δt. Definimos ahora:

$$t_1 = t_0 + h,\ t_2 = t_1 + h,\ \ldots,\ t_n = t_{n-1} + h$$

Fijamos $\widetilde{y}_0 = y_0$ y las sucesivas aproximaciones se definen mediante la regla:

$$\widetilde{y}_{k+1} = \widetilde{y}_k + \frac{h}{6}(a_{k1} + 2a_{k2} + 2a_{k3} + a_{k4})$$

donde

$$a_{k1} = f(t_k, \widetilde{y}_k),\quad a_{k2} = f(t_k + \frac{h}{2}, \widetilde{y}_k + \frac{h}{2}a_{k1}),\quad a_{k3} = f(t_k + \frac{h}{2}, \widetilde{y}_k + \frac{h}{2}a_{k2}),\quad a_{k4} = f(t_{k+1}, \widetilde{y}_k + ha_{k3})$$

El lector interesado puede aprender más sobre esté método en [1, Sección 7.3].

- Como dicen en [1]: *Los métodos numéricos, cuando funcionan, llegan a ser excelentes. Pero a veces fallan. Debemos estar siempre alerta ante esta posibilidad, y prepararnos para usar un enfoque alternativo.*
- Hay ecuaciones diferenciales que son particularmente "resistentes" a los métodos numéricos. Por ejemplo $dy/dt = e^t sen(y)$ es una de ellas.

Ejercicio Resuelto 4.5.1 Sea el PVI $\begin{cases} y' = -\operatorname{sen} t \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **que tiene por solución $\mathbf{y(t) = \cos t}$. Aplicar dos iteraciones con paso $h = 1$ tanto del Método de Euler como del de Runge-Kutta. Comparar las soluciones que dan ambos métodos y determinar cuál es más preciso.**

Determinemos en primer lugar los valores de a_{0i}, $1 \leq i \leq 4$, para aplicar el método de Runge-Kutta. Recordar que $\widetilde{y}_0 = y_0$, $t_0 = 0$ y llamemos $f(t,y) = -\operatorname{sen} t$.

$$a_{01} = 0; a_{02} = -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right); a_{03} = -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right); a_{04} = -\operatorname{sen}(1)$$

Así tenemos $\widetilde{y}_1 = \widetilde{y}_0 + \frac{1}{6}(a_{01} + 2a_{02} + 2a_{03} + a_{04}) \approx 0,54$. Ahora podemos calcular

$$a_{11} = -\operatorname{sen}(1)\ ;\ a_{12} = -\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\right)\ ;\ a_{13} = -\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\right)\ ;\ a_{14} = -\operatorname{sen}(2)$$

y por tanto $\widetilde{y}_2 = \widetilde{y}_1 + \frac{1}{6}(a_{11} + 2a_{12} + 2a_{13} + a_{14}) \approx -0,35$. La siguiente tabla muestra claramente que el método de Euler falla estrepitosamente para este ejemplo y que el de Runge-Kutta es mucho más preciso.

t	$\widetilde{y}$ *(Método de Euler)*	$\widetilde{y}$ *(Método de Runge-Kutta)*	y
$t_0 = 0$	$\widetilde{y}_0 = 0$	$\widetilde{y}_0 = 0$	$y(0) = 0$
$t_1 = 1$	$\widetilde{y}_1 = \widetilde{y}_0 - \operatorname{sen}(t_0) \cdot 1 = 1$	$\widetilde{y}_1 \approx 0,54$	$y(1) = \cos(1) \approx 0,54$
$t_2 = 2$	$\widetilde{y}_2 = \widetilde{y}_1 - \operatorname{sen}(1) \cdot 1 \approx 0,16$	$\widetilde{y}_2 \approx -0,35$	$y(2) = \cos(2) \approx -0,42$

4.6. Existencia de soluciones para PVI

- Comenzaremos ahora con la primera de una serie de secciones más teóricas. Se suelen hacer muy arduas para los alumnos. ¡Paciencia!

TEOREMA DE EXISTENCIA

Dado el PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- **SI** la función de dos variables $f(t,y)$ es continua en un rectángulo:

$$(a,b) \times (c,d) = \{(t,y) : a < t < b,\ c < y < d\}$$

  y (t_0, y_0) es un punto en este rectángulo,

- **ENTONCES** el PVI tiene una **solución local**, i. e. existe un $\varepsilon > 0$ y una función $y(t)$ definida para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ que es solución del PVI.

- **Caso fácil del teorema:** Si la función $f(t,y)$ es continua en todo el plano $\mathbb{R}^2$, la hipótesis del teorema se cumple trivialmente para cualquier punto (t_0, y_0) y podemos garantizar que, para cualquier condición inicial, el correspondiente PVI tiene una solución local.

- **Recordemos, el teorema sólo garantiza existencia de soluciones locales.** Es fácil comprender con un ejemplo por qué debe recalcarse que la solución, en principio, existe sólo localmente ($y(t)$ está definidio "cerca" de t_0).

  Por ejemplo, pensemos en la EDO $\frac{dy}{dt} = 1 + y^2$. La función de dos variables $f(t,y) = 1 + y^2$ es continua en todo el plano $\mathbb{R}^2$ (es un polinomio). Así que estamos en el caso fácil del teorema y podemos concluir que para cualquier punto (t_0, y_0) el PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

  tendrá una solución local. No obstante, si resolvemos la EDO, veremos que tiene como soluciones $y(t) = tan(t + C)$. Y ninguna de esas funciones tiene como dominio todos los números reales.

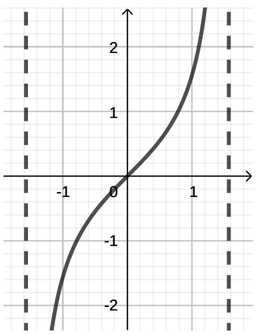


Figura 4.2: Sin ir más lejos, aquí podemos ver la solución correspondiente a la condición inicial $y(0) = 0$, que es $y(t) = tg(t)$. El intervalo más grande que contiene a 0 y tal que $y(t)$ está definida en él es $(-\pi/2, \pi/2)$.

  Lo que le sucede a esta solución se le suele llamar **explosión en tiempo finito**. Más adelante volveremos a ello.

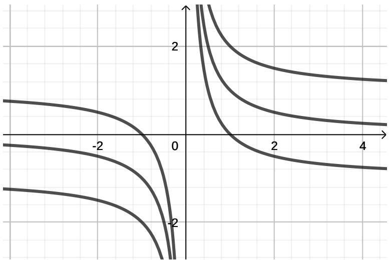
- Este teorema se puede utilizar de muchísimas formas, incluso en contextos más teóricos.

Ejercicio Resuelto 4.6.1 ***Dada la EDO*** $\mathbf{y}' = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t^2}}$***:***

(a) ***Resuélvela.***

Es una EDO trivial, se llega a $y(t) = \frac{1}{t} + C$*,* $C \in \mathbb{R}$*.*

(b) ***Esboza unas cuantas de sus soluciones.***



Las gráficas de las soluciones anteriores son todas traslaciones verticales de la hipérbola de proporcionalidad inversa $y(t) = \frac{1}{t}$*.*

(c) ***En vista de lo anterior, ¿existe alguna solución del PVI correspondiente a una condición inicial*** $y(t_0) = y_0$***, donde*** $t_0 \neq 0$***? ¿Y para una condición inicial del tipo*** $y(0) = y_0$***?***

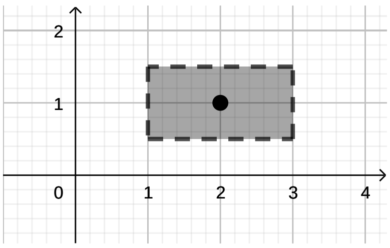
En el dibujo queda bastante claro que las respuestas son sí y no (si fijamos un punto (t_0, y_0) *podremos encontrar una de esas curvas que pase por él si y sólo si* $t_0 \neq 0$*). No obstante, podemos comprobarlo analíticamente: si tenemos una condición inicial* $y(t_0) = y_0$*, podemos despejar la* C *en:*

$$y_0 = \frac{1}{t_0} + C$$

si y solo si $t_0 \neq 0$*.*

(d) ***¿Es posible aplicar el teorema de existencia a los dos PVI's anteriores?***

Sí al primero, porque para cualquier punto (t_0, y_0) *con* $t_0 \neq 0$*, la función de dos variables* $f(t, y) = -\frac{1}{t^2}$ *es continua en el rectángulo* $(t_0 - |t_0|/2, t_0 + |t_0|/2) \times (y_0 - |y_0|/2, y_0 + |y_0|/2)$ *que obviamente contiene al punto en cuestión.*



Por ejemplo, si el punto es $(t_0, y_0) = (2, 1)$ *el rectángulo que proponemos es* $(1, 3) \times (0{,}5, 1{,}5)$*.*

Pero obviamente no es posible para puntos del tipo $(0, y_0)$*, ya que la función* $f(t, y)$ *no es continua en dichos puntos (mucho menos en un rectángulo que los contenga).*

4.7. Unicidad de soluciones para PVI

TEOREMA DE UNICIDAD

Dado el PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- **SI** las funciones de dos variables $f(t,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un rectángulo:

$$(a,b) \times (c,d) = \{(t,y) : a < t < b,\ c < y < d\}$$

  y (t_0, y_0) es un punto en este rectángulo,

- **ENTONCES** si $y_1(t), y_2(t)$ son dos funciones que resuelven el PVI ambas son **localmente iguales**, i.e. existe un número real ε tal que $y_1(t) = y_2(t)$ para todo $t \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$.

- Nótese que si se cumple la hipótesis del teorema de unicidad, entonces se cumple la hipótesis del teorema de existencia.

- **Caso fácil del teorema:** aquél en el que tanto la función $f(t,y)$ como su derivada parcial contra y son continuas en todo el plano $\mathbb{R}^2$. En este caso, si un PVI con sujeto a una cierta condición inicial tiene dos soluciones $y_1(t), y_2(t)$ y estas tienen el mismo dominio entonces $y_1(t) = y_2(t)$ en todo su dominio.

Ejercicio Resuelto 4.7.1 ***Considérese el PVI dado por la EDO $\mathbf{y' = \sqrt{y}}$ y la condición inicial $\mathbf{y(0) = 0}$. (a) Resuelve la EDO (¡no te olvides de las soluciones faltantes!) (b) Si has resuelto bien el apartado anterior, encontrarás más de una solución del PVI. ¿cuales son? (c) ¿Contradice esto el Teorema de Unicidad?***

(a) Utilizando variables separadas llegamos a que la solución $y(t) = \frac{(t+C)^2}{4}$, aunque no debemos olvidar la solución faltante $y(t) = 0$, que no está incluida en la colección anterior.
(b) El PVI tiene dos soluciones, que son $y_1(t) = t^2/4$, $y_2(t) = 0$.
(c) Que este PVI tenga más de una solución no contradice el teorema de existencia y unicidad, ya que, si $f(t,y) = \sqrt{y}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ no es continua en el punto $(0,0)$ (mucho menos en un rectángulo que contenga al mismo).

- **Consecuencia del teorema:** dada una EDO $y' = f(t,y)$, si $f(t,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un rectángulo:

$$(a,b) \times (c,d) = \{(t,y) : a < t < b,\ c < y < d\}$$

  las gráficas de las diferentes soluciones no pueden cortarse en dicho rectángulo.

  Cuando estémos en el caso fácil, las gráficas de estas soluciones no se cortarán en ningún punto del plano.

- **La continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ respecto de y es sólo una condición suficiente para la unicidad, no es necesaria.** Véase el siguiente ejemplo.

Ejercicio Resuelto 4.7.2 *Considerar el PVI* $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1+\sqrt{y} \\ y(0)=0 \end{cases}$

(a) ***Verificar que no se cumplen las hipótesis del Teorema de Unicidad***

Si llamamos $f(t,y) = 1+\sqrt{y}$, *entonces* $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, *y esta función no es continua en el* $(0,0)$.

(b) ***Resolver el PVI.***

Se trata de un EDO de variables separadas. Deberemos realizar la siguiente integral (usamos el cambio de variable $u=\sqrt{y}$*):*

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{y}}\,dy \Longrightarrow \int \frac{1}{1+u}2u\,du = 2\left(\int \frac{1+u}{1+u}\,du - \int \frac{1}{1+u}\,du\right) = 2\left(u - ln|1+u|\right)$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{y}}\,dy = 2\left(\sqrt{y} - ln|1+\sqrt{y}|\right).$$

Así la solcuión general a la EDO $y' = 1+\sqrt{y}$, *en forma implícita será*

$$2(\sqrt{y} - ln|1+\sqrt{y}|) = t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo la condición inicial $y(0)=0$ *se tiene que* $C=0$ *y la solución al PVI es aquella función* $y(t)$ *tal que* $2(\sqrt{y(t)} - ln|1+\sqrt{y(t)}|) = t$.

(c) ***Este PVI tiene unicidad de soluciones. ¿Contradice esto el Teorema de Unicidad?***

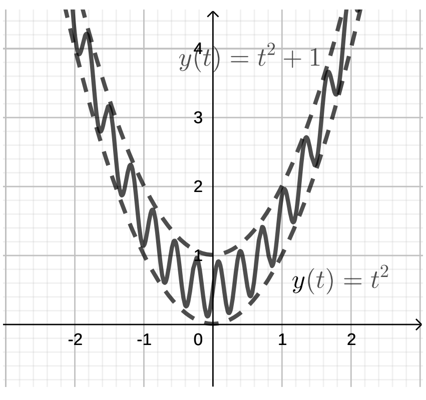
No. El hecho de que no se cumplan las hipótesis no implica que no haya unicidad de soluciones.

Ejercicio Resuelto 4.7.3 ***Dada la EDO*** $\mathbf{y' = -y^2 + y + 2yt^2 + 2t - t^2 - t^4}$. ***Encuentra dos soluciones del tipo*** $\mathbf{y(t) = t^2 + C}$. ***Utilízalas, junto con el teorema de existencia y unicidad, para acotar una solución cuyo dato inicial es*** $\mathbf{0 < y(0) < 1}$.

Sustituimos en la ecuación de la EDO:

$$2t = -(t^2+C)^2+t^2+C+2(t^2+C)t^2+2t-t^2-t^4 \Longrightarrow -C^2+C=0 \Longrightarrow C=0,1 \Longrightarrow y(t)=t^2, y(t)=t^2+1$$

Como la función $f(t,y) = -y^2+y+2yt^2+2t-t^2-t^4$ *es continua en todo el plano* $\mathbb{R}^2$, *y lo mismo le pasa a su derivada parcial* $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y+1+2t^2$ *(ambas son polinomios), se cumplen las hipótesis del Teorema de Unicidad (y también del de existencia). De modo que la gráfica de las soluciones no puede cortar la gráfica de las dos soluciones* $y(t)=t^2$, $y(t)=t^2+1$.



4.8. Más sobre existencia y unicidad

- Existen muchas "versiones mejoradas" de los teoremas de existencia y unicidad. Los teoremas se pueden mejorar de dos formas: o bien se modifican las hipótesis por otras menos exigentes, o bien se asegura existencia y unicidad global, en lugar de local. Recogemos alguno de esos teoremas a continuación:

- Al primer grupo de teoremas mejorados pertenecen los siguientes:

Teorema de Existencia y Unicidad para EDO's de variables separadas

Dado el PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = g_1(t) \cdot g_2(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- **SI** $g_1(t)$ y $g_2(y)$ son funciones continuas en los intervalos (a, b) y (c, d) respectivamente, $g_2(y_0) \neq 0$ y (t_0, y_0) pertenece al rectángulo $\{(t, y) : a < t < b,\ c < y < d\}$,
- **ENTONCES** entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una **única** función $y(t)$ definida para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ que resuelve el PVI.

Teorema de Picard-Lindelöf

Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- **SI** existe $b > t_0$ (b puede valer $+\infty$) la función $f : [t_0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, y cumple la **condición de Lipschitz**: existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ para cualesquiera $t \in [t_0, b]$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,
- **ENTONCES** el PVI tiene solución única en todo el intervalo $[t_0, b]$.

- Al segundo grupo pertenecen los teoremas que se listan a continuación.

  Recordemos el problema. Fijemos una EDO. Si para cualquier condición inicial el correspondiente PVI tiene unicidad local entonces tiene **unicidad global** (si dos soluciones $y_1(t), y_2(t)$ se cortan en algún punto, entonces coinciden en todo su dominio). Pero si para cualquier condición inicial tenemos existencia local, el correspondiente PVI no tiene por qué tener **existencia global** (su dominio no tiene por qué ser todo $\mathbb{R}$).

Teoremas de Existencia Global de soluciones en casos concretos

- Sea la siguiente ecuación diferencial lineal $y' = a(t)y + b(t)$. Si las funciones $a(t), b(t)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$ entonces la ecuación diferencial tiene soluciones globalmente definidas en todo $\mathbb{R}$.
- Consideremos la EDO autónoma $y' = f(y)$ tal que f es continua y tiene derivada continua acotada. Esto es que exista un número positivo $M > 0$ tal que $|f'(y)| \leq M$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Entonces hay existencia global de soluciones.

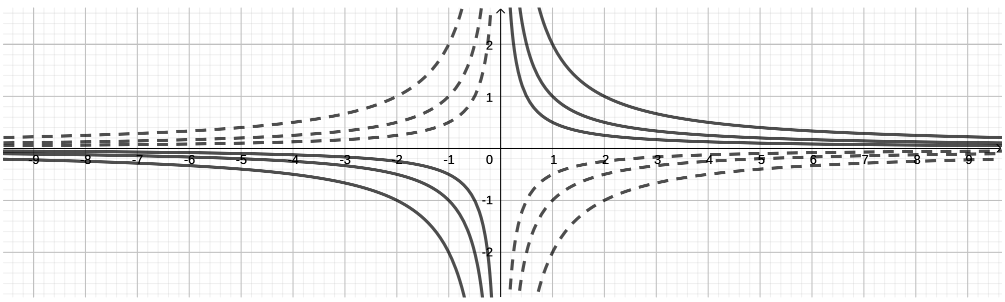


Figura 4.3: Si $f(t) = \frac{C}{t}$ es la solución general de una EDO asociada a un PVI, la solución del PVI tendrá como intervalo maximal $(-\infty, 0)$ o $(0, +\infty)$, dependiendo de la condición inicial. En cualquier caso, tendrá una explosión en $t = 0$.

Caso de una EDO $y' = f(t, y)$ en la que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas en todo $\mathbb{R}^2$

Supongamos que $y(t)$ es una solución con intervalo maximal de definición es (t_1, t_2) (ese es el intervalo más grande que puede encontrarse en el que la función está definida).

Entonces si $t_2 < \infty$ tenemos $\lim_{t \to t_2^+} |y(t)| = \infty$, y si $t_1 > -\infty$ tenemos $\lim_{t \to t_1^-} |y(t)| = \infty$.

Dicho de otro modo las gráficas de las soluciones nunca se "paran" en ningún punto (t, y). Deben "salirse del plano ", habiendo dos posibilidades: que haya existencia global y las soluciones estén definidas en toda la recta $\mathbb{R}$, o que "exploten" en al menos uno de los extremos del intervalo, en cuyo caso la solución está definida en $(-\infty, t_1), (t_1, +\infty)$ ó (t_1, t_2).

- El teorema anterior se puede usar para demostrar existencia global de soluciones: como sólo hay dos posibilidades, descartamos de alguna manera el hecho de que las soluciones exploten y eso es suficiente para demostrar existencia global.

Ejercicio Resuelto 4.8.1 ***Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = y^\alpha$ dependiendo del parámetro α, e indicar cuando hay existencia global. Hacerlo sin resolver la ecuación explícitamente.***

- *Caso $\alpha < 0$: La función $f(y) = y^\alpha$ no será continua en $y = 0$, luego ahí no tendremos ni siquiera garantizada la existencia de soluciones.*
- *Caso $\alpha = 0$: Este caso es trivial pues $\frac{dy}{dt} = 1$ y las soluciones son $y(t) = t + C$, $C \in \mathbb{R}$, luego hay existencia y unicidad en todo el plano y la existencia de las soluciones es global.*
- *Caso $\alpha \in (0, 1]$: Aquí tenemos que f es continua pero $\frac{\partial f}{\partial y}$ no lo es en $y = 0$, luego habrá existencia en todo el plano pero no unicidad en puntos de la recta $y = 0$.*
- *Caso $\alpha > 1$: Hay existencia y unicidad en todo el plano, pero la existencia de las soluciones no es global, pues estas explotan en algún tiempo finito t_1.*

Ejercicio Resuelto 4.8.2 ***Se considera la ecuación diferencial*** $\mathbf{\frac{dy}{dt} = y^2 - 2(t+1)y + (t+1)^2}$***. Ya vimos en un ejercicio que*** $y_1(t) = t$ ***e*** $y_2(t) = t + 2$ ***son soluciones. Sea*** $y_3(t)$ ***una solución cuya condición inicial es*** $y_3(0) = 1$***. Demostrar que*** $\mathbf{y_1(t) < y_3(t) < y_2(t)}$ ***para cualquier valor de*** t ***en los que*** y_3 ***esté definida. ¿Podríamos, con estos datos, decir algo sobre la unicidad y la existencia global de*** $y_3(t)$***?***

Sea $f(t,y) = y^2 - 2(t+1)y + (t+1)^2$*. Esta función es un polinomio, así que es continua en todo el plano* (t,y)*, lo mismo que su derivada parcial respecto de* y*. Eso nos garantiza existencia y unicidad locales de las soluciones. Por la unicidad local, la gráfica de* y_3 *no puede cortar a la gráfica de* y_1 *ni de* y_2*. Esto nos garantiza que* $y_1(t) < y_3(t) < y_2(t)$ *para todo* t *para el que* $y_3(t)$ *esté definida. Gracias a todo lo anterior, podemos asegurar unicidad de soluciones y además existencia global ya que* $y_3(t)$ *no puede explotar en tiempo finito.*

Ejercicio Resuelto 4.8.3 ***La solución general de la ecuación diferencial:*** $\mathbf{\frac{dy}{dt} = y^2 + y}$ ***viene dada por*** $\mathbf{y(t) = \frac{Ce^t}{1-Ce^t}}$, $\quad \mathbf{C \in \mathbb{R},\ C \neq 0}$ ***(véase el Ejercicio Resuelto 1.3.2).***

(a) ***¿Para qué condiciones iniciales*** $y(0) = y_0$ ***se tiene existencia de soluciones en todo tiempo*** $t \geq 0$***? Es decir no habrá explosión en tiempo finito.***

Primero determinemos el valor de la constante C *en función del dato inicial* $y(0) = y_0$*. Supondremos en todo momento que* $y_0 \neq 0, -1$*, pues son las soluciones de equilibrio de la EDO. Tenemos*

$$y_0 = \frac{C}{1-C} \ \Rightarrow\ C = \frac{y_0}{1+y_0}$$

No tendremos explosión en tiempo finito si no existe ningún $t > 0$ *tal que*

$$1 - \frac{y_0}{1+y_0}e^t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+y_0}{y_0} = e^t.$$

Y esta última expresión tiene solución en $t > 0$ *si* $\frac{1+y_0}{y_0} > 1$*. Es decir, si* $y_0 \in (0,\infty)$ *entonces la solución* $y(t)$ *al PVI explotará en tiempo* $t = ln\left(\frac{1+y_0}{y_0}\right)$*.*

(b) ***Si*** $y_0 \in (-1,0)$***, y si no nos dijeran las soluciones de la EDO en el enunciado, ¿qué otro argumento se podría usar para asegurar que las soluciones están definidas para todo*** $\mathbb{R}$ ***y que por tanto no explotan en tiempo finito?***

Llamando $f(t,y) = y^2 + y$ *vemos que tanto* f *como* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *son continuas en todo el plano luego por el Teorema de Unicidad y por la observación de la hoja anterior, sabemos que las gráficas de las soluciones no se pueden parar en ningún punto del plano. Como además* $y = 0$ *e* $y = -1$ *son soluciones, y nuestra condición inicial* $y_0 \in (-1,0)$ *entonces no queda más remedio que tengamos existencia global, pues las gráficas de soluciones distintas no se pueden cortar nunca!*

Hoja 4: Enfoques cualitativo y numérico. Teoremas de existencia y unicidad.

