Proyecto Fin de Master en Investigación Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid

Fibrado Normal de la Grassmanniana G(k,n)

Marta Abril Bucero
Director: Enrique Arrondo Esteban
Curso académico 2010-2011

24 de septiembre de 2011

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

Key words: grassmannian, Plücker embedding , universal bundles, Eagon-Northcott complex, Euler sequence, universal sequence, Snake lemma, normal bundle.
Palabras claves: grassmannianas, inmersión de Plücker, fibrados universales, complejos de Eagon-Northcott, sucesión de Euler, sucesión universal, lema de la serpiente, fibrado normal.
2000 Mathematics Subject Clasification: 14M15

Resumen

El objetivo de mi investigación es dar una resolución para el fibrado conormal de la grassmanniana general $\mathbb{G}(k,n)$. Primero recordaremos algunos conceptos sobre grassmannianas, como la inmersión de Plücker, las coordenadas de Plücker, fibrados vectoriales, fibrados universales,...Las herramientas principales que usamos son varias sucesiones exactas, entre ellas la sucesion exacta universal, el complejo de Eagon-Northcott y la sucesión de Euler de manera que construyamos un diagrama conmutativo. Finalmente el lema de la serpiente aplicado a este diagrama conmutativo produce la resolución buscada.

Abstract

The aim of my research is to give a resolution for the conormal bundle of the general Grassmannian $\mathbb{G}(k,n)$. We first recall some concepts about Grassmannians, like Plücker embedding, Plücker coordenates, vector bundles, universal bundles,....The main tools we use are several exact sequences, among them the universal exact sequence, the Eagon-Northcott complex and the Euler sequence in order to build a conmutative diagram. Finally the snake lemma applied to the conmutative diagram produces the resolution sought.

Índice

1. Introducción

Una de las herramientas mas importantes para entender la geometría de las inmersiones de una subvariedad dentro de un espacio mayor es estudiar el fibrado normal de una inmersión. Por ejemplo, las deformaciones de la inmersión corresponden con secciones del fibrado normal. El caso en el que el espacio ambiente es el espacio proyectivo ha sido estudiado exhaustivamente a lo largo del tiempo. Como un ejemplo del interés del fibrado normal de variedades proyectivas, la conjetura de Hartshorne está relacionada con que el fibrado normal escinda y la amplitud del fibrado normal nos facilita una simple demostración del teorema de Barth-Larsen usando el teorema de anulación de Le Potier para fibrados vectoriales amplios [4].

Sin embargo, cuando la variedad ambiente no es un espacio proyectivo, pocas cosas se conocen. Por ejemplo, Ballico estudió la amplitud del fibrado normal de curvas en cuádricas, mientras Papantonopoulou y Goldstein restringían su atención a la cuádrica 4-dimensional identificada con la variedad Grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^3$, habiendo estudiado no sólo curvas, sino también superficies. El caso general del fibrado normal de (n-1)-variedades en la grassmanniana de rectas de $\mathbb{P}^n$ ha sido estudiado por Arrondo, Bertolini y Turrini en [2].

El objetivo de este trabajo es poder dar una resolución para el fibrado conormal en el caso de $\mathbb{G}(k,n)$. Para ello en el capítulo 2 recordaremos las definiciones y propiedades de cualquier grassmanniana de subespacios de dimensión k en $\mathbb{P}^n$ (el caso k=1 se encuentra en [5]).A continuación en el capítulo 3 recordaremos la construcción de la sucesión de Eagon-Northcott, ya que es una de las sucesiones que vamos a utilizar para construir nuestro diagrama. Y probaremos que es exacta partiendo de una sucesión exacta de espacios vectoriales, primero lo en términos de aplicaciones multilineales (subsección 3.1.1) y despues lo probaremos en términos de producto tensorial para ello veremos el isomorfismo que existe ente ambas sucesiones y veremos que cada uno de estos diagramas conmuta (subsección 3.1.2). En el capítulo 4 daremos unos conceptos y proposiciones sobre fibrados vectoriales y fibrados universales. Y finalmente en el capítulo 5 hallaremos la resolución del fibrado conormal.