1. Dado el PVI $\begin{cases} y'(t) = 1 - y \\ y(0) = 0 \end{cases}$. Utiliza el método de Euler en el intervalo $[0,2]$ con paso $h = 0{,}5$.
2. (Difícil) Utilizar el método de Runge-Kutta para aproximar el valor del número e.
3. Estudiar la existencia (local y global) de la siguientes problemas de valor inicial.
   (a) $y' = ay$, $y(0) = y_0$, donde $a \in \mathbb{R}$.
   (b) $y' = y^2$, $y(0) = y_0$.
   (c) $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = y_0$.

   Identificar en qué casos existe solución local pero no global, en qué casos no hay unicidad de solución y en qué casos hay solución global y es única.
4. Dada la EDO $y' = y(y-1)(y-2)$. ¿Qué podemos decir (con los teoremas de existencia y unicidad y si es que es posible usarlos) para soluciones los PVI's formados por la EDO anterior y cada una de las condiciones iniciales $y(0) = -1, 0{,}5, 1, 1{,}5, 4$? No puedes resolver la EDO, pero deberás utilizar sus soluciones más evidentes.
5. Resuelve la EDO $y' = y^{2/3}$. ¿Cuántas de sus soluciones pasan por el punto (0,0) (¿has mirado también entre las soluciones faltantes?)? ¿Contradice esto el teorema de unicidad de soluciones? ¿por qué?

Capítulo 5

EDO's Autónomas

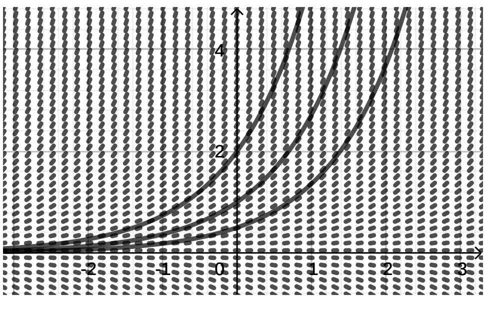
5.1. Introducción

- Recordemos que las **EDO's autónomas** son aquellas del tipo $\frac{dy}{dt} = f(y)$. Por ejemplo $y' = 3^y + 1$ es una ecuación autónoma, sin embargo $y' = y^2 \operatorname{sen}(t)$ no lo es.
- **¿Por qué son importantes?** Muchas situaciones del mundo físico se pueden modelar con EDO's autónomas.

  Por ejemplo si nuestra "función-incógnita" $y(t)$ representa la cantidad de individuos de una población a lo largo del tiempo es de esperar que, si no intervienen factores externos a dicha población, las leyes que gobiernan su crecimiento no dependan del tiempo (los osos crecerán igual estén en el año 2000 o en el año 3000).
- **Sobre su tratamiento analítico:** Todas las EDO's autónomas son de variables separadas:
  $$\frac{dy}{dt} = f(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int dt$$
  No obstante (como siempre) es posible que la primitiva que aparece arriba no pueda expresarse en términos de funciones elementales o que no sepamos despejar $y(t)$ de la consiguiente ecuación funcional.
- **Sobre su tratamiento cualitativo:** Recordemos que el campo de pendientes de una EDO autónoma debe asignar el mismo valor a todos los puntos en una misma horizontal (ver la Sección 4.2). Por eso las gráficas de todas las soluciones son traslaciones horizontales las unas de las otras.

Ejercicio Resuelto 5.1.1 ***Resuelve la EDO*** $\mathbf{y' = y}$ ***representa varias de sus soluciones en un mismo gráfico y haz un esbozo del campo de pendientes.***

Usando variables separadas es inmediato ver que las soluciones son $y(t) = e^{t+C}$, a la que aún hay que añadir la solución faltante $y(t) = 0$. Es habitual que nosotros llamemos $D = e^C$ y expresemos todas las soluciones anteriores como $y(t) = De^t$, pero esta vez preferimos no hacerlo porque en la primera de las expresiones se aprecia que todas las soluciones son traslaciones las unas de las otras. A continuación adjuntamos el gráfico que se nos pide. Las operaciones necesarias para el trazado del campo de pendientes, están en el siguiente ejercicio resuelto.



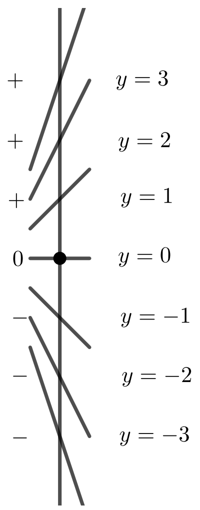
5.2. Rectas de fase

- Como ya hemos dicho varias veces, en el campo de pendientes de una ecuación autónoma todos los puntos a la misma altura (coordenada y) tienen la misma pendiente.
- Por lo tanto, para estudiar una de estas EDO's no hace falta dibujar el campo de pendientes entero. Basta con dibujar las pendientes correspondientes a puntos sobre una única recta vertical en el plano.
- La mayoría de veces, ni siquiera necesitamos toda esa información, sólo trazamos una recta y nos quedamos con el signo de $f(y)$ y, sobre todo, los puntos donde $f(y) = 0$.
- A ambas rectas se las suele llamar **recta de fase**. Para que no halla confusión, en los ejericicios distinguiremos entre **recta de fases con las pendientes** y **recta de fases sin las pendientes**.
- Los puntos y_0 donde $f(y_0) = 0$ se llaman **puntos de equilibrio**. La solución constante $y(t) = y_0$ es siempre una solución de la EDO si y_0 es un punto de equilibrio.

Ejercicio Resuelto 5.2.1 ***Dibuja la recta de fases correspondiente a la EDO del Ejercicio Resuelto 5.1.1.***

Realizamos primero una tabla de valores, que en este caso es trivial:

y	y'
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3



- En los libros, suele ser habitual representar las rectas de fase horizontalmente, por motivos de espacio. Nosotros, vamos a intentar mantenerlas verticales en la medida de lo posible.

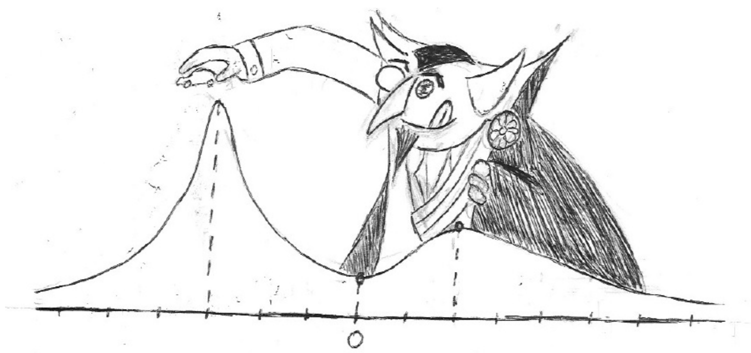


Figura 5.1: Supongamos que tenemos una EDO autónoma (del orden que sea) que describe la posición en el eje horizontal $x(t)$ del cochecito en la pista. Claramente $x = -3, 0, 2$ serán puntos de equilibrio. Aunque son bien diferentes. Hablaremos de eso en la siguiente sección.

5.3. Clasificación de los puntos de equilibrio

- Los puntos de equilibrio son clave para hacer un esbozo cualitativo de las soluciones. Más aún si la EDO procede de un modelo de una situación real, suelen tener significado. Esto último se entenderá mejor en las secciones correspondientes a modelos de Ecología.

- **Casi siempre nos encontraremos en el caso sencillo:**

  Teorema 5.3.1 *Sea una EDO del tipo $y' = f(y)$ donde $f(y)$ es continua, derivable y tiene un número finito de puntos de equilibrio $f(y) = 0$.*

  (1) La recta de fase (sin pendientes) está dividida en una cantidad finita de intervalos $(-\infty, y_1)$, (y_1, y_2), ..., (y_{n-1}, y_n), $(t_n, +\infty)$ en los cuales el signo es constante.

  (2) Sea un PVI con esa EDO y una condición inicial $y(t_0) = y_0$. Si y_0 pertenece a cualquiera de los intervalos menos a los que están en los extremos, tenemos garantizada existencia y unicidad globales (ver Sección 4.8). Si y_0 está en los intervalos de los extremos, nada nos garantiza que no haya una explosión y no tengamos existencia global.

- **Clasificación de puntos de equilibrio:**

  - Cuando "cerca" de un punto de equilibrio y_0 sucede que $f(y_0 - \varepsilon) > 0$ y $f(y_0 + \varepsilon) < 0$ a ese punto de equilibrio lo llamamos **sumidero** o **punto de equilibrio atractor**. Sucede que, un PVI con condición inicial $y(t_0) = C$ donde C está cerca de y_0 la solución tiende a acercarse (mirando de izquierda a derecha) asintóticamente a y_0.

  - Cuando "cerca" de un punto de equilibrio y_0 sucede que $f(y_0 - \varepsilon) < 0$ y $f(y_0 + \varepsilon) > 0$ a ese punto de equilibrio lo llamamos **fuente** o **punto de equilibrio repulsor**. Sucede que, un PVI con condición inicial $y(t_0) = C$ donde C está cerca de y_0 la solución tienden a "alejarse" (mirando de izquierda a derecha) de y_0.

  - El resto de puntos de equilibrio se llaman **nodos**. Pueden ser "atractores por un lado y repulsores por el otro".

  De nuevo, esta clasificación suele tener un significado en los problemas que preceden de modelizar situaciones reales. Pensemos en el contexto de la Figura **??**. Aunque este proceso estará, seguramente, asociado a una EDO de orden superior y la clasificación de puntos fijos se hace de forma algo diferente, válganos como ejemplo. los puntos de equilibrio sobre -3 y 2 son repulsores (¡debe ser difícil poner un cochecito ahí!) mientras que el de 0 es atractor.

- Incluso restringiéndonos al caso sencillo, si la función $f(y)$ es suficientemente complicada puede no ser fácil calcular los puntos de equilibrio y encontrar los intervalos de signo constante. Contra lo primero, hay que utilizar métodos numéricos que no vamos a estudiar en este curso. Contra lo segundo, podemos utilizar el siguiente teorema:

  TEOREMA DE LINEARIZACIÓN

  Supongamos que y_0 es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial autónoma $dy/dt = f(y)$ donde f es una funcion C^1. Entonces:

  (1) si $f'(y_0) < 0$, entonces y_0 es un sumidero,

  (2) si $f'(y_0) > 0$, entonces y_0 es una fuente,

  (3) si $f'(y_0) = 0$, necesitamos información adicional para clasificar el punto de equilibrio y_0.

  Este teorema se llama así porque lo que estamos haciendo para estudiar la EDO $dy/dt = f(y)$ es utilizar la "mejor aproximación lineal posible" de $f(y)$ (relacionada con su derivada, claro).

5.4. Dibujos cualitativos que podemos hacer a partir de la recta de fases

- Con una EDO autónoma y conocida la recta de fases, y clasificados los puntos de equilibrio, podemos hacer un esbozo bastante razonable de las soluciones.

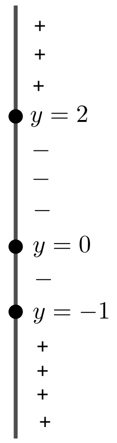
Ejercicio Resuelto 5.4.1 ***Hacer un esbozo de las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial*** $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{f(y) = y^2(y+1)(y-2)}$. ***Para ello calcula los puntos de equilibrio, la recta de fases (sin pendientes) y clasifica los puntos de equilibrio.***

- *Primero calcularemos los puntos de equilibrio:*

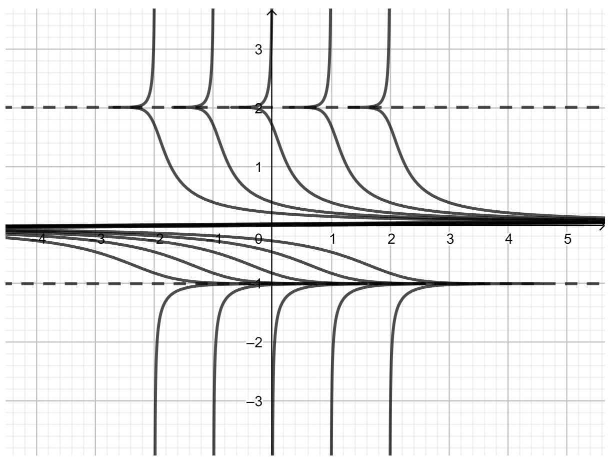
$$y^2(y+1)(y-2) = 0 \Rightarrow y = -1, 0, 2$$

- *Ahora dibujamos la recta de fases (sin pendiente)*

$$\begin{array}{ccc} y \in (-\infty,-1) & \longrightarrow & f'(y) > 0 \\ y \in (-1,0) & \longrightarrow & f'(y) < 0 \\ y \in (0,2) & \longrightarrow & f'(y) < 0 \\ y \in (-\infty,-1) & \longrightarrow & f'(y) > 0 \end{array}$$



- *Seguimos por clasificar los puntos de equilibrio. Tenemos que* $y_1 = -1$ *es un sumidero e* $y_3 = 2$ *es una fuente. Y el punto de equilibrio* $y_2 = 0$ *es un nodo (es "atractor por un lado y repulsor por otro").*
- *Ya podemos hacer el esbozo:*



5.5. EDO's autónomas que dependen de Parámetros. Bifurcación

- A veces, estudiamos ecuaciones diferenciales que dependen de **parámetros**: números de valor desconocido pero cuyo valor permanece constante durante todo el proceso.

  Por ejemplo, en el modelo Exponencial de Malthus que describe el crecimiento de algunas poblaciones (ver Ejercicio Resuelto 2.3.1) de acuerdo a las hipótesis llegábamos a una EDO del tipo

  $$\frac{dy}{dt} = ry, \quad r \in \mathbb{R},$$

  Ese valor r denotaba la constante de proporcionalidad de la tasa de creciemiento y' respecto a la población total en cada instante, y no variaba durante el proceso.

- Nosotros vamos a estudiar EDO's que dependan de un único parámetro. Todas las que veremos en este curso serán, además, autónomas. Las podemos expresar como

  $$\frac{dy}{dt} = f_k(y) \quad , \quad f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{5.1}$$

  Por ejemplo podemos considerar $\frac{dy}{dt} = y^2 - 2y + k$ donde $f_k(y) = y^2 - 2y + k$.

  Nótese que, en realidad, en la expresión anterior estamos representando infinitas EDO's, una para cada valor de k. A este conjunto de ecuaciones le llamamos **familia uniparamétrica de EDO's**.

- **Principio de Suavidad:** Normalmente un pequeño cambio en el parámetro resulta solamente en un pequeño cambio en el comportamiento de las soluciones y no altera el comportamiento cualitativo.

  Sin embargo debemos estar alerta, porque esto no es siempre así. Ocasionalmente pequeños cambios en el parámetro conducen a un cambio drástico en el comportamiento a largo plazo de las soluciones y a cambios cualitativos en la recta de fase.

- A los valores del parámetro k en los que la ecuación diferencial (5.1) "cambia" cualitativamente su recta de fase los llamaremos **puntos de bifurcación**. Por "cambia" queremos decir que en los valores "inmediatamente a la izquierda" e "inmediatamente a la derecha" de k la recta de fase es diferente.

  La interpretación de los puntos de bifurcación en problemas reales suele ser de gran relevancia.

- **¿Cómo calcular los puntos de bifurcación?** En el "caso sencillo", ya sabemos que la recta de fases de una EDO autónoma queda determinada por los puntos de equilibrio y el signo de $\frac{dy}{dt}$ en los correspondientes intervalos. La mejor manera de encontrar los puntos de bifurcación será estudiar cuántas soluciones tiene la ecuacion$f_k(y) = 0$ en función del parámetro k.

- Al diagrama que representa, para cada valor del parámetro colocado en el eje de abscisas, la correspondiente recta de fase (sin pendientes) lo llamamos **diagrama de bifuración** (ver ejercicio resuelto siguiente).

Ejercicio Resuelto 5.5.1 ***Encuentra y clasifica los puntos de bifurcación y representa el diagrama de bifurcación de la EDO*** $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{y^2 - 2y + k = f_k(y)}$.

- *Vemos que para cada posible valor de k, los puntos de equilibrio de esta EDO son las soluciones reales de:*
$$y^2 - 2y + k = 0$$
Si aplicamos la fórmula de la ecuación de segundo grado, llegamos a:
$$y = 1 \pm \sqrt{1-k}$$

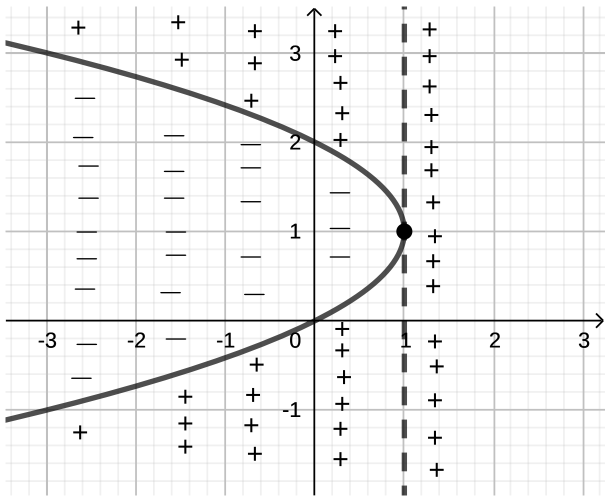
- *Dependiendo del valor de k, podemos tener dos, uno o ningún punto de equilibrio.*

  1.- Si $k > 1$ no habrá puntos de equilibrio y $f_k(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

  2.- Si $k < 1$ tenemos dos puntos de equilibrio $y_1 = 1 - \sqrt{1-k}$, $y_2 = 1 + \sqrt{1-k}$. Si $y \notin [y_1, y_2]$ tenemos que $f_k(y) > 0$ y si $y \in (y_1, y_2)$, entonces $f_k(y) < 0$. De modo que y_1 es un atractor, e y_2 un repulsor.

  3.- Por último si $k = 1$ la EDO sólo tiene un punto de equilibrio $y = 1$. Y si $y \neq 1$ entonces $f_1(y) > 0$, luego es un nodo.

- *Con todo lo anterior, ya podemos realizar el diagrama de bifurcación.*



5.6. Una EDO autónoma en Ecología: el modelo logístico

- El modelo logístico describe como varía el número de individuos de una población P a lo largo del tiempo t, de acuerdo al supuesto de que el crecimiento es directamente proporcional a: (1) El tamaño de la población y (2) Los recursos disponibles.

$$\frac{dP}{dt} = KP(C - P), \quad K, C > 0 \tag{5.2}$$

  donde la constante C está denotando la capacidad máxima de individuos (debido a los recursos) del sistema. Vemos que, bajo estas hipótesis, el número de individuos viene gobernado por una EDO autónoma.

- **La recta de fase y las consecuencias para la población:** Si la población P es más grande que C entoncés la población decrecerá ($P' < 0$). Por otro lado si tenemos un población pequeña $0 < P < C$, tendremos que $P' > 0$. No tiene sentido estudiar qué le ocurre a la población para valores $P < 0$.

  Como curiosidad, destacar que si P es muy pequeña en comparación con la C, la EDO se parece mucho a una del tipo $P' = r \cdot P$ (modelo exponencial, ver capítulo de modelización).

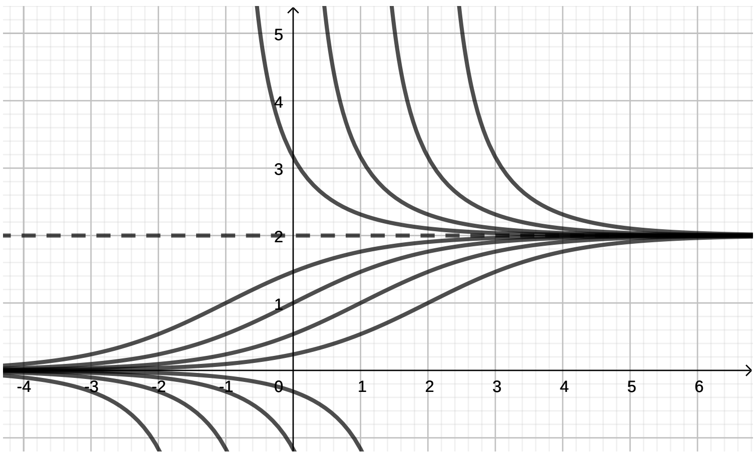
- **Los puntos de equilibrio y su interpretación:** Si denotamos por $f(P) = KP(C - P)$ es fácil ver que los puntos de equilibrio de la EDO, es decir, los puntos que cumplen $f(P) = 0$ son $P = 0, C$.

  Si $P = C$ la población se mantendrá en equilibrio: mantendrá su número constante a lo largo del tiempo. Lo mismo sucede (obviamente) si $P = 0$ (partimos de una población con 0 individuos).

  En base a lo visto en el punto anterior $P = 0$ es un punto repulsor y el punto $P = C$ un punto atractor.La población "tiende de manera natural a llenar todo el espacio del sistema". Si se comienza con una cantidad de individuos mayor que C, la población descenderá hasta llegar al equilibrio $P = C$ (también).

  Nótese también que, por el teorema de unicidad, si se comienza con más de C individuos, el número de estos nunca descenderá por debajo de C (¡teorema de unicidad!). Analogamente, si comenzamos con menos de C individuos, tampoco se alcanzará este valor.

- Es posible resolver la ecuación (5.2) analíticamente usando el método de variables separadas (es uno de los ejercicios). No obstante, como hemos visto con el análisis anterior, no es necesario para hacer un esbozo razonable de las soluciones.



Hoja 5: EDO's Autónomas.

1. Encontrar los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = y^3 - y^2 - 12y$.

2. La velocidad v de caída de un objeto que cae viene modelada por la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

   donde m es la masa del paracaidista, g es la aceleración de la gravedad y k es una constante que representa un rozamiento de "resistencia a la caída". Dibuja la recta de fases. Haz un esbozo e las soluciones. Calcula la "velocidad final" (sobre la que se estabiliza) el paracaidista en términos de m, g y k.

3. Demuestra la segunda parte del Teorema 5.3.1 usando los teoremas de la sección Sección 4.8.

4. Resuelve la ecuación (5.2).

5. El pueblo de Sigüenza ha sido afectado por la epidemia de coronavirus. Vamos a denotar por $y(t)$ al número de infectados en el pueblo en el instante t (medimos el tiempo en meses). Todo empezó en el instante $t = 0$, cuando 5 de los vecinos del pueblo regresaron de una excursión a Madrid ($y(0) = 5$). En ese momento se cerraron las antiguas puertas de la ciudad. Sigüenza quedó con una población de 200 habitantes (el vacío rural, y esas cosas) y ya no se permite la entrada ni la salida de personas. Afortunadamente como sus habitantes son muy resistentes, no fallecen al contraer la enfermedad. El Ayuntamiento está utilizando el siguiente modelo para estudiar el número de infectados:

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cdot y \cdot (200 - y)$$

   (a) Contesta razonadamente: ¿es plausible utilizar un modelo como ese? (que representa cada número, qué representa cada factor, por qué se están multiplicando, etc.)

   (b) Dibuja la recta de fases, localiza y clasifica los puntos de equilibrio, esboza el campo de pendientes y haz un esbozo de las soluciones, para valores positivos de y. En vista de lo anterior, explica qué ocurrirá con la poblacion de seguntinos si, como ya dijimos, $y(0) = 5$.

   (c) El Ayuntamiento, harto de la situación, decide echar del pueblo a k vecinos infectados cada mes, y repoblarse con k individuos sanos (de forma que la población siga siendo constantemente igual a 200). El nuevo modelo, será por tanto:

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cdot (y) \cdot (200 - y) - k$$

   ¿Qué ocurre con el número de seguntinos infectados a largo plazo si $k = 5$? ¿Mejoramos mucho con este método en este caso? Esboza el diagrama de bifurcación para k y calcula el punto o los puntos de bifurcación.

Parte III

EDO's de Orden Superior

Capítulo 6

Cuestiones Básicas

6.1. Introducción. ¿Qué vamos a ver en este capítulo?

- Una **EDO de orden superior** (a 1) es una ecuación diferencial en la que aparece, no solamente la derivada de la "función incógnita" y', si no también alguna derivada de orden superior de la misma $(y'', y''', \ldots)$. Por ejemplo:
$$y'' = -ky$$
- Supongamos que, en una EDO, el valor más alto k para el cual aparece la derivada k-ésima $y^{(k)}$ es n. Decimos entonces que el **orden** de la misma es n. Por ejemplo, la EDO anterior es de orden 2.
- Recordemos que el conjunto de todas las soluciones de una EDO de orden n (la solución general) puede expresarse, en los casos más felices, con una única una expresión que depende de n parámetros. Por lo tanto los correspondientes PVI tienen n condiciones iniciales.
- El título del capítulo es muy ambicioso. Tratar adecuadamente este tema nos requeriría muchísimas páginas.
- Vamos a desarrollar más profundamente las EDO's de orden 2 que las de órdenes superiores. Primero porque son el ejemplo más sencillo de EDO de orden superior. Y segundo porque, como veremos en el Capítulo 7, son de especial interés en Física, ya que son la manera más natural de tratar los problemas en los que aparecen fuerzas (las fuerzas influyen en la aceleración, esto es, la segunda derivada).
- Las EDO's de orden superior, incluso las de orden 2, son bastante más complicadas de resolver que las de orden 1. Por eso, en este texto veremos pocos tipos que podamos resolver analíticamente. En este capítulo nos centraremos en las **EDO's lineales** y en capítulos posteriores veremos algún método más (transformada de Laplace y series de potencias).

Figura 6.1: ¡Helios, al banquillo! Ya no te necesitamos con tu carro alado para explicar como se mueve el Sol en el cielo. ¡Las EDO's de orden 2 lo hacen mucho mejor que tú!

6.2. Reducción de orden

- El método de **reducción de orden** consiste en aplicar un cambio de variable a nuestra EDO de orden n para convertirla en una de orden inferior a n.

- Ya vimos lo que era un cambio de variable en la Sección 3.8. Pero en aquel momento trabajábamos con EDO's de orden 1. Supongamos que nuestra EDO es ahora de orden $n > 1$. En este caso definiremos una nueva variable p que dependa de $t, y, y', \dots, y^{(n)}$:

$$p = G(t, y, \dots, y^{(n)})$$

  Para resolver la EDO necesitaremos encontrar también una expresión de $y, y', y'', \dots$ en términos de $t, p, p', p'', \dots$

- En el caso de las EDO's de orden 2 hay que conocer los dos siguientes cambios:

Caso 1: en la ecuación de segundo orden no aparece ningún término con y.

Hacemos el cambio $\boxed{y' = p}$, en cuyo caso $y'' = p'$ y obtenemos una EDO de primer orden en la "función incógnita" p.

Ejercicio Resuelto 6.2.1 ***Resuelve el PVI*** $\begin{cases} ty'' + y' = 3t^2 \\ y'(1) = 1, \; y(1) = 1 \end{cases}$.

Hacemos el cambio $y' = p$, en cuyo caso $y'' = p'$. Obtenemos así la EDO:

$$tp' + p = 3t^2$$

que es lineal. Ni siquiera necesita un factor integrante: la expresión del término de la izquierda es de hecho la derivada de un producto. Así que:

$$tp' + p = 3t^2 \Longrightarrow (tp)' = 3t^2 \Longrightarrow tp = t^3 + C, \; C \in \mathbb{R} \Longrightarrow p(t) = t^2 + \frac{C}{t}, \; C \in \mathbb{R}.$$

Ahora deshacemos el cambio de variable y sustituimos $p(t)$ por $y'(t)$:

$$y'(t) = t^2 + \frac{C}{t}, \; C \in \mathbb{R}. \Longrightarrow y(t) = \frac{t^3}{3} + C \cdot ln\,|t| + D, \quad C, D \in \mathbb{R}$$

La solución depende de dos parámetros. Sustituimos las dos condiciones iniciales en las expresiones correspondientes:

$$y'(1) = 1 \Longrightarrow 1^2 + \frac{C}{1} = 1 \Longrightarrow C = 0, \qquad y(1) = 1 \Longrightarrow D = \frac{1^3}{3} + D = 1 \Longrightarrow \frac{2}{3}$$

De modo que la solución del PVI es $y(t) = \dfrac{t^3 + 2}{3}$.

Caso 2: en la ecuación de segundo orden no aparece la variable independiente t.

Hacemos el mismo cambio $\boxed{y' = p}$. Pero ahora vamos a hacer algo completamente diferente: no queremos que aparezca el tiempo en nuestra nueva ecuación (recuerda, la "prima" indica derivada respecto del tiempo: $y' = \frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$).
Así que, aunque es cierto que $y'' = p'$ esta expresión no es suficiente. necesitamos expresar y'' dependiendo solo de p, y. Para ello consideramos que y' se puede expresar como una función de y ($y'(t) = p(y(t))$) . Ahora usando la regla de la cadena es fácil ver que:

$$y''(t) = \frac{dp}{dy}(y(t)) \cdot y'(t) = \frac{dp}{dy}(y(t)) \cdot p(y(t)) \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Obtenemos así una nueva EDO en la que la "función incógnita" es p y la variable independiente es y.

Ejercicio Resuelto 6.2.2 ***Reduce la EDO*** $\mathbf{y'' + k^2 y = 0}$ ***a una de primer orden.***
Sustituimos y' e y'' por los valores correspondientes y obtenemos:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} + k^2 y = 0$$

que es de variables separadas:

$$\int p dp = -k^2 \int y dy \Longrightarrow p^2 = C - k^2 y^2, \; C \in \mathbb{R} \Longrightarrow y' = \pm\sqrt{C - k^2 y^2}, \; C \in \mathbb{R}$$

Esta última ecuación es una EDO de orden 1 de variables separadas (que sabríamos resolver).

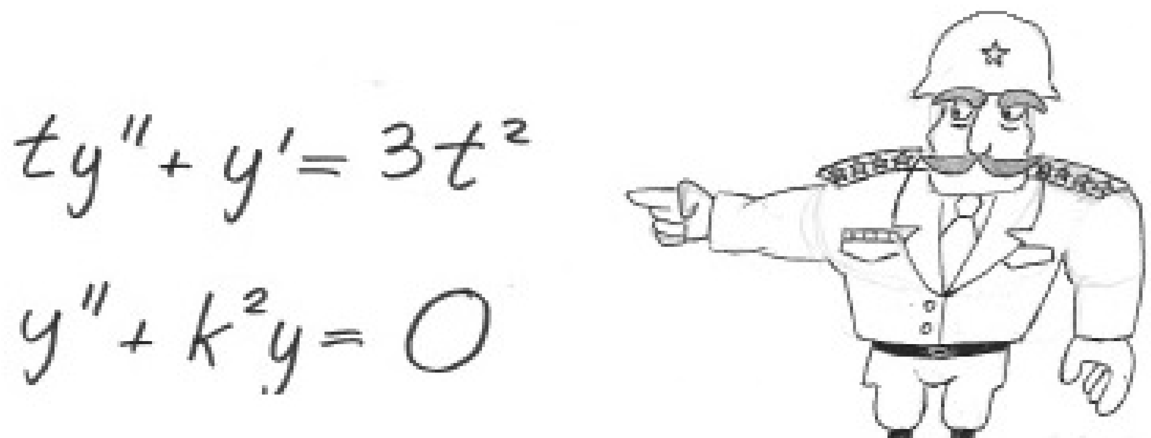


Figura 6.2: ¡Debería daros vergüenza! ¡Os falta un término! ¡Degradadas!

6.3. Ideas básicas sobre EDO's lineales de orden superior

- Las EDO's lineales de orden superior, generalizan a las EDO's lineales de orden 1 que ya hemos visto. Tienen expresiones de la forma:

$$a_n(t)y^{(n)} + \ldots + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \tag{6.1}$$

- Si $g(t) = 0$ decimos que la EDO lineal es **homogénea** (no confundir con las EDO's homogéneas del Capítulo 3). En caso contrario decimos que la EDO es **no homogénea**.

- Ni siquiera vamos a ser capaces de, en general, resolver explícitamente las EDO's lineales de orden superior. Solamente algunos casos concretos que explicaremos en las siguientes secciones.

- Tenemos, eso sí, el siguiente teorema que, al menos, nos garantiza que las soluciones existen y son únicas, bajo ciertas hipótesis, para PVI's (aunque no podamos encontrar su "formulita explícita"):

> **Teorema 6.3.1 (Teorema de Existencia y Unicidad para PVI's:)** *Sea la EDO lineal de orden n (6.1). Añadimos también n condiciones iniciales $y(t_0) = b_0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = b_{n-1}$. Tenemos, por lo tanto, un PVI.*
>
> ***SUPONGAMOS:*** *que todas las funciones $a_0(t), \ldots, a_n(t), g(t)$ son continuas en un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y que además $a_n(t) \neq 0$ en ese intervalo I.*
>
> ***ENTONCES:*** *existe una única solución $y(t)$ para nuestro PVI en el intervalo I.*

- Hemos dicho que íbamos a prestar especial atención a las EDO's de orden 2, así que vamos a incluir la versión para $n = 2$ del teorema anterior:

> **Teorema 6.3.2 (Teorema de Existencia y Unicidad para PVI's (orden 2))** *Dado el problema de valor inicial siguiente:*
>
> $$\begin{cases} y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \\ y(t_0) = b_0, \quad y'(t_0) = b_1 \end{cases}$$
>
> ***SUPONGAMOS:*** *que $a_1(t), a_0(t), g(t)$ son continuas en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$.*
>
> ***ENTONCES:*** *existe una única solución $y(t)$ de este problema en todo el intervalo I.*

- Intuitivamente, una EDO lineal homogénea de orden n debe tener "n soluciones linealmente independientes". Para ello, lo primero que tenemos que explicar es que significa que dos soluciones "linealmente independientes".

- y_1, y_2 son **localmente linealmente independientes** cerca de un punto t_0 si en un entorno de t_0 no existe ninguna constante λ tal que $y_1 = \lambda \cdot y_2$.

- De la misma manera, un conjunto de funciones $y_1, \ldots, y_k$ son **localmente linealmente independientes** cerca de un punto t_0 si en ningún entorno de t_0, existen coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ que cumplan:

$$\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_k y_k = 0,$$

  y que no sean todos simultáneamente nulos. Si las funciones son localmente linealmente independientes para cualquier valor de t_0, decimos sencillamente que son **linealmente independientes**.

- Comprobar si unas cuantas funciones son localmente linealmente independientes o no, no es sencillo. Para ello se introduce el wronskiano.

- El **wronskiano** de un conjunto de funciones $y_1(t), \dots, y_k(t)$ en el punto $t = t_0$ es el determinante:

$$W(y_1, \dots, y_k)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \dots & y_k(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) & \dots & y_k'(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(k-1)}(t_0) & y_2^{(k-1)}(t_0) & & y_k^{(k-1)}(t_0) \end{vmatrix}$$

  Como hemos dicho que íbamos a tener especial cuidado con las EDO's de orden 2 destacamos que el wronskiano de dos funciones $y_1(t), y_2(t)$ en $t = t_0$ es sencillamente:

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}$$

- El siguiente teorema nos explica como usar el wronskiano para demostrar que un conjunto de funciones es linealmente independiente:

> **Teorema 6.3.3 (wronskiano no nulo implica independencia lineal)** *Si las funciones $y_1(t), \dots, y_k(t)$ cumplen $W(y_1, \dots, y_k)(t_0) \neq 0$, entonces son localmente linealmente independientes cerca de t_0.*

- Gracias a todo lo que aparece en esta sección llegamos a los siguientes teoremas que describen cómo es la solución general de una EDO lineal. Para el caso de una EDO lineal homogénea tenemos:

> **Teorema 6.3.4 (solución general de una EDO lineal homogénea)** *Dada la EDO:*
>
> $$a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \tag{6.2}$$
>
> ***SUPONGAMOS:*** *que $a_n(t), \dots, a_0(t)$ son funciones continuas en un intervalo I, que $a_0(t) \neq 0$ en I, y que tenemos n soluciones linealmente independientes en I $y_1(t), \dots, y_n(t)$.*
>
> ***ENTONCES:*** *la solución general de la EDO es:*
>
> $$A_1y_1(t) + \dots + A_ny(t), \qquad A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R} \tag{6.3}$$

  y para el caso de una EDO lineal no homogénea:

> **Teorema 6.3.5 (Solución general de una EDO lineal no homogénea)** *Dada la EDO*
>
> $$a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \tag{6.4}$$
>
> ***SUPONGAMOS:*** *que $a_n(t), \dots, a_0(t), g(t)$ son funciones continuas en un intervalo I y que $a_0(t) \neq 0$ en I.*
> ***ENTONCES:*** *la solución general de la EDO es $y_p(t) + y_h(t)$ donde $y_p(t)$ es una solución particular cualquiera de la EDO y $y_h(t)$ es la solución general de la EDO homogénea que llamamos* ***asociada*** (6.2) *(que, si se cumplen las hipótesis del teorema anterior será de la forma* (6.3)*).*

- En el contexto del teorema anterior, nótese que si tenemos dos soluciones particulares de la EDO no homogénea y_1, y_2, entonces $y_1 - y_2$ es una solución de la EDO homogénea asociada.
- Un "resumencito" del caso más feliz para EDO's de orden 2 es el siguiente:

> **Teorema 6.3.6** *Dada la EDO lineal no homogénea $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$.*
> *Si $p(t), q(t), g(t)$ son funciones continuas en un intervalo I, y tenemos dos soluciones $y_1(t), y_2(t)$ de la EDO homogénea asociada $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ tales que $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ entonces la solución general de la EDO es $y_p + Ay_1 + By_2$, $A, B \in \mathbb{R}$ donde y_p es alguna solución particular.*

6.4. EDO's lineales con coeficientes constantes homogéneas

- Son EDO's del tipo:
$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 = 0 \tag{6.5}$$
donde $a_0, \ldots, a_n$ son constantes (números), no dependen de t.

- La idea básica es la siguiente:

Buscamos, en primer lugar, soluciones del tipo $y(t) = e^{rt}$. La ecuación (6.5) tiene una solución del estilo de la anterior sí y solo sí r es una solución de la ecuación polinómica
$$a_n \cdot r^n + \ldots + a_1 \cdot r + a_0 = 0 \tag{6.6}$$
llamada **ecuación característica**.

- Como consecuencia de lo anterior:

CASO MÁS FELIZ: Si la ecuación característica tuviera n soluciones $r_1, \ldots, r_n$ diferentes entonces habríamos encontrado n soluciones linealmente independientes para la EDO $y_1(t) = e^{r_1 t}, \ldots, y_n(t) = e^{r_n t}$ (el wronskiano $W(y_1, \ldots, y_n)(t_0)$ es no nulo para cualquier t_0). Y por lo tanto la solución general de la EDO (ver Teorema 6.3.4) es:
$$C_1 y_1(t) + \ldots + C_n y_n(t), \qquad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$$

- Pero no siempre ocurrirá eso. La ecuación característica (6.6) puede no tener n soluciones distintas, y, por lo tanto, no podemos encontrar n soluciones diferentes del tipo $y(t) = e^{rt}$ para la EDO. Tendríamos que intentarlo en este caso con soluciones del tipo $te^{rt}, t^2 e^{rt}, \ldots$

CASO NO TAN FELIZ: La ecuación característica puede tener soluciones múltiples, esto es, la factorización del polinomio es del tipo:
$$a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = (x - r_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - r_k)^{m_k}$$
con $m_1 + \ldots + m_k = n$. En este caso, la solución general será:
$$(C_1 e^{r_1 t} + \ldots + C_{m_1} t^{m_1 - 1} e^{r_1 t}) + (C_{m_1+1} e^{r_2 t} + \ldots + C_{m_1+m_2} t^{m_2-1} e^{r_2 t}) + \ldots$$
$$\ldots + (C_{(m_1+\ldots+m_{k-1}+1)} e^{r_k t} + \ldots + C_{(m_1+\ldots+m_k)} t^{m_k-1} e^{r_k t})$$

- En ambos casos, es posible que alguna de las soluciones r_i sea compleja. En una ecuación algebraica como (6.6) si un numero complejo $r_j = \alpha + i\beta$ es solución de la ecuación, también lo es su conjugado $r_k = \alpha - i\beta$. Si la primera es una raíz múltiple, también lo es la segunda, y con la misma multiplicidad ($m_j = m_k$). Recordemos que si no queremos expresar la solución general con enojosas exponenciales de números complejos, podemos utilizar la fórmula de Euler ($e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha} \cdot (cos(\beta) + isen(\beta))$), procediendo del modo siguiente:

Cualquier combinación lineal de soluciones de una EDO lineal homogénea es solución de la misma. Luego si sabemos que $e^{(\alpha+i\beta)t}$ y $e^{(\alpha-i\beta)t}$ son soluciones (linealmente independientes si $\beta \neq 0$) entonces también lo serán
$$\frac{e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}}{2} = e^{\alpha t}\cos(\beta t), \qquad \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i} = e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$
y podremos dar la solución general utilizando estas nuevas soluciones no complejas.

- Vamos a estudiar en profundidad el caso particular de orden 2:

POSIBLES CASOS DE UNA ECUACIÓN LINEAL HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES DE ORDEN 2: Dada la EDO:

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+c=0$$

donde a, b, c son números reales (constantes). Nos podemos encontrar los siguientes casos:

(1) Si la ecuación característica $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones reales diferentes r_1, r_2, entonces la solución general de la EDO es:

$$Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}, \qquad A, B\in\mathbb{R}$$

(2) Si la ecuación característica $ax^2+bx+c=0$ tiene una única solución doble r, esto es, $ax^2+bx+c=(x-r)^2$, entonces la solución general de la EDO es:

$$Ae^{rt}+Bte^{rt}, \qquad A, B\in\mathbb{R}$$

(3) Si la ecuación característica $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones complejas distintas y conjugadas $r_1=\alpha+i\beta$, $r_2=\alpha-i\beta$, entonces la solución general es:

$$Ae^{r_1t}+Be^{r_2t},\ a, b\in\mathbb{R} \qquad \text{ó} \qquad C(cos\beta t)e^{\alpha t}+D(sen\beta t)e^{\alpha t},\ C, D\in\mathbb{R}$$

Ejercicio Resuelto 6.4.1 ***Resuelve la EDO*** $\mathbf{x''+7x'+12x=0}$.

- *En primer lugar resolvemos la ecuación característica asociada:*

$$r^2+7r+12=0\Longrightarrow r_1=-3,\ r_2=-4$$

- *La solución general es, por tanto,* $y(t)=Ae^{-3t}+Be^{-4t}$ *con* $A, B\in\mathbb{R}$.

Ejercicio Resuelto 6.4.2 ***Resuelve la EDO*** $\mathbf{x''+x=-1}$.