2. Preliminares sobre grassmanianas

En esta sección recordaremos los resultados principales sobre grassmannianas. Los detalles pueden encontrarse por ejemplo en [1].

2.1. Las grassmannianas como variedades

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n+1$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de característica 0 (podemos suponer que tratamos con el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$). Consideramos también $\mathbb{P}(V)=\mathbb{P}^n$ el espacio proyectivo de todos los hiperplanos de V. Otra forma de ver $\mathbb{P}(V)$ es como el conjunto de rectas en V^*.

Definición 2.1. *Definimos las grassmannianas $\mathbb{G}(k,n)$ como el conjunto de subespacios lineales $k-$dimensionales de $\mathbb{P}^n$. También podemos identificarlo naturalmente con el conjunto de subespacios lineales $(k+1)-$dimensional de V^* (o con el conjunto de cocientes $(n-k)-$dimensionales de V).*

Durante esta sección abusaremos un poco de la notación ya que identificaremos un $k-$plano de $\mathbb{P}^n$ con el correspondiente subespacio lineal $(k+1)-$ dimensional de V^*.

Algunos casos particulares son los siguientes:

- $\mathbb{G}(0,n) = \mathbb{P}^n$
- $\mathbb{G}(n-1,n) = \mathbb{P}^{n^*}$

Ahora daremos estructura de variedad a $\mathbb{G}(k,n)$. La idea es recubrirlo por cartas afines y analizaremos cómo funcionan en la intersección de dichos conjuntos afines.

Empezamos fijando un sistema de coordenadas $(x_0 : \ldots : x_n)$ de $\mathbb{P}^n$ o equivalentemente, fijaremos una base $\{w_0, \ldots, w_n\}$ de V^*. Representaremos un elemento Λ de $\mathbb{G}(k,n)$ por una matriz (a_{ij}) que llamaremos matriz de Plücker

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k0} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

donde las filas son las coordenadas de una base de Λ.

Si cambiamos la base de Λ, la matriz Plücker cambia multiplicando a la izquierda por una matriz cuadrada (no degenerada) de dimensión $k+1$ que corresponde al cambio de base en Λ.

Si asumimos que el menor correspondiente a las primeras $k+1$ columnas no es cero, podemos multiplicar por una matriz determinada y así representar Λ de forma única por la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{0k+1} & \ldots & b_{0n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{1k+1} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{kk+1} & \ldots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

Así sabemos que $\mathbb{G}(k,n)$ contiene un subconjunto abierto afín de dimensión $(k+1)(n-k)$ de coordenadas $b_{0k+1}, \ldots, b_{kn}$. Este subconjunto puede ser descrito como el conjunto de $k-$planos que no cortan al $(n-k-1)-$plano de ecuaciones $x_0 = \ldots = x_k = 0$.

Como al menos uno de los menores de orden $k+1$ de la matriz Plücker no es cero, $\mathbb{G}(k,n)$ puede ser recubierto por $\binom{n+1}{k+1}$ piezas afines.

Notación 2.2. *Denotamos por $U_{i_0,\ldots,i_k}$ al subconjunto abierto afín de $\mathbb{G}(k,n)$ correspondiente al subespacio que no corta al $(n-k-1)-$plano de ecuaciones $x_{i_0} = \ldots = x_{i_k} = 0$. O equivalentemente, subespacio tal que el menor maximal de la matriz de Plücker considerando las columnas $i_0, \ldots, i_k$ no es cero.*

Se ve facilmente que el cambio de coordenadas de una pieza a otra viene dado por cocientes de polinomios en las coordenadas, lo que demuestra que $\mathbb{G}(k,n)$ es una variedad abstracta de dimensión $(k+1)(n-k)$.

2.2. Inmersión de Plücker

Para ver $\mathbb{G}(k,n)$ como una variedad proyectiva, necesitamos considerar la siguiente aplicación que llamaremos *inmersión de Plücker*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{kn}: & \mathbb{G}(k,\mathbb{P}(V)) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V) \\ & L[v_0,\ldots,v_k] & \longmapsto & [v_0\wedge\ldots\wedge v_k] \end{array}$$

donde $L[v_0,\ldots,v_k]$ representa el espacio lineal en $\mathbb{P}(V)$ generado por los vectores linealmente independientes $v_0,\ldots,v_k \in V^*$ y $[v_0\wedge\ldots\wedge v_k]$ simboliza el punto de $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ representado por $v_0\wedge\ldots\wedge v_k$ (tomando en $\bigwedge^{k+1} V^*$ la base $\{\ldots,w_{i_1}\wedge\ldots\wedge w_{i_{k+1}},\ldots\}$).