- *En primer lugar resolvemos la ecuación característica asociada:*

$$r^2+1=0\Longrightarrow r_1=i,\ r_2=-i$$

- *Estamos en el caso de raíces complejas conjugadas. La solución general es, por tanto,*

$$y(t)=Ae^{it}+Be^{-it}\ \text{con}\ A, B\in\mathbb{R}$$

O bien si no queremos utilizar exponenciales complejas

$$y(t)=A\cos t+B\operatorname{sen} t\ \text{con}\ C, D\in\mathbb{R}$$

6.5. ¿Cómo encontrar una solución particular de una EDO lineal no homogénea con coeficientes constantes?

- En vista del Teorema 6.3.5 si queremos resolver EDO's lienales con coeficientes constantes no homogéneas:

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t) \tag{6.7}$$

Paso 1: Resolvemos la **EDO homogénea asociada**:

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

y hallamos su solución general $A_1 y_1 + \ldots + A_n y_n$.

Paso 2: Tenemos que encontrar (usando algún método de los dos que exponemos más abajo) alguna solución $y_p(t)$ de la ecuación anterior. A esa solución concreta se le llama **solución particular** (y hay muchas posibles, obviamente).

Solución: Una vez hecho todo lo anterior, la solución general de la EDO es:

$$y_p(t) + A_1 y_1(t) + \ldots + A_n y_n(t)$$

- Veremos sólo dos formas de encontrar una solución particular:

Método de los Coeficientes indeterminados: Consiste en ir probando con "cosas parecidas" a la función $g(t)$.
Existen tablas que ayudan a organizar mejor esta búsqueda, pero no las veremos en este curso. Nos fiaremos de nuestra intuición. Algunas pautas a seguir son las siguientes.

- Si $g(t) = e^{rt}$ es de tipo exponencial, entonces buscamos y_p de la forma $C \cdot e^{rt}$, porque sabemos que derivando exponenciales obtenemos también exponenciales. Aquí $C \in \mathbb{R}$ es una constante a determinar.

  Pero cuidado, si justo r es una raíz del polinomio característico de la ecuacioón homogénea asociada, entonces hay que probar con $y_p(t) = t^k e^{rt}$, donde k es la multiplicidad de la raíz r.

- Si $g(t)$ es un polinomio de grado k, probamos con $y_p(t) = C_0 + C_1 t + \cdots + C_k t^k$, con $C_1, \ldots, C_k \in \mathbb{R}$ de nuevo constantes a determinar, cuando igualemos los coeficientes del polinomio g con los de la expresión resultante al sustituir y_p en el término de la izquierda de (6.7). El motivo de esta elección de y_p es que sabemos que al derivar polinomios obtenemos polinomios.

- Si $g(t) = \cos(rt)$ ó $g(t) = \operatorname{sen}(rt)$ buscaremos la solución particular de la forma $y_p(t) = C_1 \cos(rt) + C_2 \operatorname{sen}(rt)$, ya que derivando senos o cosenos obtenemos senos o cosenos.

Si $g(t)$ es una suma de polinomios, senos, cosenos y exponenciales, buscaremos y_p como suma de las expresiones arriba mecionadas, con sus respectivas constantes a determinar.

Ejercicio Resuelto 6.5.1 ***Encuentra una solución particular para la EDO*** $\mathbf{x'' + 7x' + 12x = 3e^{-t}}$.

Probamos con soluciones del tipo $y_p(t) = C \cdot e^{-t}$. *Tenemos que* $y_p'(t) = -C \cdot e^{-t}$ *y que* $y_p''(t) = C \cdot e^{-t}$. *Sustituyendo todo esto en la EDO llegamos a que:*

$$C \cdot e^{-t} - 7C \cdot e^{-t} + 12C \cdot e^{-t} = 3e^{-t}$$

Dividiendo todo por e^{-t}, *podemos despejar* $C = \frac{1}{2}$, *y por lo tanto una posible solución particular es* $y_p(t) = \frac{1}{2} e^{-t}$.

Ejercicio Resuelto 6.5.2 ***Encuentra una solución particular para la EDO*** $\mathbf{x'' + x' + x = \cos 2t}$.

Probamos con soluciones del tipo $y_p(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t$. *Sustituyendo en la EDO llegamos a*

$$(-3C_1 + 2C_2)\cos 2t + (-2C_2 - 3C_2)\operatorname{sen} 2t = \cos 2t.$$

Luego si imponemos $-3C_1 + 2C_2 = 1$ *y* $-2C_1 - 3C_2 = 0$ *obtenemos los valores* $C_1 = -3/13$ *y* $C_2 = 2/13$, *siendo por tanto una solución particluar* $y_p(t) = (-3/13)\cos 2t + (2/13)\operatorname{sen} 2t$.

Método de la Variación de Parámetros: Buscamos una solución del tipo:

$$C_1(t)y_1(t) + \ldots + C_n(t)y_n(t)$$

donde $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada. Para simplificar las cuentas, podemos permitirnos imponer que:

$$C_1'(t)y_1^{(j)} + \ldots + C_n'(t)y_n^{(j)}, \text{ para } j = 0, \ldots, n-2$$

Por ejemplo, en el caso $n = 2$, probamos buscando una solución del tipo:

$$A(t)y_1 + B(t)y_2, \qquad \text{con } A'(t)y_1 + B'(t)y_2 = 0$$

Ejercicio Resuelto 6.5.3 ***La EDO homogénea asociada al ejercicio 6.5.1 tiene como solución general*** $\mathbf{Ae^{-3t} + Be^{-4t}}$. ***Utiliza el Método de Variación de parámetros para encontrar una solución particular.***

- *Buscamos una solución del tipo* $x(t) = A(t)e^{-3t} + B(t)e^{-4t}$.
- *Derivando llegamos a que* $x'(t) = -3A(t)e^{-3t} - 4B(t)e^{-4t} + A'(t)e^{-3t} + B'(t)e^{-4t}$.

  Pero vamos a imponer que $\boxed{A'(t)e^{-3t} + B'(t)e^{-4t} = 0}$ *así que:*

  $$x'(t) = -3A(t)e^{-3t} - 4B(t)e^{-4t}$$

- *Derivando una vez más, llegamos a que* $x''(t) = 9A(t)e^{-3t} + 16B(t)e^{-4t} - 3A'(t)e^{-3t} - 4B'(t)e^{-4t}$.

  Pero utilizando la identidad recuadrada en el punto anterior, podemos simplificar un poco esta expresión:

  $$x''(t) = 9A(t)e^{-3t} + 16B(t)e^{-4t} - B'(t)e^{-4t}$$

- *Sustituyendo todo esto en la EDO, llegamos a que* $-B'(t) = 3e^{3t} \Longrightarrow B(t) = -e^{3t}$.
- *Ahora, sustituyendo en la ecuación recuadrada en el segundo punto:*

  $$A'(t)e^{-3t} - 3e^{3t} \cdot e^{-4t} = 0 \Longrightarrow A'(t) = 3e^{2t} \Longrightarrow A(t) = \frac{3}{2}e^{2t}$$

- *De modo que* $x(t) = \frac{3}{2}e^{2t}e^{-3t} - e^{3t} \cdot e^{-4t} = \frac{1}{2}e^{-t}$. *¡Es la misma solución que en el Ejercicio 6.5.1!.*

- Recordemos que, en cualquier EDO lineal homogénea con coeficientes constantes, hay infinitas soluciones particulares posibles. Eso sí, la resta de dos soluciones particulares debe ser una solución de la ecuación homogénea asociada.

Hoja 6: EDO's de Orden Superior

1. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de reducción de orden:

   (a) $y'' = -\frac{4}{y^2}$,

   (b) $y'' = 4t$,

   (c) $ty'' + 4y' = 0$,

   (d) $t^2y'' + (y')^2 = 0$,

   (e) $y \cdot y'' = 2(y')^4$,

   (f) $y'' = \frac{1}{t^3}$.

2. Encuentra tres soluciones linealmente independientes de la EDO $y^{(n)} + cos(t) \cdot y''' = 0$.

3. Demuestra que si $y_1(t) = e^{r_1t}$, $y_2(t) = e^{r_2t}$ con $r_1 \neq r_2$, entonces y_1, y_2 son localmente linealmente independientes para en cualquier valor $t_0 \in \mathbb{R}$ (PISTA: utiliza el wronskiano).

4. Demuestra que si $y_1(t) = e^{r_1t}, \dots, y_n(t) = e^{r_nt}$ donde todos los $r_1, \dots, r_n$ son diferentes, entonces $y_1, \dots, y_n$ son localmente linealmente independientes para en cualqueir valor $t_0 \in \mathbb{R}$ (PISTA: utiliza el wronskiano y busca en internet ayuda para calcular el determinante de Vandermonde).

5. Resuelve las siguientes EDO's lineales homogéneas con coeficientes constantes :

   (a) $y'' + y = 0$,

   (b) $y'' + 2y' + 10y = 0$,

   (c) $y'' + 6y' + 9y = 0$,

   (d) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

6. Resuelve las siguientes EDO's lineales no homogéneas con coeficientes constantes:

   a) $y'' + 4y' + 20y = -cos(5t).$,

   b) $y'' + y = 5e^{3t}$,

   c) $y'' = t \cdot sen(t)$,

   d) $y'' + 4y' + 4y = 2t$,

   e) $y'' + 4y = t^2 - 1$.

7. Resuelve las siguientes EDO's lineales no homogéneas con coeficientes constantes:

   a) $y''' + 8y = 3sen(4t)$,

   b) $y''' - 27y = (2t + 5)e^{5t}$,

   c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 8t^2 + 5t - 1$,

   d) $y''''' - 4y''' = 6e^t$,

   e) $y'''' + 8y'' + 16y = 6sen(t)$.

8. Demuestra que si tenemos una EDO de orden 2 lineal no homogénea con coeficientes constantes y encontramos dos soluciones particulares, la resta de ambas debe ser una solución de la ecuación homogénea asociada.

9. Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

   a) $\begin{cases} y'' + 5y' - 6y = 0 \\ y(0) = 8, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 16e^{-2t} \\ y(0) = 6, \quad y'(0) = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 2t^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y''' - 4y'' + 3y' = 130\cos(2t) \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2yy'' = 1 + (y')^2 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2ty'' - y' + \frac{1}{y'} = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$

10. Encontrar la única solución de la EDO $y'' + 4y = 4t$ que satisface $y(0) = 1$, $y'(1) = 1 - 2\,\mathrm{sen}(2)$.

11. Escribir una EDO para la que se sabe que $y_1(t) = e^{2t}\cos(t)$ e $y_2(t) = 3e^{2t}\,\mathrm{sen}(t)$ son soluciones.

12. Plantear un PVI, definido a través de una EDO de orden 2, para el que se sabe que $y(t) = e^{-t} + e^{t} - \frac{\mathrm{sen}(t)}{2}$ es solución.

Capítulo 7

Algunas EDO's de Orden 2 que aparecen en Física

7.1. Problemas de Cinemática

- **Aclaración:** Sólo vamos a estudiar problemas de Cinemática unidimensionales: partículas que se mueven en la recta. Por lo tanto, su posición en cada instante t queda determinada por un "número" $x(t)$.
- **Recordatorios:** Las **fuerzas** son las responsables de cualquier cambio en la posición de un objeto. Un **campo de fuerza** (de una sola dimensión) es el que asocia un "vector-fuerza" a cada punto de la recta real.
- **Segunda Ley de Newton:** Si x representa la posición, ésta queda determinada por la EDO $mx'' = F(t, x, x')$, donde m representa la masa del objeto.
- En este contexto, una **fuerza conservativa** es el caso especial en el que la fuerza depende sólo de la posición $mx'' = F(x)$.
- Para este último tipo de campos, haciendo el cambio habitual de reducción de orden:

  $$y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x'' = y\frac{dy}{dx}$$

  llegamos a una EDO sencilla:

  $$my\frac{dy}{dx} = F(x)$$

  que podemos resolver mediante separación de variables obteniendo:

  $$\frac{1}{2}my^2 + V(x) = E \Rightarrow \frac{1}{2}m(x')^2 + V(x) = E$$

  donde $V(x) = -\int F(x)dx$ (potencial) y E es la constante de integración (energía total del sistema).
- Esta última expresión es una muestra de la validez del **Teorema de la Conservación de la energía:** la energía cinética más la energía potencial es constante en un campo conservativo.

7.2. Oscilador Armónico Simple

- El **Movimiento Armónico Simple** es un movimiento periódico, en el que un cuerpo oscila, de una forma muy concreta, respecto a una posición de equilibrio.

  Es el caso de un cuerpo unido a un muelle oscilando en el eje OX y que no está sujeto a otras fuerzas (como rozamiento o gravedad). Véase el diagrama de la figura 7.1.

  > **MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE:**
  >
  > La fuerza responsable del movimiento es directamente proporcional a la distancia entre el objeto y el punto de equilibrio.

  Suponiendo que la posición de equilibrio se encuentra en el origen ($x = 0$), dicha fuerza se expresará como $F(x) = -kx$ donde k es una constante positiva que depende del sistema físico. Esta fuerza es, en el sentido que explicamos en la sección anterior, conservativa.

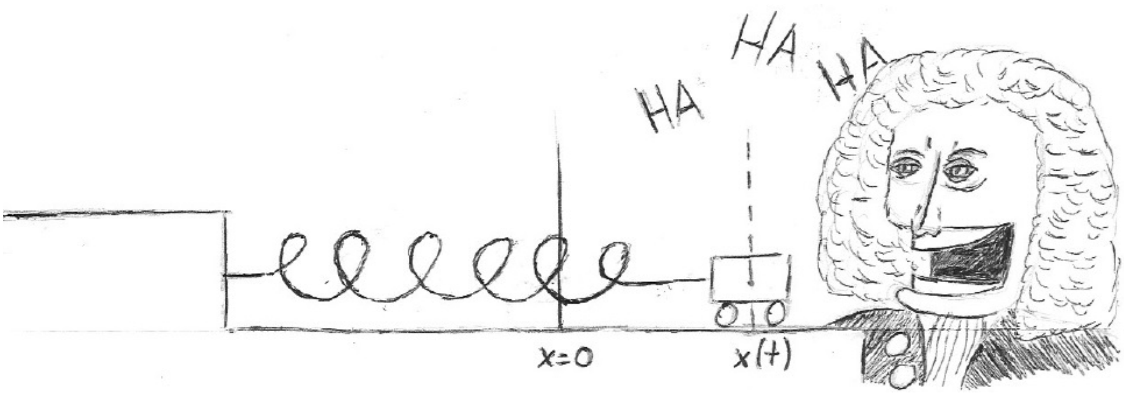


Figura 7.1: Aquí podemos ver a Hooke riendo con deleite ante un cochecito unido a un muelle.

  El signo negativo indica que en todo momento la fuerza que actúa sobre la partícula está dirigida hacia la posición de equilibrio.

  Según la Segunda Ley de Newton, el movimiento armónico simple se define entonces en una dimensión mediante la ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \text{ } \textbf{(Ley de Hooke)}$$

- Supongamos que cogemos el cuerpo, lo colocamos en una posición $x = A$ y lo "soltamos". Tenemos entonces el PVI:

$$\begin{cases} \frac{m}{d^2x}dt^2 + kx = 0 \\ x(0) = A \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

  cuya solución puede escribirse en la forma

$$x(t) = A\cos(bt) \text{ donde } b = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

7.3. Oscilador Armónico Amortiguado y Forzado

- Volvemos a considerar el modelo de una masa que se mueve unida a un resorte, solo que ahora consideraremos una fuerza de rozamiento.

> **MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO:**
>
> Existe una **"fuerza restauradora hacia la posición inicial"** (proporcional a la distancia del móvil respecto al punto de equilibrio) y una **fuerza de rozamiento** (que es proporcional a la velocidad).

- **Aclaración:** Aunque en las fórmulas clásicas el rozamiento entre dos sólidos no suele depender de la velocidad, en este modelo es muy común utilizar un rozamiento proporcional a ella, para mayor simplicidad. Este tipo de fuerza de rozamiento se utiliza, generalmente, para modelizar rozamiento en medios fluidos (véase [13]).

- La ecuación correspondiente a un Movimiento Armónico Amortiguado será, por tanto:

$$my'' = -ky - \mu y'$$

o equivalentemente:

$$y'' + \frac{\mu}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

- Tenemos por lo tanto una EDO lineal homogénea de coeficientes constantes. Es interesante ver cómo, en función de los parámetros, la trayectoria unidimiensional seguida por el movil varía cualitativamente. Esto se explorará en los ejercicios.

- Por último tenemos:

> **MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO Y FORZADO:**
>
> Existe una **"fuerza restauradora hacia la posición inicial"** (proporcional a la distancia del móvil respecto al punto de equilibrio), una **fuerza de rozamiento** (que es proporcional a la velocidad), y una **"fuerza externa"** o **forzamiento** que depende sólo del tiempo.

Esta última fuerza se suele añadir para "compensar el rozamiento" y conseguir que el movil "no se frene".

Obtenemos una ecuación del tipo:

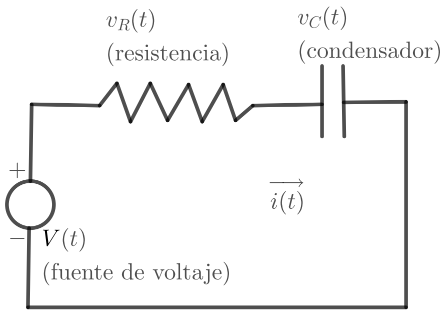
$$y'' + \frac{\mu}{m}y' + \frac{k}{m}y = g(t)$$

- Las funciones de forzamiento suelen ser senos y cosenos. Para resolver una EDO como ésta, suele poder utilizarse el método de los coeficientes indeterminados.

7.4. Circuitos RC y RLC

- En esta sección trataremos una aplicación de las EDO's a la electrónica. Más concretamente trabajaremos con circuitos muy básicos. Un **circuito** puede definirse como la conexión cerrada de **elementos electrónicos**. Para esta sección solo tomarán relevancia: generadores (de voltaje), resistencias, condensadores y bobinas.

- **Circuitos RC:** Supongamos que tenemos un circuito eléctrico con una **fuente de voltaje** (que impone una diferencia de potencial o tensión entre sus bornes), una **resistencia** (que se opone al paso de la corriente eléctrica y disipa energía electrica en forma de calor) y un **condensador** (que almacena energía en forma de campo eléctrico), todos ellos conectados en serie.



Denotemos en cada instante t por $V(t)$ a la entrada de voltaje, $i(t)$ a la corriente, $v_R(t)$ a la caida de tensión en la resistencia y $v_C(t)$ al voltaje al que está sometido el condensador.

> La **Ley de Kirchhoff de Tensiones** nos dice que $V(t) = v_R(t) + v_C(t)$ y la **Ley de Ohm** dice que $v_R(t) = i(t) \cdot R$ (donde R es la resistencia, que es constante).

Por tanto tenemos (hasta que el condensador esté totalmente cargado) que:

$$v_R(t) + v_C(t) = i(t)R + v_C(t) = V(t) \tag{7.1}$$

Sea C la capacidad del condensador (que es constante):

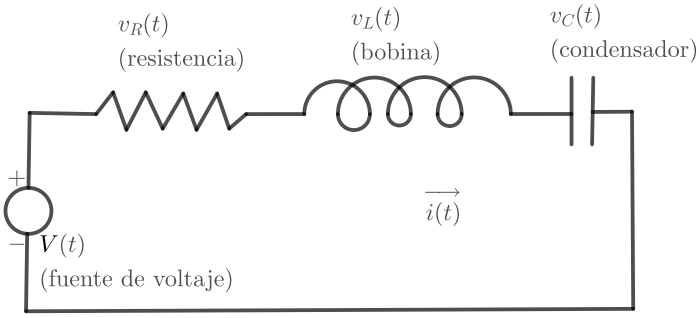
> La **Ecuación de Definición de un Condensador Ideal** dicta que $i(t) = C\frac{dv_C}{dt}$

Sustituyendo $i(t)$ en (7.1) llegamos a $RC\frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = V(t)$ y despejando:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{V(t) - v_C(t)}{RC} \tag{7.2}$$

Esta ecuación es lineal. En principio, para cada $V(t)$ concreta podríamos intentar resolverla. Es interesante pensar qué ocurriría para los casos más sencillos. Por ejemplo $V(t) = 0$ (el condensador se va descargando si ya estaba cargado) o $V(t) = cte$ (el condensador se va cargando). Esto se desarrollará en los ejercicios.

- **Circuitos RLC:** Ahora vamos a considerar un circuito más complicado. Además de los componentes anteriores incluiremos una **bobina** o **inductor** (que almacena energía en forma de campo magnético), también conectada en serie.



La Ley de Kirchhoff impone ahora que:

$$V(t) = v_R(t) + v_C(t) + v_L(t)$$

estando $v_L(t)$ definida por la **Ecuación de Definición de una Bobina**:

$$L\frac{di}{dt} = v_L(t)$$

Uniendo esto a la Ec. de Definición de un Condensador Ideal obtenemos la EDO de orden 2:

$$LC\frac{d^2V_C}{dt^2} + RC\frac{dV_C}{dt} + v_C(t) = V(t)$$

Hoja 7: EDO's de Orden 2 que aparecen en Física.

1. Una bola de masa 6 Kg se desplaza en línea recta por efecto de una fuerza conservativa constante igual a 2 N. Además se sabe que en el instante $t = 0$, momento en el cual consideramos que la bola está en su posición inicial, la velocidad de la misma es de $1\, m/s$.

   a) Determina la posición de la bola respecto de su posición inicial en cada instante $t \in \mathbb{R}$.

   b) ¿Cuál es la energía total del sistema?

2. Escribe la Ley de Hooke para un objeto que describe un Movimiento Armónico Simple cuya posición de reposo no está en $x = 0$ sino en $x = x_r$.

3. Plantea y resuelve el PVI correspondiente a un cuerpo que describe un Movimiento Armónico Simple cuya posición de reposo está en $x = x_r$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

4. Estudia todos los casos posibles de trayectorias de móviles que describen un Movimiento Armónico Amortiguado.

5. Considérese que un objeto de masa un kilo está en reposo pero comienza a experimentar un Movimiento Armónico Amortiguado Forzado, donde el coeficiente del muelle (fuerza restauradora) es $k = 1$, el coeficiente de rozamiento es $\mu = 2$ y la fuerza externa es $g(t) = \operatorname{sen} t$.