Fijamos una base en V^* y la inducida en $\bigwedge^{k+1} V^*$. Entonces φ_{kn} asocia al espacio generado por las filas $v_0,\ldots,v_k$ de la matriz de Plücker un punto en $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ cuyas coordenadas son las del menor maximal de la matriz. Es decir, φ_{kn} asocia a un espacio definido por una matriz de Plücker el punto de $\mathbb{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1}$ cuyas coordenadas son todos los menores de orden $k+1$ de la matriz. Además se verifica que φ_{kn} está bien definido.

Definición 2.3. *Las coordenadas homogóneas en $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ inducidas por la elección de las coordenadas en $\mathbb{P}(V)$ se llaman coordenadas de Plücker y se denotan por $p_{i_0,\ldots,i_k}$. (Los $p_{i_0,\ldots,i_k}$ son las coordenadas que corresponden al determinante de la matriz $(k+1)(k+1)$ obtenido tomando las columnas $i_0,\ldots,i_k$.)*

Ahora, se verifica que φ_{kn} es una inmersión de $\mathbb{G}(k,n)$ en $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ como subvariedad algebraica. Veamos por qué.

- Para cada conjunto afín abierto $V_{i_0,\ldots,i_k} = \{p_{i_0,\ldots,i_k} \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ se tiene que la siguiente igualdad
$$\varphi_{kn}(\mathbb{G}(k,n)) \bigcap V_{i_0,\ldots,i_k} = \varphi_{kn}(U_{i_0,\ldots,i_k})$$
será suficiente para probar que $\varphi_{kn}|_{U_{i_0,\ldots,i_k}}$ es una inmersión algebraica en $V_{i_0,\ldots,i_k}$. Trabajaremos con $U_{0,\ldots,k}$. Viene representado por la matriz siguiente,
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{0k+1} & \ldots & b_{0n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{1k+1} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{kk+1} & \ldots & b_{kn} \end{pmatrix}$$
Para esta matriz tenemos que $p_{0,\ldots,k} = 1$ y consideramos el resto de las de Plücker como las coordenadas en $V_{0,\ldots,k}$. Pero todas las coordenadas de $U_{0,\ldots,k}$ (que son los

(b_{ij})) aparecen como coordenadas de φ_{kn}. Más preciso, cada b_{ij} aparece como el menor de la matriz anterior tomando las columnas $0, \ldots, \hat{i}, \ldots, k, j$. Esto prueba salvo signo que φ_{kn} es una inmersión.

Además cada $p_{i_0 \ldots i_k}$ es una expresión polinomial en los b_{ij}, por lo que cada $\varphi_{kn}(\mathbb{G}(k,n) \bigcap V_{0\ldots k})$ es algebraico en $V_{0\ldots k}$. Al cambiar este abierto por otro $U_{i_0 \ldots i_k}$ cualquiera se obtiene que $\mathbb{G}(k,n)$ es una subvariedad algebraica de $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$.

Consideramos $i_0 \leq \cdots \leq i_k$ ya que $p_{i_0 \ldots i_k} = sg(\sigma) p_{\sigma(i_0) \ldots . \sigma(i_k)}$ siendo σ una permutación de los elementos $\{i_0, ..., i_k\}$

Observación 2.4. *En realidad, se puede demostrar que $\mathbb{G}(k,n)$ está definido dentro del espacio proyectivo por formas cuadráticas. Veamos qué aspecto tienen. Para cada subespacio Λ con coordenadas de Plücker $\bar{p} = (p_{i_0 \ldots i_k})$ definimos los vectores*

$$w_{i_0 \ldots i_{k-1}} = (p_{i_0 \ldots i_{k-1} 0}, \ldots, p_{i_0 \ldots i_{k-1} n})$$

con $i_0, ... i_{k-1} = 0, \ldots, n$ y las formas lineales

$$H_{i_0 \ldots i_k j_0} = p_{i_0 \ldots i_k} x_{j_0} - p_{i_0 \ldots i_{k-1} j_0} x_{i_k} + \cdots (-1)^{k+1} p_{i_1 \ldots i_k j_0} x_{i_0}$$

con $i_0, ... i_k, j_0 = 0, \ldots, n$ donde $x_0, \ldots, x_n$ forman un sistema de coordenadas de $\mathbb{P}^n$.