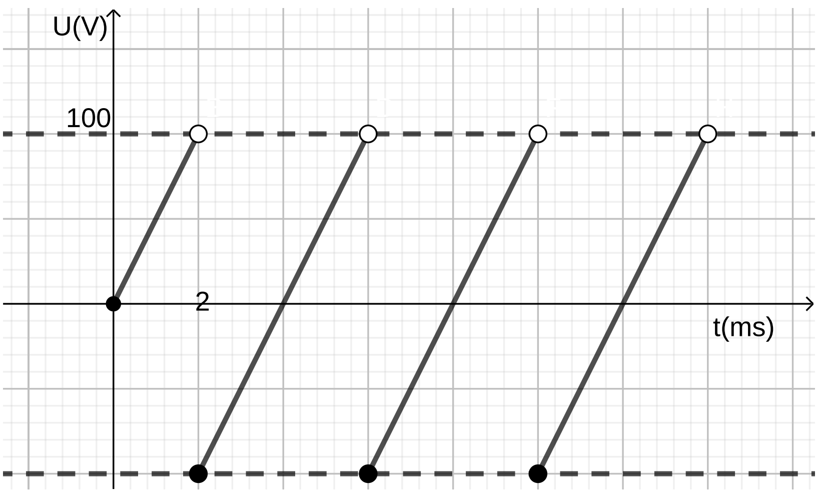
   a) Plantear y resolver el correspondiente PVI.

   b) ¿Cuál es la máxima elongación que alcanza el objeto?, y ¿cuál es el comportamiento del objeto a largo plazo? Respóndase a estas preguntas con la máxima precisión posible.

   c) Imaginemos que ahora no existe fuerza externa. ¿Cuál será el movimiento del objeto? ¿Tiene esto sentido?

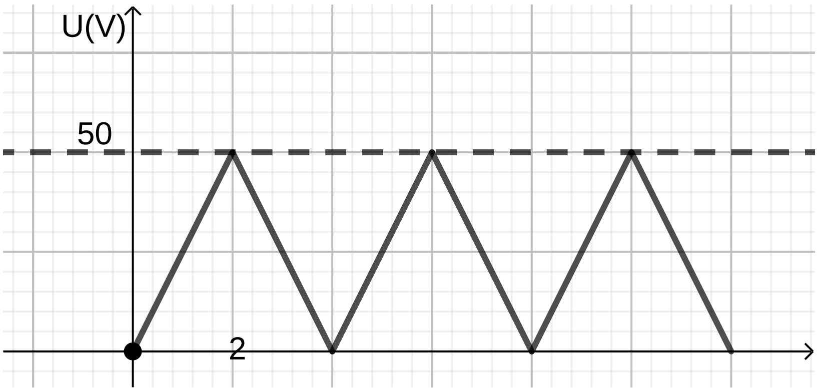
6. Resuelve la ecuación (7.2) para $V(t) = 0$ y $V(t) = cte$ y discute su significado físico.

7. Tenemos una bobina de constante $L = 0,05H$. Se nos da la función de la tensión en los bornes de la bobina $v_L(t)$ en la siguiente gráfica:



   Obtener la correspondiente $i(t)$ y dibujar su gráfica.

8. Tenemos un condensador de capacidad $60\mu F$. Se nos da la función de la tensión en los bornes del condensador en la siguiente gráfica:



Calcular la correspondiente $i(t)$ y dibujar su gráfica.

Capítulo 8

Series de Potencias y Ecuaciones en Diferencias

8.1. ¿Qué es una serie?

- Una **serie** es una expresión del estilo

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = lim_{n\to\infty}[a_0 + \ldots + a_n]$$

  donde los a_i son números (reales o complejos).

- Ese límite, puede existir o puede no existir. Si existe, decimos que la serie es **convergente**. Si no es convergente, tenemos dos opciones. Decimos que es **divergente** si

$$lim_{n\to\infty} |a_0 + \ldots + a_n| = +\infty$$

  y **oscilante** en caso contrario.

- Si una serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ es convergente, entonces la **cola de la sucesión** $\sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ es "cada vez más pequeña al crecer n", (recordemos que es un límite) y si n es" razonablemente grande":

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \approx \sum_{i=0}^{n} a_i \tag{8.1}$$

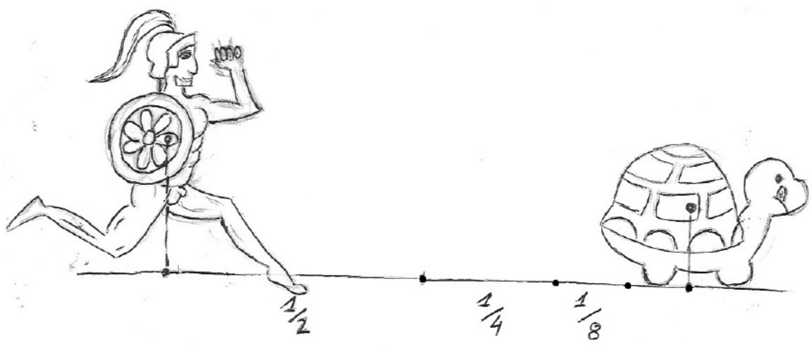


Figura 8.1: **Aquiles y la tortuga:** si queremos comprender por qué Aquiles alcanza a la tortuga (supongamos que no se mueve, no como en el enunciado original) habrá que comprender por qué $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$.

8.2. Series de Potencias

- Una **serie de potencias** alrededor del punto $t_0 \in \mathbb{R}$ es una expresión del tipo $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(t-t_0)^i$. Donde t es una variable. Para cada posible valor de la t, tenemos una serie (de las de la sección anterior).

- **Radio de Convergencia:** Para unos valores de t dicha serie sera convergente y para otros no. En particular, la serie siempre será (obviamente) convergente para $t = t_0$. Al número más grande R (si es que es mayor que 0) que podamos tomar de forma que para cada $t \in (t_0 - R, t_0 + R)$ la serie sea convergente lo llamamos **radio de convergencia**.

- Si tenemos una serie de potencias alrededor de un punto t_0 y con radio de convergencia R, la serie de potencias define una función definida en $(t_0 - R, t_0 + R)$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t-t_0)^i.$$

Esta tipo de función $f(t)$ se llama **analítica** en el intervalo $(t_0 - R, t_0 + R)$ y la correspondiente serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(t-t_0)^i$ decimos que es el **desarrollo en serie** de $f(t)$ alrededor del punto t_0 o en el intervalo $(t_0 - R, t_0 + R)$. Dicho desarrollo es único.

> Sea $f(t)$ una función elemental, y sea x_0 un punto en su dominio. Entonces $f(t)$ admite un desarrollo en serie alrededor del punto t_0.

Este desarrollo se puede obtener mediante la **serie de Taylor**, de la que no hablaremos aquí.

Por el contrario, no todas las funciones analíticas proceden de una función elemental (hay más funciones analíticas que elementales). Al hilo de lo que explicamos en la Sección 3.1, en un principio "función" quería decir "función elemental". El siguiente paso en el desarrollo histórico del concepto, fue identificar "función" con "función analítica".

- Ejemplos sencillos de funciones analíticas con sus respectivos desarrollos de Taylor con $t_0 = 0$ son

$$e^t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \qquad \operatorname{sen} t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} t^{2i+1} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} t^{2i} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{i=0}^{\infty} t^i = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots$$

El radio de convergencia de la última serie (abajo a la derecha) es $R = 1$. En los demás casos, el radio es $R = \infty$, esto es, las correspondientes series convergen $\forall t \in \mathbb{R}$.

- **Principio de Generalidad del Álgebra.** Esta expresión era usada por Cauchy para describir una serie de métodos usados en el siglo XVIII por matemáticos como Euler y Lagrange, y va a ser nuestra "justificación moral" para saltarnos los detalles (que se estudian en profundidad en los cursos de Cálculo) y "confiar" en que "todo sigue unas normas razonables".

Supongamos que tenemos dos funciones analíticas $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t-t_0)^i$ y $g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(t-t_0)^i$ $f'(t)$, $f(t) + g(t)$ son también analíticas cerca de t_0 y su desarrollo en serie será:

$$f'(t) = \sum_{i \geq 0} (i+1) a_{i+1} (t-t_0)^i, \qquad (f(t) + g(t)) = \sum_{i \geq 0} (a_i + b_i)(t-t_0)^i$$

Del mismo modo, existen fórmulas para los coeficientes $f(t) \cdot g(t)$, $f(g(t))$,...

8.3. ¿Por qué nos interesan las series? Motivo I: resolver EDO's

- En ocasiones, aunque no podamos resolver explícitamente una EDO, si suponemos que su solución $y(t)$ es analítica, sí que podemos encontrar su desarrollo en serie. O al menos los primeros coeficientes. Este desarrollo puede servirnos para dar una solución aproximada de $y(t)$, como indica la ecuación (8.1), de una manera diferente a la que vimos en capítulos anteriores.

Ejercicio Resuelto 8.3.1 ***Dada la EDO*** $\mathbf{y' + 2yt = 0}$ ***calcula la serie de potencias alrededor de*** 0 ***de la solución (suponiendo que es analítica).***

Sea $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$. *La derivada de* y *(si es que es analítica) tendrá como desarrollo en serie* $y'(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i t^{i-1}$. *Sustituyendo todo esto en la EDO llegamos a:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i t^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} 2 a_i t^{i+1} = 0 \implies a_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[(i+1)a_{i+1} + 2a_{i-1}\right] t^i = 0.$$

Igualando los coeficientes a cero obtenemos $\begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \ \textit{ puede ser cualquier número} \\ a_1 = 0 \\ a_{i+1} = \frac{-2}{i+1} a_{i-1} \ , \quad i \geq 1 \end{cases}$

Es fácil calcular los primeros términos a_i. *Y con un poco de paciencia podemos encontrar una fórmula para todos los coeficientes:*

$$a_{2i} = \frac{(-1)^i}{i!} a_0 \ , \ i = 1, 2, 3, \ldots \quad ; \quad a_{2i+1} = 0 \ , \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

No lo piden en el ejercicio pero, conociendo el desarrollo en serie de Taylor de la expoencial e^t, *no es difícil comprobar que la expresión de la solución* $y(t)$ *anterior se corresponde con la de* $a_o \cdot \mathrm{e}^{-t^2}$ *que hubiese sido la solución que habríamos obtenido resolviendo la EDO por el método de variables separadas.*

- En general, el método anterior puede servirnos para resolver o encontrar aproximaciones de EDO's lineales de segundo orden homogéneas. Esto es, del tipo

$$f(t)y'' + g(t)y' + h(t)y = 0,$$

dando por hecho que $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son analíticas y tienen un desarrollo conocido.

8.4. ¿Por qué nos interesan las series? Motivo II: Ecuaciones en Diferencias, la versión discreta de las EDO's

- Como ya comentábamos en el Capítulo 2, las EDO's pueden usarse para "predecir el futuro". Pero desde luego no son la única opción. Las hemos estado utilizando para predecir como se comportará una magnitud y que varía con el tiempo t, sabiendo una condición inicial $y(t_0) = y_0$. Pero puede que no sea posible, o conveniente, determinar los valores de y para cualquier valor de t (cómo varía y *continuamente* respecto de t). A lo mejor queremos estudiar cómo varía y cada año, cada mes o cada hora (modelo discreto).

  En este caso, tenemos (1) una "sucesión de tiempos" $(t_0, t_1, t_2, \ldots)$ que supondremos van en intervalos regulares (como cuando estudiamos soluciones aproximadas $t_{k+1} - t_k = h$) y (2) una "sucesión de magnitudes" (en algunos contextos se suele llamar **serie temporal**) $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$ en la que y_k es el valor de la magnitud en el instante t_k.

Ejercicio Resuelto 8.4.1 ***Se quiere repoblar unos montes con lobos. Se llevan 100 lobos a la zona. Los lobos, se reproducen una vez al año. Como los primeros años los lobos tienen recursos de sobra, cada pareja de lobos da a luz a otra pareja de lobos, y no fallece ningún lobo. Describe (con una ecuación) como variará la población de lobos a lo largo de los años de acuerdo a estas hipótesis***

En este caso, no tiene serntido buscar un "modelo continuo". Porque los lobos no se reproducen de manera uniforme a lo largo del año. Vamos a denotar por y_k al número de lobos que hay en el año k desde que empezamos a estudiar el proceso. La sucesión de tiempos es en este caso $(t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots)$ (suponemos que las unidades son años). La población queda descrita por la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} y_{k+1} = 2y_k \\ y_0 = 100 \end{cases}$$

- Como seguro que el lector ya sabrá (véase [7]), una sucesión queda determinada por (1) una fórmula general o (2) una fórmula recurrente (como la del ejercicio anterior). No obstante, en este tipo de modelos, la sucesión viene sujeta a una ecuación en diferencias.

Una **ecuación en diferencias** es una expresión del tipo:

$$F(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_{n+1}, y_n, t_{n+k}, \ldots, t_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.2}$$

El orden de la ecuación será la diferencia entre el mayor y el menor de los índices (k en este caso). Si no aparece ningún término t_n (como en el ejemplo anterior) la ecuación en diferencias decimos que es, por analogía, **autónoma**.

Las **soluciones** de la ecuación en diferencias son sucesiones $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$ cuyos términos cumplan (8.2) para todo n. El conjunto de todas las soluciones es la **solución general**.

- Es de esperar que en la solución general aparezcan tantas constantes como el orden de la ecuación, que se podrán calcular si nos dan los valores de ciertas **condiciones inciales** $y_0, y_1, y_2, \ldots$. Por lo tanto, para determinar una solución concreta, el número de condiciones iniciales necesarias será igual al orden de la ecuación en diferencias.

- Existe una fuerte relación entre sucesiones y series:

  $$(y_0, y_1, y_2 \ldots) \longleftrightarrow y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots$$

  y por tanto existe una fuerte relación entre ecuaciones en diferencias (involucrando a los coeficientes) y ecuaciones diferenciales (suponiendo que las soluciones sean analíticas). Ya hicimos una de estas "transformaciones" en el Ejercicio Resuelto 8.3.1 y veremos alguna más en la última sección del capítulo..

8.5. Ecuaciones en Diferencias Lineales Homogéneas de orden 2

- Las ecuaciones en diferencias más sencillas serán las **lineales con coeficientes constantes y autónomas**: aquellas del tipo $a_k y_{n+k} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$.
- Incluimos ahora el método de resolución para orden 2 (para orden n, procederíamos de manera muy similar). El método empleado resultará sin duda familiar al lector.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES HOMOGÉNEAS DE ORDEN 2

Dadas tres constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ sea la ecuación

$$a y_{n+2} + b y_{n+1} + c y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.3}$$

- Calculamos las raíces del **polinomio característico asociado** $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, que llamamos λ_1, λ_2.
- Si las dos raíces son diferenes, la solución general es $y_n = A \cdot (\lambda_1)^n + B \cdot (\lambda_2)^n$, $A, B \in \mathbb{C}$.
- Si tenemos una raíz real doble ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$), es $y_n = A \cdot (\lambda)^n + B \cdot n(\lambda)^n$, $A, B \in \mathbb{C}$.

- **Una justificación moral de los números complejos:** Ocurre algo realmente bonito con las fórmulas que se explican en el cuadro anterior. Ya ocurría con las EDO's, pero en este caso involucran una matemática mucho más sencilla: nada de derivadas ni funciones, sólo números.

  Despejando en la ecuación (8.3) obtenemos que $a y_{n+2} = -b y_{n+1} - c y_n$. Obviamente, si y_0, y_1 son números reales, el resto de números de la sucesión también serán números reales. Sin embargo, para dar una fórmula general para el término y_n, involucramos números complejos.

  A veces, trabajando con números reales, en un contexto totalmente "del mundo real", partiendo de números reales y esperando obtener números reales como resultado, "por el camino" es necesario hacer cuentas con complejos.

Ejercicio Resuelto 8.5.1 ***Considerar la ecuación en diferencias*** $\mathbf{y_{n+2} + y_n = 0}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ***, donde*** $y_0 = y_1 = 1$***, y calcular la solución.***

Las raíces del polinomio característico asociado $\lambda^2 + 1 = 0$ *son* $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. *La solución general es por tanto*

$$y_n = Ai^n + B(-i)^n, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Es fácil ver que si $y_0 = y_1 = 1$, *entonces la solución de la ecuación en diferencias es*

$$(y_0, y_1, y_2, \ldots) = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots)$$

Veamos que ocurre si lo resolvemos usando el método anterior. Usando la expresión que tenemos de la solución general

$$y_n = A \cdot i^n + B \cdot (-i)^n$$

e imponiendo que $y_0 = y_1 = 1$ *llegamos a que:*

$$A = \frac{i+1}{2i} \ ; \ B = \frac{i-1}{2i}.$$

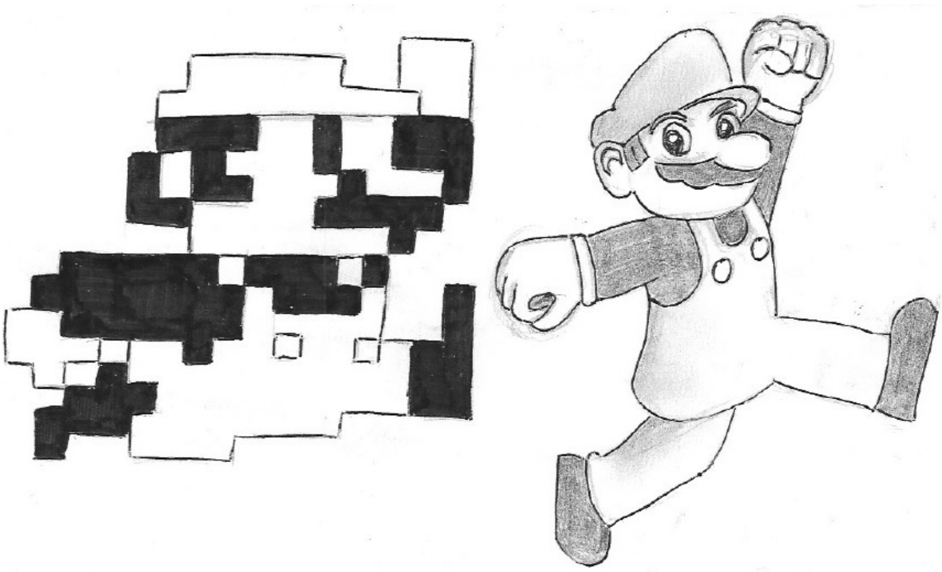
Luego otra forma de dar la solución sería

$$y_n = \frac{(i+1)}{2i} i^n + \frac{(i-1)}{2i} (-i)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Pero, ¡no nos despistemos! El lector puede comprobar que en efecto ambas expresiones corresponden a la misma solución.

8.6. De continuo a discreto y de discreto a continuo

- En Modelización es posible pasar de la "versión continua" (EDO's) a la "versión discreta" (Ecuaciones en Diferencias) y viceversa.



- **De lo continuo a lo discreto:** en el proceso de modelización, esto es algo muy fácil de hacer. Lo hicimos, en el Ejercicio Resuelto 8.4.1. También lo hicimos, de alguna forma y para obtener una solución aproximada, con el Método de Euler.

  Dada una EDO, es posible formar una Ecuación en Diferencias haciendo lo siguiente:

$$y' = f(t, y) \Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = f(t, y) \Longrightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(t_n, y_n)$$

  donde h es el paso y por lo tanto $t_n = t_0 + n \cdot h$. Hemos obtenido pues la siguiente ecuación en diferencias de orden 1:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{t_n - t_0}{n} f(t_n, y_n) = y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y_n).$$

- **De lo discreto a lo continuo:** El paso contrario no se puede dar siempre. Necesitamos Ecuaciones en Diferencias especiales. Por ejemplo:

$$y_{n+1} = y_n + 2 \cdot (t_{n+1} - t_n) y_n \Longrightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = 2 \cdot y_n \Longrightarrow y' = 2y$$

Hoja 8: Series de Potencias.

1. Encuentra el desarrollo en serie de potencias de la solución, suponiendo que sea analítica, de la EDO $y'' + ty' + y = 0$.

2. Encuentra el desarrollo en serie de potencias de la solución, suponiendo que sea analítica, de la EDO $y'' - ty = 0$.

3. Encuentra el desarrollo en serie de potencias de la solución, suponiendo que sea analítica, de la EDO $(1 - t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$.

4. Encuentra el desarrollo en serie de potencias de la solución, suponiendo que sea analítica, de la EDO $y'' - 2ty' + 2py = 0$ en función de la constante p.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones en diferencias:

   a) $4y_{n+2} - y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$
   b) $y_{n+2} - 2y_{t+1} + y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$
   c) $3y_{n+2} + 2y_{n+1} + 1 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

6. La **sucesión de Fibonacci** es bastante conocida. Aparece en libros y películas (como *El Código Da Vinci*). Aparece por primera vez en un libro de texto de un hombre apodado Fibonacci, con el que se introdujeron en Europa los números arábigos. Está relacionada con muchos patrones que aparecen en la Naturaleza. Viene dada por la siguiente sucesión:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \qquad a_0 = 1, a_1 = 1$$

   En otras palabras, cada término se obtiene sumando los dos anteriores. Escribe los 10 primeros términos de esta sucesión. Después, resuelve esta ecuación en diferencias.

7. Transforma la siguiente EDO $y' = 3y - t$ en una ecuación en diferencias con paso $h = 1$.

   a) Resolver tanto la EDO como la ecuación en diferencias.
   b) Suponer que $y(0) = 1$ y comprobar el error cometido entre el segundo término y_2 de la solución de la ecuación en diferencias e $y(2)$ de la solución de la EDO.
   c) Definir otra ecuación en diferencias donde el paso ahora sea $h = 1/4$. ¿Es el error en el segundo paso en este caso menor? ¿ Por qué?

Capítulo 9

Transformada de Laplace

El Marqués de Laplace (1749-1827) posando orgulloso junto al capítulo que vamos a dedicar a la transformada que lleva su nombre.

9.1. Operadores. Transformadas integrales

- En este capítulo, por tradición, volveremos a denotar a la variable dependiente por x.
- En Matemáticas, un **operador** es una "función de funciones": una función que a cada función real de variable real (quizás no a todas, los operadores también pueden tener un **dominio**) le asocia otra función real de variable real. Por ejemplo, tenemos al **operador derivada** y al **operador integral**:

$$D(f(x)) = f'(x), \qquad I(f(x)) = F(x), \text{ donde } F'(x) = f(x), \ F(0) = 0$$

- Las funciones reales de variable real son un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$: existe una suma de funciones $f_1(x) + f_2(x)$ y una multiplicación por escalares $\lambda \cdot f(x)$ que cumplen las propiedades (para más información sobre espacios vectoriales ver Anexo).
- Por tanto, tiene sentido el concepto de **operador lineal**. L es un operador lineal si:

$$L(f_1(x) + f_2(x)) = L(f_1(x)) + L(f_2(x)), \qquad L(\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot f(x)$$

- Un tipo importante de transformaciones lineales son las **transformaciones integrales**. Consideremos una función fija $K(p, x)$ que depende de x y de un determinado parámetro p que llamamos el **núcleo de la transformación**. Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$. Definimos:

$$T(f(x)) = \int K(p, x)f(x)dx = F(p)$$

9.2. La transformada de Laplace

La **transformada de Laplace** es la transformación integral:

$$L[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x)dx = F(p)$$

- La transformada de Laplace no está definida para cualquier función $f(x)$: ya sea porque la integral de Riemann no existe (eso pasa con funciones "muy discontinuas" y "raras") o porque la integral (que es impropia para cada valor de p) da ∞.
- Vamos a dedicar esta sección a recopilar algunos trucos que nos permitirán calcular la transformada de bastantes funciones.
- En primer lugar, incluiremos una tabla que recopila algunas transformadas de funciones muy útiles:

$f(x)$		$L(f(x))$
1	$\longrightarrow$	$\frac{1}{p}$
x	$\longrightarrow$	$\frac{1}{p^2}$
x^n	$\longrightarrow$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$sen(ax)$	$\longrightarrow$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$cos(ax)$	$\longrightarrow$	$\frac{p}{p^2+a^2}$

Cuadro 9.1: Transformadas de funciones.

- Algunas fórmulas que debéis conocer son las siguientes:

La Transformada de Laplace es un operador lineal (como ya habíamos dicho):

$$L[f(x) + g(x)] = L[f(x)] + L[g(x)], \qquad L(\lambda \cdot f(x)] = \lambda \cdot L[f(x)]$$

Otras fórmulas para calcular transformadas: Sea $F(p) = L[f(x)]$. Entonces:

$$L[e^{ax} \cdot f(x)] = F(p-a), \qquad , L[x^n f(x)] = (-1)^n F^{(n)}(p), \qquad L[\frac{f(x)}{x}] = \int_z^{+\infty} F(t)dt$$

- Pero sobre todo, la que más nos va a interesar, y la que nos permite utilizar a la transformada de Laplace para resolver EDO's es la siguiente:

La Transformada de Laplace de la derivada n-esima:

$$L[f'(x)] = pL[f(x)] - f(0), \qquad L[f''(x)] = p^2 L[f(x)] - pf(0) - f'(0), \qquad \ldots$$

$$L[f^{(n)}(x)] = p^n L[f(x)] - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

9.3. Antitransformada o transformada inversa de Laplace

- Sucede lo siguiente:

Inyectividad de la Transformada de Laplace: Sean f y g dos funciones continuas tales que $L[f(x)] = L[g(x)]$. Entonces $f(x) = g(x)$, para cualquier x en $[0, +\infty)$.

- Gracias a eso, podemos definir:

Dada una función $F(p)$, la función $f(x)$ tal que $L(f(x)) = F(p)$ se llama **transformada inversa** o **antitransformada de Laplace**. Suele utilizarse la notación:

$$L^{-1}[F(p)] = f(x)$$

- Para calcular las antitransformadas (cosa que necesitaremos hacer) podemos utilizar las propiedades de la sección anterior.

Ejercicio Resuelto 9.3.1 ***Calcula*** $\mathbf{L^{-1}\left[\frac{p}{p^2-2p+5}\right]}$.

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2-2p+5}\right] = L^{-1}\left[\frac{p}{(p-1)^2+2^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2} + \frac{1}{(p-1)^2+2^2}\right] =$$

$$= L^{-1}\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^2+2^2}\right] = e^x \cdot L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+2^2}\right] + e^x \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+2^2}\right] =$$

$$= e^x \cdot L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+2^2}\right] + \frac{e^x}{2} \cdot L^{-1}\left[\frac{2}{p^2+2^2}\right] = e^x \cdot cos(2x) + \frac{e^x}{2} \cdot sen(2x) = e^x \cdot (cos(2x) + \frac{1}{2} sen(2x)).$$

9.4. Cómo usar la transformada de Laplace para resolver EDO's de cualquier orden

- Dada una EDO de cualquier orden cuya "función incógnita es $y(x)$". A veces es posible resolverla haciendo lo siguiente:

(1) Tomamos la transformada de Laplace en los dos lados de la igualdad.

(2) Usamos las propiedades de la transformada (sobre todo la que simplifica las derivadas de orden superior) para despejar $L[y(x)]$ en términos de funciones que dependan sólo de x.

(3) Hacemos la antitransformada en los dos lados para despejar $y(x)$.

- Por ejemplo, vamos a mostrar como usar este truco para resolver una EDO lineal con coeficientes constantes:

Sea la EDO de segundo orden $y'' + ay' + by = f(x)$.

(1) Hacemos la transformada de Laplace a los dos lados:

$$L[y'' + ay' + by] = L[f(x)]$$

$$L[y''] + aL[y'] + bL[y] = L[f(x)]$$

(2) Sustituyendo ahora lo que valen $L[y'(x)]$ y $L[y''(x)]$ de acuerdo a las fórmulas de la sección anterior llegamos a:

$$(p^2L[y(x)] - py(0) - y'(0)) + a(-y(0) + pL[y(x)]) + bL[y(x)] = L[f(x)]$$

y podemos despejar:

$$L[y] = \frac{L[f(x)] + (p+a)y(0) + y'(0)}{p^2 + ap + b}$$

(3) Para terminar, tendríamos que tomar la antitransformada en los dos lados de la igualdad y despejar:

$$y(x) = L^{-1}\left[\frac{L[f(x)] + (p+a)y(0) + y'(0)}{p^2 + ap + b}\right]$$

- Por supuesto este método también ayuda a resolver muchas EDO's de cualquier orden no necesariamente lineales. El lector puede practicar con los ejercicios 6.b y 6.c del presente capítulo.

Hoja 9: Transformada de Laplace

1. Demuestra todas las fórmulas que aparecen en el Cuadro 9.1.

2. Escribe la fórmula de la transformada de Laplace de $f''(x), f'''(x), f^{iv}(x), f^{v}(x)$.

3. Calcula la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = 2 + x^5 + cos(\pi x)$.

   (b) $f(x) = a + bx + cx^2$ donde a, b, c son constantes.

   (c) $f(x) = e^{3x}\cos(3x)\cos(4x)$

4. Encuentra la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

   (a) $F(p) = \frac{2p}{p^2-1}$.

   (b) $F(p) = \frac{1}{s^2(s^2+3s-4)}$

   (c) $F(p) = \frac{p^2+p+1}{(p^2+a^2)^2}$ donde $a \in \mathbb{R}$.

5. Resuelve, utilizando transformadas de Laplace las siguientes EDO's:

   (a) $y'' + y' + y = 0$

   (b) $y'' - 5y' + 6y = 0$

   (c) $y'' + 2y' + y = 0$

   (d) $y''' - y'' = 0$

6. Resuelve los siguientes PVI utilizando la transformada de Laplace:

   $a)\ \begin{cases} y'' + k^2 y = 2sen(\omega x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

   $b)\ \begin{cases} xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

   $c)\ \begin{cases} xy'' - 4y' - xy = -6xe^x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Parte IV

Sistemas de EDO's de Primer Orden

Capítulo 10

Conceptos básicos

10.1. Introducción

- Hasta ahora, todas las ecuaciones que hemos visto tenían una única "función-incógnita". Pero también existen otras con más de una. Un **sistema de EDO's** es un conjunto de EDO's en las que aparecen más de una "función-incógnita". Una **solución** del mismo, es un conjunto de funciones que satisface todas estas ecuaciones.
- A veces, se escriben también "como una EDO de una variable cuya incógnita es en realidad un vector $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ de funciones incógnitas":

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad Y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

- Habitualmente (de forma análoga a lo que hacíamos con las EDO's de una variable) se restringe el estudio a sistemas en los que en cada una de esas ecuaciones, aparece la derivada de una "función-incógnita" diferente. En otras palabras, nos quedaremos con los sitemas de la forma:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, \ldots, x_n, t) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, \ldots, x_n, t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, \ldots, x_n, t) \end{cases} \qquad \text{o abreviadamente } Y' = F(Y, t)$$

- Una primera observación importante es que cualquier EDO de orden superior, se puede escribir como un sistema de EDO's. Por ejemplo:

$$cos(t)x'' - 3x' + x = e^t \Rightarrow \begin{cases} cos(t) \cdot y' - 3y + x = e^t \\ x' = y \end{cases}$$

- De nuevo, nos enfrentamos a las correspondientes cuestiones sobre existencia y unicidad de soluciones.

> **Teorema 10.1.1 (Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones para Sistemas)** *Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales de primer oden del tipo $Y' = F(Y, t)$ donde la función $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable. Entonces, para cada posible elección de las condiciones iniciales t_0, Y_0, existe una función $Y(t)$ definida en un entorno de t_0. Además, dicha solución es única en ese intervalo.*

- Y de nuevo, tendremos que considerar procedimientos analíticos, numéricos y cualitativos para estudiar las soluciones de los sistemas. Los sistemas son aún más complicados de tratar analíticamente que las ecuaciones. Sólo aprenderemos a resolver explícitamente los sistemas lineales.

10.2. Curvas y Sistemas de EDO's

Figura 10.1: Felix Klein (1849-1925) es uno de nuestros matemáticos favoritos. Fue el promotor del *Programa Erlangen*, el primero que describió la *Botella de Klein* (a la derecha en la imagen) y el autor de la frase "*Cualquiera sabe lo que es una curva, hasta que ha estudiado suficientes matemáticas para confundirse entre los incontables números de posibles excepciones*".

- **Parametrizaciones:** A continuación explicaremos una de las posibles opciones para definir lo que es una *curva.*

  Supongamos que tenemos un objeto que se mueve por el plano, el espacio,... o un espacio de dimensión superior a 3 ($\mathbb{R}^n$). La *trayectoria* que describe en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es el conjunto de todas las posiciones que ocupa en cada uno de los instantes $t \in [a, b]$.

  Olvidándonos de la interpretación física, matemáticamente se define una **parametrización** como una *función continua* γ (nosotros vamos a pedir que también sea diferenciable) definida en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que a cada instante t en I le hace corresponder una posición en el plano, o espacio, o espacio de más de 3 dimensiones. La notación habitual es la siguiente:

  $$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

  $$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix}$$

  La **curva** es la imagen $Im(\gamma)$, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ por los que pasa el móvil.

- La parametrización tiene más información que la curva (no sólo indica por qué puntos pasa el móvil, si no en qué instante y a que velocidad). De hecho, una misma curva puede ser parametrizada de más de una forma. Por ejemplo, consideremos el segmento $\{(x, 0) : x \in [0, 1]\}$ (que es una curva). Dos posibles parametrizaciones serían

  $$\gamma(t) = (t, 0) \text{ y } \psi(t) = (t^2, 0) \text{ con } t \in [0, 1]$$

- Las parametrizaciones serán de importancia para nosotros ya que, recordemos, las soluciones de un sistema de EDO's son "vectores columna":

  $$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

  que pueden interpretarse como parametrizaciones de curvas.

- **El caso $n = 2$ (curvas planas)** es el caso más sencillo. Un ejemplo importante de curva es la gráfica de cualquier función: en la que la coordenada y es una función $y = f(x)$ de la coordenada x que a su vez varía en un cierto intervalo I. Todas estas gráficas son curvas que admiten una parametrización muy sencilla: $(t, f(t))$.
- **Vectores tangentes:** Dada una curva y una parametrización $Y(t) = (x(t), y(t))$ de una curva, el vector $(x'(t), y'(t))$ es tangente a la curva en el punto $(x(t), y(t))$.

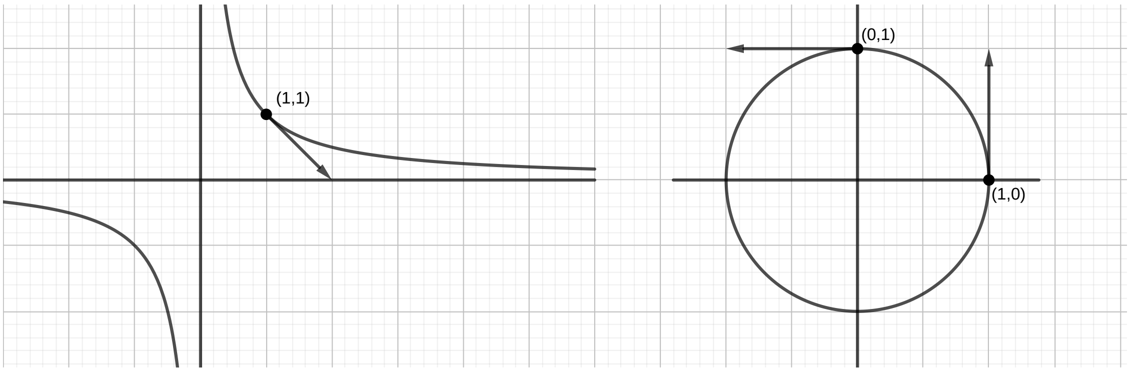


Figura 10.2: A la izquierda podéis ver una **hipérbola equilátera**, también llamada **rectángular**, que podemos parametrizar como $(x(t), y(t)) = (t, \frac{1}{t})$ (es la gráfica de la función $y = f(x) = \frac{1}{x}$). Vemos que $(x'(t), y'(t)) = (1, -\frac{1}{t^2})$. Así que el vector tangente a la curva en el punto $(x(1), y(1)) = (1, 1)$ es $(x'(1), y'(1)) = (1, -1)$. Por otra parte, a la derecha tenéis un círculo de radio 1 (la escala en ambas figuras no es la misma), que podemos parametrizar por $(cos(t), sen(t))$. Vemos que $(x'(t), y'(t)) = (-sen(t), cos(t))$. Por lo tanto el vector tangente a la curva en el punto $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ es $(x'(0), y'(0)) = (0, 1)$ y en el punto $(x(\frac{\pi}{2}), y(\frac{\pi}{2})) = (0, 1)$ es $(x'(\frac{\pi}{2}), y'(\frac{\pi}{2})) = (-1, 0)$.

Ampliación: Nótese que, dada cualquier parametrización $(x(t), y(t))$ de una misma curva, los vectores $(x'(t), y'(t))$ deben ser todos paralelos. Lo que sí que varía de una parametrización a otra es su módulo e incluso su sentido. El módulo de ese vector tangente es lo que se interpreta como la "velocidad" a la que se recorre la curva (y, como hemos repetido varias veces depende de la parametrización).

Dada una curva, existe una parametrización que es especial: la **parametrización por longitud de arco**. Si $\gamma(t)$ es una parametrización por longitud de arco de una curva, entonces la longitud de la curva desde el punto $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ es $t_2 - t_1$. Por ejemplo, la parametrización del círculo de la imágen anterior es una parametrización por longitud de arco.

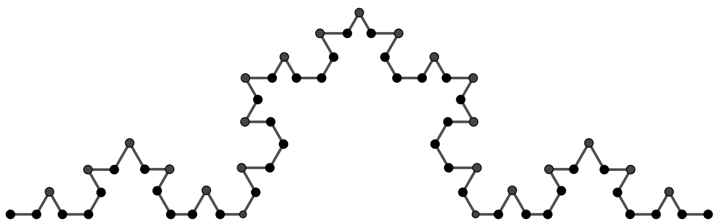


Figura 10.3: Aquí podemos ver una de las primeras iteraciones de una curva autosemejante del tipo "copo de nieve" o "*snowflake*". Cada iteración se obtiene subidiviendo cada uno de los segmentos en 3 y usando el segmento central para dibujar un triángulo equilátero. ¡La longitud de la curva que obtendríamos si siguéramos iterando así es infinito!

10.3. Campos de Vectores: Análisis Cualitativo de Sistemas Autónomos

- En esta sección, hablaremos sólo de **sistemas autónomos**. Son sistemas del estilo $Y' = F(Y)$ (en las ecuaciones, ninguna de las derivadas depende explícitamente de la t).

  Por ejemplo $\begin{cases} x' = x \cdot y \\ y' = x + y \end{cases}$ es autónomo pero $\begin{cases} x' = x \cdot y \\ y' = x + y + t \end{cases}$ no lo es.

- Un **campo de vectores** es, formalmente, una función continua que a cada punto de un espacio $\mathbb{R}^n$ le asocia un vector en $\mathbb{R}^n$.

- **Interpretación Geométrica de los sistemas de EDO's Autónomos:** un sistema autónomo de EDO's da lugar a un campo de vectores. Las "parametrizaciones-solución" $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t), \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$ vienen determinadas por el hecho de que deben ser tangentes en cada punto por el que pasan $(Y(t))$ al vector tangente que el campo de vectores le asocia a dicho punto $(Y'(t))$.

- En el caso $n = 2, n = 3$ podemos representar los campos de vectores. Destacamos unos cuantos puntos del plano, y en cada uno de ellos representamos el vector tangente a la "parametrización-solución".

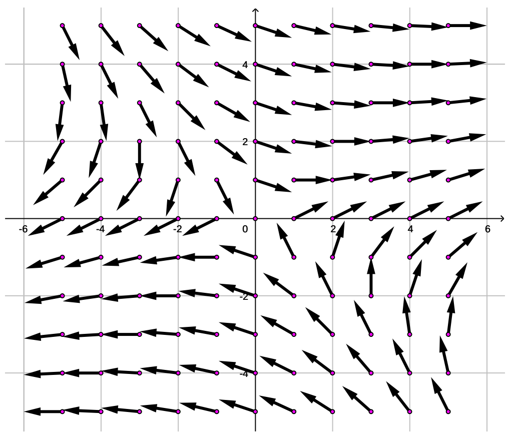


Figura 10.4: Aquí puede verse una representación del campo de vectores correspondiente al sistema $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$.

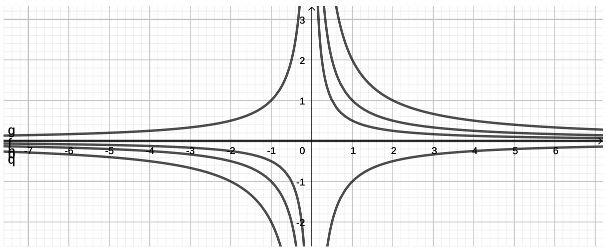
En ocasiones es más cómodo, en lugar de representar **campos de vectores**, representar **campos de pendientes** (similares a los que ya hemos visto antes, para EDO's de una sola variable, aunque ahora con una interpretación totalmente distina), en los que en cada punto no se representa el vector tangente, si no la dirección del vector tangente (sin módulo ni sentido).

- Si sobre esta representación del campo de pendientes representáramos las curvas correspondientes a las "parametrizaciones-solución" entonces obtendríamos lo que se llama un **diagrama de fases** o **plano de fases**.

- Para los sistemas no autónomos, incluso para los de dos incógnitas, los diagramas no son tan útiles. En particular no disponemos de nada parecido a un campo de vectores: para cada valor de t el vector correspondiente a un mismo punto varía.

Ejercicio Resuelto 10.3.1 ***Considérese la familia de curvas de la forma*** $(\mathbf{x(t)}, \mathbf{y(t)}) = (\mathbf{t}, \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{t}})$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}$. ***(a) Representa las curvas correspondientes para los valores*** $C = -1, 0, 1/2, 1, 2$. ***(b) Encuentra un sistema de EDO's cuya solución sean esas curvas. (c) Dibuja el campo de vectores de ese sistema y compáralo con las curvas anteriores.***

(a) *Cuando $C = 1$, tenemos una curva que debemos saber representar al dedillo, pues coincide con la gráfica de la* ***hipérbola equilátera****, también llamada* ***rectangular*** $y = \frac{1}{x}$ *(ya hemos hablado de ella en la sección anterior). El resto de curvas, corresponden a gráficas de funciones del estilo $y = \frac{C}{x}$, que son dilataciones verticales de la anterior.*

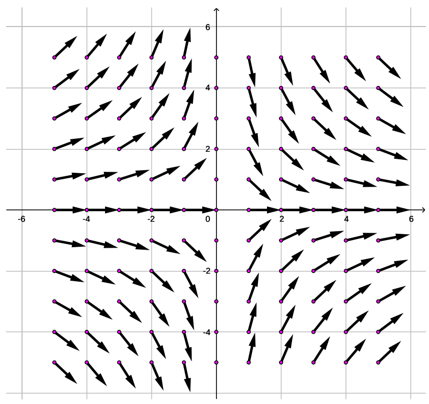


Todas las curvas tienen dos ramas, que se encuentrar en cuadrantes opuestos respecto del origen. El caso $C = -1$ es el único en el que la curva ocupa los cuadrantes 2 y 4. El caso $C = 0$ es el propio eje x. Los demás casos están en los cuadrantes 1 y 3. Las curvas son "más pegadas al origen de coordenadas" cuánto menor es el valor de C.

(b) *Derivando y obteniendo $x'(t) = 1$, $y'(t) = -\frac{1}{t^2}$, es fácil que se nos ocurra el sistema:*

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = -\frac{y}{x} \end{cases}$$

(c) *Abajo podemos ver el campo de vectores. Vemos que si "unieramos los vectores" obtendríamos algo muy parecido a las hipérbolas de la figura anterior.*



- Los puntos del plano tales que el correspondiente vector del campo $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ es igual a 0 se llaman **puntos de equilibrio**. Estos puntos son de suma importancia y es lo primero que debemos localizar al intentar comprender como se comportan las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales. Si una solución atraviesa un punto de equilibrio, se quedará permanentemente "atrapada" en ella. Normalmente si hay unicidad de soluciones, una solución no puede atravesar un punto de equilibrio. Se puede acercar "en tiempo infinito" a él, o bien ser una solución constante e igual al punto de equilibrio. Veremos más sobre puntos de equilibrio para algunos sistemas sencillos en la Sección 11.4.

10.4. Sistemas Desacoplados

- **Sistemas desacoplados:** los primeros sistemas, en su mayoría autónomos, que resolveremos son aquellos de la forma
$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, t) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, x_2, t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, \ldots, x_n, t) \end{cases}$$
Es decir, en la primera de las ecuaciones sólo aparece la función x_1 y su derivada, en la segunda, las funciones x_1, x_2 y sus derivadas, y así sucesivamente.

Ejercicio Resuelto 10.4.1 ***Resuelve el siguiente sistema autónomo:***

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = 2x} \\ \boldsymbol{y' = x - y} \end{cases}$$

Primero resolvemos la EDO:

$$x' = 2x \Rightarrow \boxed{x(t) = Ce^{2t},\ C \in \mathbb{R}}$$

y después la segunda EDO del sistema, sustituyendo la $x(t)$ por la expresión que acabamos de obtener:

$$y' = x - y \Longrightarrow y' = (Ce^{2t}) - y$$

Esta EDO, es lineal y de primer orden:

$$y' + y = Ce^{2t}$$

$$\mu y' + \mu y = \mu C e^{2t}$$

Para que $(\mu y)' = \mu y' + \mu y$ queremos que $\mu' = \mu$, así que tomamos $\mu(t) = e^t$ y llegamos a:

$$e^t y' + e^t y = e^t C e^{2t}$$

$$(e^t \cdot y)' = Ce^{3t}$$

$$e^t y = \frac{C}{3} e^{3t} + D$$

$$\boxed{y(t) = \tfrac{C}{3} e^{2t} + De^{-t},\ D \in \mathbb{R}}$$

Hoja 10: Sistemas de EDO's.

1. Invéntate un sistema sencillo de EDO's de primer orden desacoplado con tres "funciones-incógnita" $x(t), y(t), z(t)$ y resuélvelo.

2. Considera la ecuación de segundo orden $y'' - 8y' + 15y = 0$ (a) Resuélvela con los métodos de los capítulos anteriores. (b) Conviértela en un sistema lineal de primer orden desacoplado y resuélvelo.

3. Se considera el sistema desacoplado
$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = x + y \end{cases}$$
Halla la solución general del sistema, y después utiliza esta solución general para resolver el PVI correspondiente a las condiciones iniciales $x(0) = -2$, $y(0) = -1$.

4. Dado el sistema desacoplado:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$
   a) Encuentra la solución general.
   b) Determina la solución que satisface la condición inicial $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   c) Haz un esbozo del campo de vectores.
   d) Esboza la órbita correspondiente a la solución del apartado anterior.
   e) Trazar las gráficas correspondientes a $x(t)$ y $y(t)$.

5. Esbozar el campo de vectores y los correspondientes planos de fases de los siguientes sistemas autónomos:
   a) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x - y \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
   c) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 2 \end{cases}$

6. Resuelve el siguiente sistema desacoplado, en función del parámetro a:
$$\begin{cases} x' = ax - y \\ y' = 2x \end{cases}$$

7. Encuentra la solución general al siguiente sistema desacoplado, no autónomo,
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 4x - y + 2e^{-t} \end{cases}$$
y traza las gráficas $x(t)$, $y(t)$ de la solución correspondiente al dato inicial $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. Determina los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas de EDO's:

   a) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 5x - 7y \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x' = -x - y - 3 \\ y' = 2x + 10y + 4 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x' = x - 3x^2 - 10xy \\ y' = -3y + 2xy \end{cases}$

   d) $\begin{cases} x' = (y-1)(x^2 + y^2 - 4) \\ y' = -x(x^2 + y^2 - 4) \end{cases}$

   e) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x - y \end{cases}$

   ¿Es posible que la gráfica de alguna solución de los sistemas anteriores atraviese algún punto de equilibrio?

Capítulo 11

Sistemas Lineales

11.1. Sistemas Lineales Homogéneos con Coeficientes Constantes

- Un sistema de EDO's decimos que es **lineal homogéneo con coeficientes constantes** si es de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  o en el caso 2×2:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- A la matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$, ó $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en el caso 2×2, se le llama **matriz de coeficientes**.

- Si la matriz de coeficientes tiene determinante distinto de cero, entonces el sistema tiene un único punto de equilibrio: el origen. El comportamiento de las soluciones "cerca" de este punto de equilibrio será clave para entender el sistema y poder hacer un esbozo de las soluciones.

- Como consecuencia del Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones para Sistemas visto en el capítulo anterior, en todo sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes y para tdo punto del espacio hay existencia y unicidad de soluciones.

- Análogamente a lo que ocurre con los sistemas de ecuaciones lineales (de los del instituto) se tiene lo siguiente:

PRINCIPIO DE LINEALIDAD

Si tenemos una solución del sistema $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, cualquier múltiplo de la misma $k(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = (k \cdot x_1(t), \ldots, k \cdot x_n(t))$ es también solución.

Por otro lado, si tenemos dos soluciones $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $(\widetilde{x}_1(t), \ldots, \widetilde{x}_n(t))$ la suma de ambas

$$(x_1(t), \ldots, x_n(t)) + (\widetilde{x}_1(t), \ldots, \widetilde{x}_n(t)) = (x_1(t) + \widetilde{x}_1(t), \ldots, x_n(t) + \widetilde{x}_n(t))$$

también lo es.

11.2. Soluciones en Línea Recta y mediante autovectores generalizados

TEOREMA DE LAS SOLUCIONES EN LÍNEA RECTA

Si la matriz de coeficientes de un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes tiene un autovector $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ cuyo autovalor λ es un número real distinto de cero, entonces existe una semirecta que es solución del sistema, dada por:

$$\gamma_v(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

- Démonos cuenta de que la curva correspondiente a la parametrización $\gamma_v(t)$ es una semirrecta (de ahí el nombre de la sección) que "casi llega" cuando $t \to +\infty$ ó $t \to -\infty$ (dependiendo del signo de λ) al origen de coordenadas (el punto $(0, 0, \ldots, 0)$).
- **Caso Fácil:** Si la matriz de coeficientes de un sistema lineal tiene un determinante distinto de 0 y tiene n autovectores diferentes $v_1, \ldots, v_n$, la solución general del sistema será:

$$A_1 \cdot \gamma_{v_1}(t) + \ldots + A_n \cdot \gamma_{v_n}(t), \qquad A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$$

- Demostrar que esta es, en verdad, la solución general del sistema, requeriría introducir varios conceptos que no vamos a introducir aquí. En primer lugar, requeriría definir, como ya hicimos para las EDO's de orden superior a 1, un concepto de "soluciones linealmente independientes". Y después demostrar que un sistema como este no puede tener más de n.
- La observación anterior, nos da una pista de que ocurrirá en el "caso difícil". Esto requiere algunos conocimientos de Álgebra Lineal. Si en un sistema $n \times n$ sólo tenemos k autovectores diferentes, necesitaremos conseguir de alguna forma $n - k$ soluciones linealmente independientes a las anteriores. Recordemos:

AUTOVECTORES GENERALIZADOS

Dada una matriz $n \times n$ que denotaremos por M. Cuando un autovalor λ tiene multiplicidad m pero sólo tiene $m_g < m$ autovectores asociados, buscamos los **autovectores generalizados** asociados a M. Estos vectores, son soluciones de sistemas del tipo:

$$(M - \lambda I)^i \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $i \geq 2$. De una determinada forma, que no detallaremos aquí (véase [10] o cualquier otro libro de Álgebra Lineal), es posible reunir, entre autovectores y autovectores generalizados, m vectores asociados al autovalor λ.

- Si un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes tiene una matriz de coeficientes que "necesita" autovectores generalizados, no sólo habrá que buscar soluciones del tipo $\gamma_v(t)$.
- En este texto nos vamos a centrar en el caso 2×2, que desarrollaremos en detalle en las siguientes secciones.

11.3. Sistemas Lineales con coeficientes constantes 2×2: solución general

Dado un sistema con coeficientes constantes lineal 2×2 y matriz de coeficientes M:

- Si tiene dos autovectores diferentes $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ cuyos autovalores son λ_1, λ_2 (que no tienen por qué ser diferentes) la solución general es:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = Ae^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + Be^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad A, B \in \mathbb{C}$$

- En el caso anterior, pudiera ser que los autovalores fueran complejos. En tal caso, se sabe que deben ser conjugados $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$. También debe cumplirse que los autovectores $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ "sean conjugados", esto es

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Re(u_1) + iIm(u_1) \\ Re(u_2) + iIm(u_2) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Re(u_1) - iIm(u_1) \\ Re(u_2) - iIm(u_2) \end{bmatrix}$$

Si no queremos dar la solución general expresada con números complejos haremos el mismo truco que en la Sección 6.4. Disponemos de las siguientes dos soluciones complejas:

$$\begin{aligned} e^{(a+bi)t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= e^{at}(\cos(bt) + i\,\mathrm{sen}(bt)) \left(\begin{bmatrix} Re(u_1) \\ Re(u_2) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} Im(u_1) \\ Im(u_2) \end{bmatrix} \right) \\ &= e^{at} \left(\cos(bt) \begin{bmatrix} Re(u_1) \\ Re(u_2) \end{bmatrix} - \mathrm{sen}(bt) \begin{bmatrix} Im(u_1) \\ Im(u_2) \end{bmatrix} + i \left(\mathrm{sen}(bt) \begin{bmatrix} Re(u_1) \\ Re(u_2) \end{bmatrix} + \cos(bt) \begin{bmatrix} Im(u_1) \\ Im(u_2) \end{bmatrix} \right) \right) \\ e^{(a-bi)t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= e^{at}(\cos(bt) + i\,\mathrm{sen}(bt)) \left(\begin{bmatrix} Re(u_1) \\ Re(u_2) \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} Im(u_1) \\ Im(u_2) \end{bmatrix} \right) \\ &= e^{at} \left(\cos(bt) \begin{bmatrix} Re(u_1) \\ Re(u_2) \end{bmatrix} - \mathrm{sen}(bt) \begin{bmatrix} Im(u_1) \\ Im(u_2) \end{bmatrix} - i \left(\mathrm{sen}(bt) \begin{bmatrix} Re(u_1) \\ Re(u_2) \end{bmatrix} + \cos(bt) \begin{bmatrix} Im(u_1) \\ Im(u_2) \end{bmatrix} \right) \right) \end{aligned}$$

Como cualquier combinación lineal de soluciones es solución, si sumamos las dos anteriores y dividimos entre 2, obtenemos:

$$Y_1(t) = e^{at} \left(\cos(bt) \begin{bmatrix} Re(u_1) \\ Re(u_2) \end{bmatrix} - \mathrm{sen}(bt) \begin{bmatrix} Im(u_1) \\ Im(u_2) \end{bmatrix} \right),$$

y si las restamos y dividimos por $2i$ obtenemos la parte imaginaria

$$Y_2(t) = e^{at} \left(\mathrm{sen}(bt) \begin{bmatrix} Re(u_1) \\ Re(u_2) \end{bmatrix} + \cos(bt) \begin{bmatrix} Im(u_1) \\ Im(u_2) \end{bmatrix} \right).$$

Estas soluciones siguen siendo linealmente independientes pero ya son reales y también nos sirven para dar una expresión de la solución general ya que

$$\left\{ Ae^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + Be^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} : \quad A, B \in \mathbb{C} \right\} = \{ C \cdot Y_1(t) + D \cdot Y_2(t) : \quad C, D \in \mathbb{C} \}$$

- Si tiene sólo un autovector $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ asociado a un autovalor λ, entonces la solución general es:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = Ae^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + Be^{\lambda_2 t} \left(t \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

donde $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ es un autovector generalizado que cumple

$$(M - \lambda Id)^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } (M - \lambda Id) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

11.4. Sistemas Lineales con coeficientes constantes 2×2: estudio cualitativo

AVISO: los campos de vectores de esta sección, no se han dibujado teniendo en cuenta la longitud de los vectores, para que los diagramas sean más claros.

- Si se nos pide esbozar un campo de vectores, de pendientes o de fases asociado a un determinado sistema lineal 2×2 con coeficientes constantes, podemos hacer una tabla de valores, como hacemos siempre. Esta información cualitativa del resultado nos será de mucho interés.

- A continuación, listaremos y clasificaremos todos los posibles campos de vectores a sistemas 2×2. Démonos cuenta de que incluso este caso tiene una casuística bastante compleja.

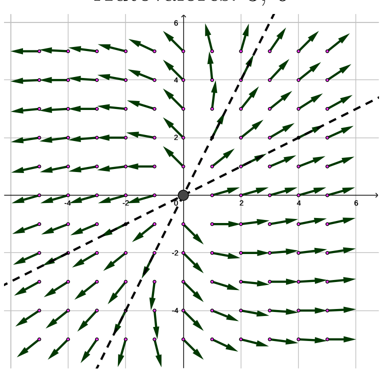
AUTOVALORES REALES DISTINTOS ENTRE SÍ Y DISTINTOS DE 0

En este caso hay dos semi-rectas que son solución. Si los dos autovalores son negativos, tenemos que el origen es un **sumidero**. Si los dos son positivos, tenemos una **fuente**. Si uno es positivo y el otro positivo, un **punto de silla**.

A continuación puede verse un ejemplo de cada uno de los posibles campos de vectores con autovalores reales, distintos entre sí y distintos a 0. Se ha marcado en trazo discontinuo las soluciones en línea recta.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

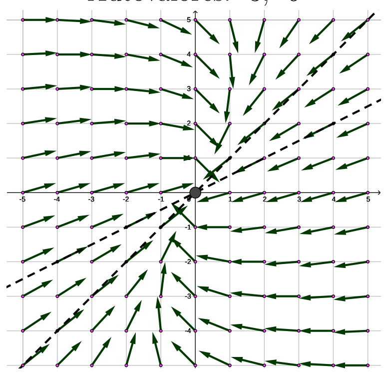
Autovalores: 3, 6



Fuente

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

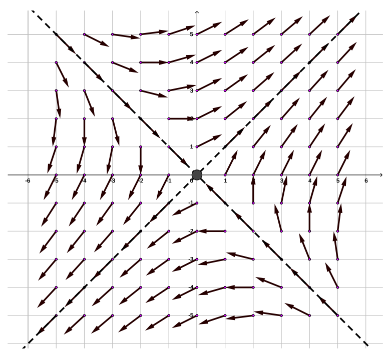
Autovalores: -3, -6



Sumidero

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Autovalores: $-1, 3$



Punto de Silla

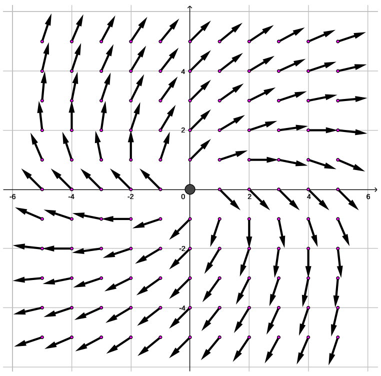
Puede verse en las dos primeras imágenes que el campo de vectores se acerca o se aleja más rápidamente a una de las rectas solución que a la otra. Esto depende del valor absoluto de los autovalores asociados al autovector correspondiente a cada una de las soluciones.

AUTOVALORES COMPLEJOS

En este caso, no hay ninguna semi-recta que sea solución. Si la parte real de ambos autovalores es negativa, tenemos que el origen es un **sumidero en espiral**. Si la de ambos es positiva, tenemos una **fuente en espiral**. Si la parte real es igual a 0, tenemos un **centro**. Aún quedará por decidir el sentido de giro.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

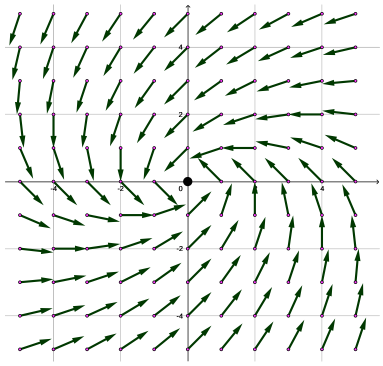
Autovalores: $3 \pm i\sqrt{7}$



Fuente Espiral

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

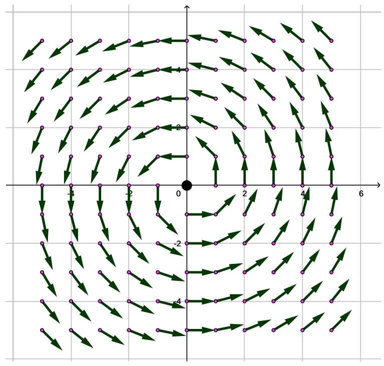
Autovalores: $-3 \pm i\sqrt{7}$



Sumidero Espiral

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Autovalores: $\pm i$



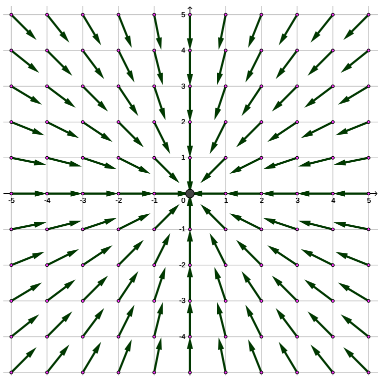
Centro

AUTOVALOR REAL REPETIDO DISTINTO DE 0

Si hay autovalores reales repetidos y hay dos autovectores, la matriz de coeficientes debe ser diagonal. En este caso todas las rectas que pasan por el origen son rectas solución. Si hay dos autovalores pero sólo un autovector, entonces sólo hay una solución en línea recta.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

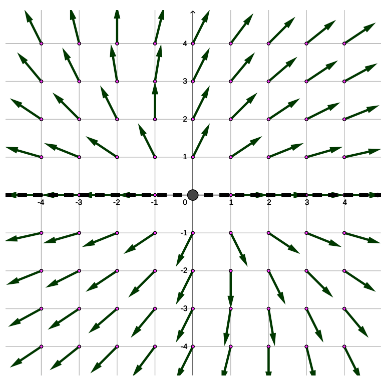
Autovalor doble: -2



Soluciones Radiales

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Autovalor doble: -2



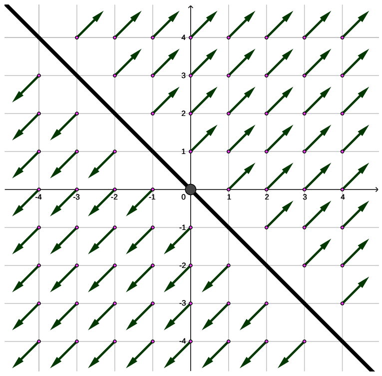
Una sola solución en línea

AL MENOS UN AUTOVALOR IGUAL A 0

Si al menos uno de los autovalores es igual a 0, hay una recta entera de puntos de equilibrio, apuntando en la dirección del autovector asociado al autovalor 0. En el caso de que el autovalor 0 sea doble (esto no implica, en general, que la matriz sea nula pero sí que su traza y su determinante sean 0), estamos ante el caso más raro de todos. El comportamiento de las soluciones puede verse más abajo.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

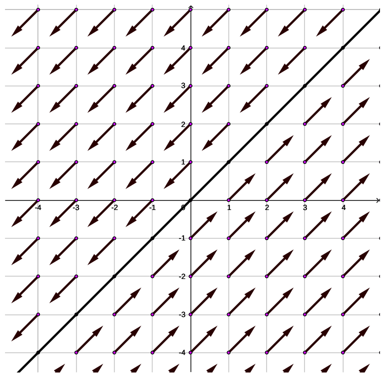
Autovalores: $0, 2$



Recta de Puntos Fijos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Autovalor doble: 0



Recta de Puntos Fijos

Como en los casos anteriores, el signo del autovalor correspondiente, tiene importancia para el sentido de las flechas (hacia la recta, o “huyendo de ella”).

Hoja 11: Sistemas Lineales

1. Demuestra el Principio de Linealidad que aparece en la primera sección de este capítulo.
2. Demuestra el Teorema de las Soluciones en Línea Recta.
3. Calcula los autovalores y los autovectores asociados de las siguientes matrices:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

4. Encuentra una matriz 2×2 de modo que sus autovalores sean 1 y 3 y sus autovectores asociados sean $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ respectivamente.
5. Encuentra la solución general de todos los sistemas que aparecen en la sección 11.4.
6. Resuelve el siguiente sistema lineal:
$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$$
7. Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son parámetros, llamamos traza de la matriz M a la suma de los elementos de la diagonal principal, esto es, $Tr(M) = a + d$. Consideremos el sistema
$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

   a) Determinar el valor de los autovalores en función meramente de la traza y el determinante de M.

   b) ¿Qué condiciones deben satisfacer la traza y el determinante para que el punto de equilibrio del sistema (el origen) sea un sumidero en espiral?

   c) ¿Qué condiciones deben satisfacer la traza y el determinante para que el punto de equilibrio del sistema (el origen) sea un sumidero un punto de silla?

   d) ¿Cuál es el valor de los autovalores si el determinante vale 0? Para este caso, determina los posibles casos de plano de fases del sistema en función del valor de la traza?

   e) Construye un sistema cuyo punto de equilibrio sea un centro.

8. Invéntate un sistema 2×2 lineal de coeficientes constantes, diferente a los que aparecen en la sección 11.4, que tenga un sumidero en el origen.
9. Sea $Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$. Resuelve el sistema $\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} Y$ sujeto a la condición inicial $Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dibuja su campo de vectores. Por último esboza las gráficas de las funciones $x(t), y(t)$.

10. Esboza el plano de fases de los siguientes sistemas indicando de qué tipo es el punto de equilibrio.

a) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

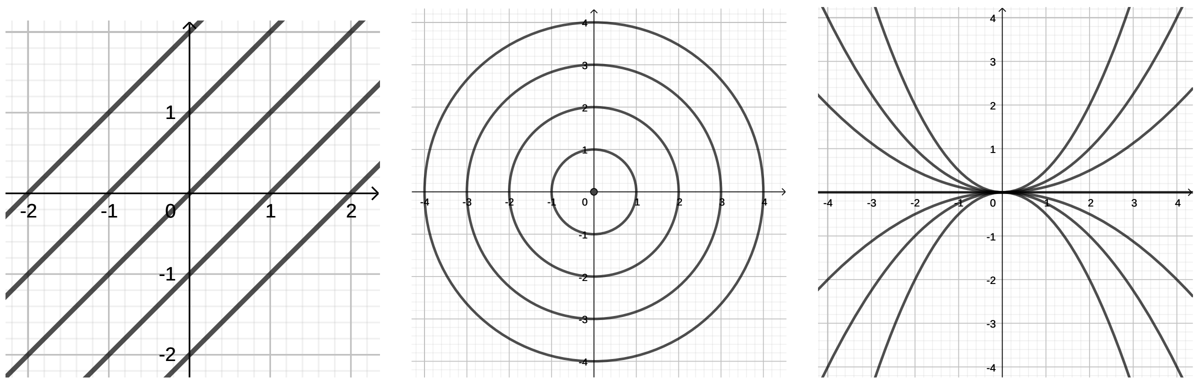
b) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

11. Construye varios sistemas de EDO's cuyo diagrama de fases pudiera corresponder con los que se muestran a continuación:



12. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial.

a) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 16 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Capítulo 12

Sistemas no Lineales

12.1. Introducción

- Poco podemos hacer con los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. En este capítulo nos centraremos en los sistemas autónomos de 2 y 3 incógnitas del tipo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} = h(x,y,z) \end{cases}$$

  Recordemos que “autónomo” quiere decir que las funciones f, g, h no dependen explícitamente de t.

- Sin resolver estos sistemas analíticamente, lo que sí podemos hacer es un estudio cualitativo. Emplearemos las siguientes técnicas:

  1. Esbozo del campo de vectores o de pendientes. Para los sistemas autónomos que veremos esto será fácil de hacer.
  2. Localización y clasificación de los puntos de equilibrio del sistema. Aproximaremos el sistema, cerca de cada uno, por un sistema lineal como los del capítulo anterior (Teorema de Linearización) para poder entender el comportamiento de la soluciones en un entorno de los mismos.
  3. Métodos numéricos. Existe un Método de Euler, análogo al que utilizamos en el Capítulo 4 para EDO’s de una sola variable (este método puede ser utilizado, incluso, en sistemas no autónomos).

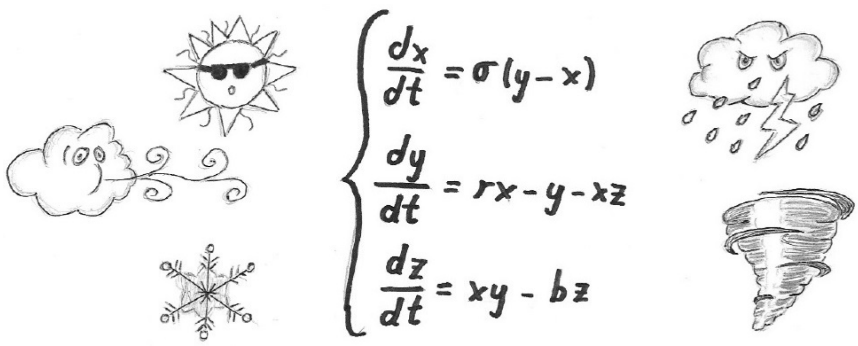


Figura 12.1: En 1963, Lorentz publicó estas ecuaciones como un modelo muy simplificado de la convección de un fluido, con intención de aplicarlo en Meteorología. Los sistemas no lineales de tres o más EDO’s en ocasiones presentan una **dinámica caótica** y este, en concreto, es un ejemplo bastante conocido. Es una lástima pero no hablaremos en este libro de la relación entre EDO’s y **Teoría del Caos**. Aquel que esté interesado puede consultar [12], por ejemplo.

12.2. Análisis cualitativo de sistemas autónomos

- Consideremos un sistema autónomo del tipo $Y' = F(Y)$. Casi todo lo que vamos a contar en esta sección es válido para cualquier número de incógnitas, aunque vamos a centrarnos en el caso de dos ecuaciones y dos incógnitas:
$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{12.1}$$
que nos permite hacer gráficas y relacionar la situación con el caso lineal del mismo tamaño.
- Los **puntos de equilibrio** son aquellos que cumplen $f(x,y) = g(x,y) = 0$. A diferencia de lo que sucedía con los sistemas lineales, es posible que los puntos de equilibrio no se encuentren aislados si no formando curvas. El caso de más incógnitas es, en ese sentido, bastante más complicado (podemos encontrar que el conjunto de puntos de equilibrio forma, no sólo curvas, si no superficies, etc.).
- De acuerdo al Teorema 10.1.1, si f y g son continuamente diferenciables, las "curvas-solución" no pueden cortarse entre sí. Tampoco pueden alcanzar nunca los puntos de equilibrio.
- Para intentar entender qué sucede alrededor de un punto de equilibrio (x_0, y_0), podemos aproximar el sistema por uno lineal cerca de dicho punto utilizando la **matriz jacobiana**:

TEOREMA DE LINEARIZACIÓN:

Si (x_0, y_0) es un punto de equilibrio del sistema (12.1) podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Localmente ("cerca" de cada uno de los puntos de equilibrio) el sistema original y el sistema linealizado exhiben el mismo comportamiento. Hay dos excepciones: cuando el sistema linearizado tiene un centro y cuando tiene cero como autovalor, que requieren un análisis más detenido. Si partimos de una condición inicial (x_0, y_0) alejada de los puntos de equilibrio el teorema no nos da ninguna información sobre el comportamiento de las soluciones, que es bastante difícil de analizar en general.

Ejercicio Resuelto 12.2.1 ***(a) Determina los puntos de equilibrio de*** $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x^2 - y \end{cases}$ ***(b) Halla el sistema linearizado de cada uno de ellos. (c) Haz un esbozo del campo de vectores.***

(a) Vemos que hay dos puntos de equilibrio
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x^2 - y = 0 \end{cases} \longrightarrow (0,0),\ (2,-4).$$
(b) Sean $f(x,y) = 2x + y$, $g(x,y) = -x^2 - y$, *los correspondientes sistemas linearizados son:*

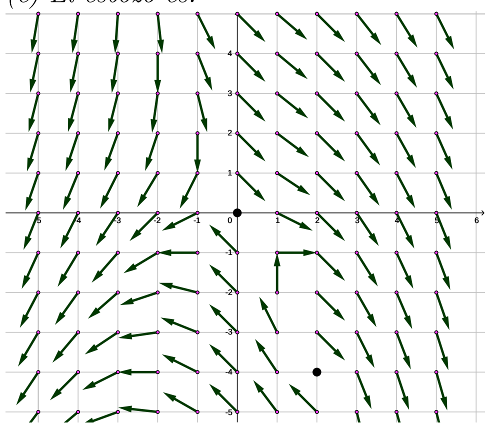
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \textit{punto de silla}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2,-4) & \frac{\partial f}{\partial y}(2,-4) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(2,-4) & \frac{\partial g}{\partial y}(2,-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \textit{fuente espiral}$$

(c) El esbozo es:



12.3. Método de Euler para sistemas

- Todo lo que vamos a hacer en esta sección, puede hacerse para sistemas de cualquier dimensión, aunque nos centratemos en explicar todo para sistemas de dimensión 2.
- La idea es la misma que para el Método de Euler para EDO's: aproximar cada una de las "funciones-incógnita" por su recta tangente.
- La **solución numérica aproximada** de un PVI asociado a un sistema será de nuevo una tabla, sólo que ahora tiene más columnas:

t	$\widetilde{x}$	$\widetilde{y}$
t_0	$\widetilde{x}_0$	$\widetilde{y}_0$
t_1	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{y}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_n	$\widetilde{x}_n$	$\widetilde{y}_n$

MÉTODO DE EULER PARA SISTEMAS:

Dados un sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

y una condición inicial $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. En primer lugar elegimos un **paso** h. Por último: definimos

$$\widetilde{x}_1 = x_0 + f(x_0, y_0) \cdot h$$

$$\widetilde{y}_1 = y_0 + g(x_0, y_0) \cdot h$$

y así sucesivamente:

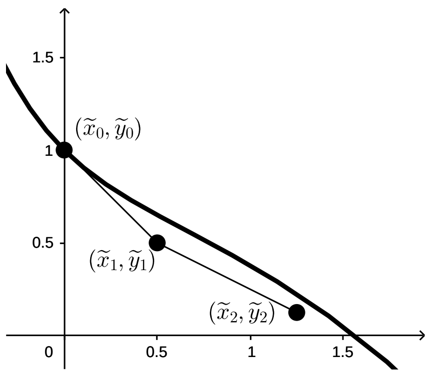
$$\widetilde{x}_{n+1} = \widetilde{x}_n + f(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) \cdot h$$

$$\widetilde{y}_{n+1} = \widetilde{y}_n + g(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) \cdot h$$

Ejercicio Resuelto 12.3.1 ***Aplica el Método de Euler con paso*** $h = 0{,}5$ ***en el intervalo*** $[0, 1]$ ***al PVI correspondiente al sistema del ejercicio anterior y a la condición inicial*** $x(0) = 0$***,*** $y(0) = 1$***.***

t	$\widetilde{x}$	$\widetilde{y}$
0	0	1
0,5	$x_1 = \widetilde{x}_0 + f(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \cdot h$ $= 0 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$	$\widetilde{y}_1 = \widetilde{y}_0 + g(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \cdot h$ $= 1 - 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$
1	$x_2 = \widetilde{x}_1 + f(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1) \cdot h$ $= 0{,}5 + 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 1{,}25$	$\widetilde{y}_2 = \widetilde{y}_1 + g(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1) \cdot h$ $= 0{,}5 - 0{,}75 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$

A continuación puede verse la solución del PVI, frente a la solución aproximada que acabamos de calcular:



12.4. Aplicaciones: modelos en los que dos poblaciones interactúan entre sí

- Ya hablamos en el Capítulo 2 sobre modelización usando sistemas de EDO's. En esta sección, nos centraremos en modelos que describen a dos especies que conviven e interactúan en un mismo ecosistema. Mostraremos cómo realizar el análisis de la evolución de estas especies en dos ejemplos ahora que disponemos de las herramientas necesarias.

- En abmos casos Se tratará de sistemas de ecuaciones diferenciales de orden 1 con dos incógnitas y no lineales. Para entender estos sistemas, usaremos un par de las técnicas vistas en este capítulo: determinar el comportamiento de las soluciones alrededor de los puntos de equilibrio usando el Teorema de Linearización y esbozar el campo de vectores del sistema. Con esta información podremos aventurar cómo se comportan las gráficas de las soluciones y comprender que ocurre con nuestras soluciones.

- **Interacción depredador-presa.** Llamemos $x(t)$ e $y(t)$ al número de individuos de dos especies que conviven en el mismo medio, en cada instante t. La población corespondiente a $x(t)$ corresponde a las **presas** y la otra unos **depredadores**. Un posible sistema de EDO's que modela esta situación es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-\frac{x}{3}) - xy \\ \frac{dy}{dt} = -y + 2xy \end{cases} \tag{12.2}$$

El número de presas $x(t)$ en ausencia de depredadores ($y = 0$) sigue el modelo logístico de Verhulst (véase el Ejercicio Resuelto 2.3.2). Esto es, $x' = x(1-\frac{x}{3})$, su crecimiento es directamente proporcional al número de individuos, pero también a los recursos disponibles. Obsérvese que si la población x sube de 3, entonces $x' < 0$ y la pobalción decrecerá. A la constante 3 se la llama **capacidad máxima del sistema para la presa** x. Por otro lado, los depredadores en ausencia de presas ($x = 0$) no disponen de alimento y su población se irá reduciendo: $y' = -y \leq 0$. Finalmente cuando hay individuos de ambas especies, las interacciones entre ellos, representadas por el término xy, son beneficiosas para los depredadores ($+2xy$), y perjudiciales para las presas ($-xy$).

Ejercicio Resuelto 12.4.1 ***Estudia el sistema*** (12.2)**.**

- *Igualando* $x' = y' = 0$ *obtenemos tres puntos de equilibrio:* $P_1 = (0,0), P_2 = (3,0), P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$. *Denotando por* $f(x,y) = x(1-\frac{x}{3}) - xy$, $g(x,y) = -y + 2xy$ *tenemos*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{2}{3}x - y & -x \\ 2y & -1+2x \end{bmatrix}$$

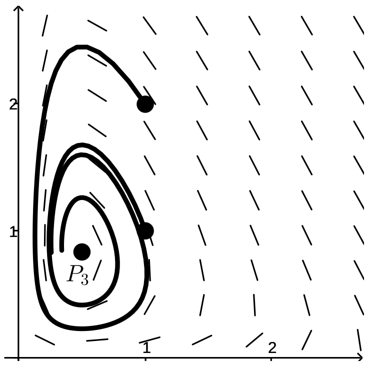
- *Para cada punto de equilibrio, los correspondientes sistemas linearizados serían:*

$$P_1 = (0,0): \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \textit{Punto de silla}$$

$$P_2 = (3,0): \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(3,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(3,0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(3,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(3,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \textit{Punto de silla}$$

$$P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{6}): \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2},\frac{5}{6}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{2},\frac{5}{6}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\frac{1}{2},\frac{5}{6}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\frac{1}{2},\frac{5}{6}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 & -1/2 \\ 10/6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \textit{Sum. espiral}$$

- *Esbozamos finalmente tanto el campo de pendientes como el diagrama de fases, en los que solo nos interesarán los valores positivos* $(x, y \geq 0)$.



- *En vista de que el punto de equilibrio P_3 es un sumidero en espiral y del esbozo del campo de vectores, parece que las soluciones siempre tienden hacia P_3 (si comenzamos con una cantidad positiva de individuos de cada población). Las poblaciones parecen variar siguiendo "ciclos": cuando hay muchos depredadores y pocas presas (dentro de unos límites que dependen de los parámetros), esta situación se invierte progresivamente hasta encontrarnos con muchas presas y pocos depredadores y así sucesivamente. En particular, si partimos de poblaciones positivas, en ningún caso ninguna de ellas se extingue.*

- **Interacción de competencia:** de nuevo $x(t)$ e $y(t)$ denotan el número de individuos de dos especies diferentes que conviven en el mismo medio en cada instante t. Pero en este caso ninguna especie es depredador de la otra, si no que ambas compiten por los mismos alimentos de la zona dificultándose mutuamente la supervivencia. Un posible modelo para esta situación sería

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x(1-\frac{x}{2}) - xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y(1-\frac{y}{3}) - 2xy \end{cases} \tag{12.3}$$

En este tipo de modelo, a diferencia del anterior, los términos xy "siempre llevan constantes negativas" representando que la interacción de ambas especies dificulta su crecimiento. Es posible que para una de las especies sea más perjudicial la presencia de la otra que a la inversa. En este caso la población x "tolera" más a la población y (constante -1), la cual sí se ve afectada en mayor medida por la presencia de la otra (constante -2). Una diferencia importante con el modelo anterior, es que en ausencia de la otra especie, ambas son capaces de sobrevivir y su crecimiento sigue el modelo de Verlhust.

Ejercicio Resuelto 12.4.2 ***Estudia el sistema*** (12.3)

- *Procederemos como en el ejemplo anterior. Primero localizaremos los puntos de equilibrio y los clasificaremos según los correspondientes sistemas linearizados. Igualando $x' = y' = 0$ obtenemos cuatro puntos de equilibrio: $P_1 = (0,0), P_2 = (2,0), P_3 = (0,3), P_4 = (1,1)$. Denotando por $f(x,y) = 2x(1-\frac{x}{2}) - xy$, $g(x,y) = 3y(1-\frac{y}{3}) - 2xy$ tenemos*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2x-y & -x \\ -2y & 3-2y-2x \end{bmatrix}$$

Los correspondientes sistemas linearizados y el tipo de punto de equilibrio de los mismos serían:

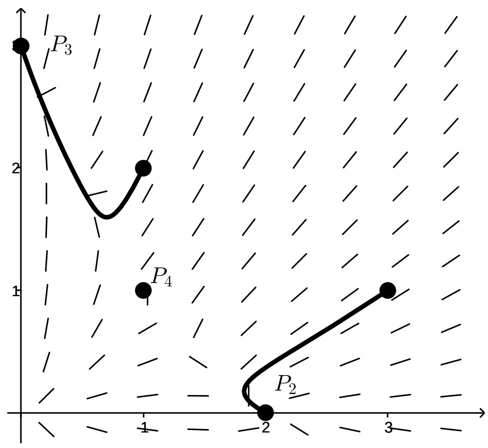
$$P_1=(0,0): \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \textit{Fuente}$$

$$P_2=(2,0): \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(2,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(2,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \textit{Sumidero}$$

$$P_3=(0,3): \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,3) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,3) & \frac{\partial g}{\partial y}(0,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \textit{Sumidero}$$

$$P_4=(1,1): \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \textit{Punto de silla}$$

- *Ahora esbozaremos el campo de pendientes, junto con un par de curvas correspondientes a dos diferentes condiciones iniciales:*



- *Tenemos tres puntos de equilibrio a los que aproximarnos a largo plazo (si partimos de un número positivo y no nulo de individos de ambas poblaciones). En uno de ellos se extingue la primera población (P_3), y en otro de ellos la segunda (P_4). Hay una tercera opción, correspondiente al punto de equilibrio P_4, que representa una situación en la que ambas poblaciones conviven manteniendo estable su número. Aunque apreciamos en el diagrama que esta situación se da para valores muy específicos de las poblaciones iniciales. Para difícil averiguar cual será el comportamiento a largo plazo si comenzamos con valores muy elevados (respecto a los parámetros 2 y 3) de las poblaciones iniciales.*

Hoja 12: Sistemas no Lineales.

1. Dado el sistema $\begin{cases} x' = 4x - 7y \\ y' = 3x + 6y - 1 \end{cases}$ encuentra los puntos de equilibrio, clasifícalos usando el Teorema de Linearización, haz un esbozo del campo de vectores y el plano de fases.

2. Dado el sistema $\begin{cases} x' = y(x^2 + y^2 - 1) \\ y' = -x(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$ encuentra los puntos de equilibrio y haz un esbozo del campo de vectores y el plano de fases.

3. Determinar cuáles de los siguientes sistemas tienen diagramas de fases con un comportamiento similar "cerca" del punto de equilibrio $(0, 0)$.

$$(a) \begin{cases} x' = 3\,\mathrm{sen}(x) + y \\ y' = 4x + \cos(y) - 1 \end{cases} \quad ; \quad (b) \begin{cases} x' = -3\,\mathrm{sen}(x) + y \\ y' = 4x + \cos(y) - 1 \end{cases} \quad : \quad (c) \begin{cases} x' = -3\,\mathrm{sen}(x) + y \\ y' = 4x + 3\cos(y) - 3 \end{cases}$$

4. Sea el siguiente sistema autónomo no lineal $\begin{cases} x' = y - (x^2 + y^2)x \\ y' = -x - (x^2 + y^2)y \end{cases}$

   a) Encuentra todos sus puntos de equilibrio y clasifícalos utilizando los sistemas linearizados correspondientes.
   b) Demuestra que en torno al origen no existen soluciones periódicas.
   c) ¿Se contradice pues en este ejemplo el Teorema de linearización?

5. Utiliza el método de Euler para dar una solución aproximada del primero del sistema del Ejercicio 1, junto con la condición inicial $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, en el intervalo $[0, 1]$ con paso $h = 0{,}25$.

6. Utiliza el método de Euler para dar una solución aproximada del primero del sistema del Ejercicio 2, junto con la condición inicial $x(0) = 0{,}1$, $y(0{,}1) = 0$, en el intervalo $[0, 1]$ con paso $h = 0{,}25$. Luego haz lo mismo para la condición inicial $x(0) = 0{,}9$, $y(0{,}1) = 0$, en el intervalo $[0, 1]$ con paso $h = 0{,}25$. Interpreta tus resultados en relación al campo de vectores que realizaste en el Ejercicio 2.

7. Decir todo lo que se pueda sobre el siguiente sistema en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x' = x^2 - a \\ y' = -y(x^2 - 1) \end{cases}$$

8. Queremos estudiar el comportamiento de la población de hormigas x y gusanos y en el jardín del Palacio de la Moncloa. Sabemos que ambas poblaciones satisfacen el siguiente sistema de EDO's:

$$\begin{cases} x' = 2x(1 - \frac{x}{2}) - \frac{6}{5}xy \\ y' = -y + \frac{9}{10}xy \end{cases}$$

   a) De acuerdo a este modelo, ¿cómo interactúan estas especies?
   b) Clasificar todos los puntos de equilibrio del sistema y esbozar un posible plano de fases.
   c) Si la población inicial de hormigas y gusanos es de $(x_0, y_0) = (1000, 2)$, ¿qué ocurrirá a largo plazo?

Bibliografía

[1] P. Blanchard, R. L. Devaney y G. R. Hall, *"Ecuaciones Diferenciales"*, Thomson Editores (1999).

[2] D. P. Boyce, *"Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera"*, Pearson Educación (2009).

[3] M. Braun y M. Golubitsky, *Differential equations and their applications*, New York: Springer-Verlag (1983).

[4] L. Logan, *"A First Course in Differential Equations"*, Springer (2017).

[5] M. Moreno Juez, *"Ecuaciones Diferenciales"* Ediciones Aldecoa S.A, (1969).

[6] G. F. Simmons y S. G. Krantz, *Differential Equations. Theory, Technique and Practice*. McGraw Hill (2007).

---

[7] J. Aroca, L. F. Prieto-Martínez, R. Sánchez-Cauce, *Sucesiones, poblaciones, TIC y Teoría del Caos*, La Gaceta de la RSME 23.1 (2020).

[8] Gaussianos, *Funciones sin primitiva elemental*, `https://www.gaussianos.com/funciones-sin-primitiva-elemental/`.

[9] T. Goetz, P. Heidrich, *COVID-19 Disease Dynamics in Germany: First Models and Parameter Identification*, medRxiv 2020.04.23.20076992 (2020).

[10] E. Hernández, M. j. Vázquez y M. A. Zurro, *Álgebra lineal y Geometría*, Pearson Educación SA (2012).

[11] C. Ivorra, *Funciones sin primitiva elemental*, `https://www.uv.es/~ivorra/Libros/Primitivas.pdf`.

[12] S. Lynch, *Three-Dimensional Autonomous Systems and Chaos* in: *Dynamical Systems with Applications using MATLAB*, Birkhäuser (2014).

[13] F. White, *Mecánica de Fluidos*, Mc Graw Hill (1995).

---

[14] I. Asimov, *Preludio a la Fundación*, Editorial Debolsillo (2004).

[15] N. Maquiavelo, *El Príncipe*, Plutón Ediciones, (2012).

Sobre los autores

Miguel García Bravo: Investigador Posdoctoral en la Universidad de Jyväskylä. Doctor en Matemáticas por la UAM. Ha sido profesor de problemas de la asignatura Matemáticas II en Ingeniería Química en la misma universidad.

José María Prieto Martínez: Estudiante de Ingeniería Electrónica, Industrial y Automática en la Universidad Politécnica de Madrid. Responsable de la redacción de las secciones de aplicaciones a circuitos de este texto.

Luis Felipe Prieto Martínez: Profesor Asociado en la UAM. Profesor de Instituto en el IES Anselmo Lorenzo. Doctor en Matemáticas por la UAM. Ha sido profesor de la asignatura Matemáticas II en Ingeniería Química en la misma universidad.

Las ilustraciones han sido realizadas por el tercero de los autores y por Felipe Prieto García de Olalla.