Tenemos que:

- *los vectores $w_{i_0 \ldots i_{k-1}}$ generan el subespacio lineal de $\vec{\Lambda} \subseteq V^*$ que define Λ.*
- *las formas lineales $H_{i_0 \ldots i_k j_0}$ generan el subespacio lineal de V definido por las formas lineales en $\mathbb{P}^n$ que se anulan en Λ*
- *de hecho, las ecuaciones de $\mathbb{G}$ en el espacio de Plücker son $H_{i_0 \ldots i_k j_0}(w_{j_1 \ldots j_k}) = 0$ para $i_0, ..., i_k, j_0, j_1, ..., j_k = 0, \ldots, n$.*

Si damos las ecuaciones $H_{i_0 \ldots i_k j_0}(w_{j_1 \ldots j_k}) = 0$ de forma explícita obtenemos las ecuaciones cuadráticas de G(k,n):

$$p_{i_0 \ldots i_k} p_{j_0 j_1 \ldots j_k} - p_{i_0 \ldots i_{k-1} j_0} p_{i_k j_1 \ldots j_k} + \cdots + (-1)^{k+1} p_{i_1 \ldots i_k j_0} p_{i_0 j_1 \ldots j_k} = 0$$

Notación 2.5. *Se tiene que las coordenadas de Plücker representadas por $p_{i_0 \ldots i_k}$ son los números en sí, mientras que $q_{i_0 \ldots i_k} \in \bigwedge^{k+1} V$ representan las coordenadas en el espacio en el que está la grassmanianna que vamos a estudiar.*

Observación 2.6. *Sabemos que el espacio V está generado por las formas lineales $x_0, ..., x_n$ de $\mathbb{P}^n$ y además se verifica que $x_{i_0} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} = q_{i_0 \ldots i_k}$ para $0 \leq i_0 < \cdots < i_k \leq n$.*

3. Preliminares de sucesiones exactas

En esta sección recordaremos los dos resultados fundamentales sobre sucesiones exactas que necesitaremos en el trabajo: el complejo de Eagon-Northcott y el Lema de la serpiente.

3.1. Complejo de Eagon-Northcott

En esta primera subsección recordamos el complejo de Eagon-Northcott, que veremos en dos versiones distintas, en lenguaje de formas multilineales y en lenguaje de tensores en espacios vectoriales (que será el que necesitaremos).

3.1.1. Versión multilineal

Demostraremos aquí el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Dada una sucesión exacta de espacios vectoriales:*

$$0 \longrightarrow V'' \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\varphi} V' \longrightarrow 0$$

con dim V"=k+1, entonces para cada $m \leq k+1$ existe una sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow Mult(\underbrace{V' \times \cdots \times V'}_{m-sim}) \longrightarrow^{A_1} Mult(V, \underbrace{V' \times \cdots \times V'}_{m-sim}) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow Mult(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{m-2-antisim}, Sim(V', V')) \longrightarrow^{A_{m-1}} Mult(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{m-1-antisim}, V') \longrightarrow^{A_m}$$

$$\longrightarrow^{A_m} Mult(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{m-antisim}) \longrightarrow^{A_{m+1}} Mult(\underbrace{V'' \times \cdots \times V''}_{m-antisim}) \longrightarrow 0$$

donde para cada i la aplicación A_i viene definida por:

$$\begin{array}{rcl} Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i-1}), Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i+1})) & \xrightarrow{A_i} & Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i}), Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i})) \\ \Lambda(v_1, ..., v_{i-1}, v'_i, ..., v'_m) & \longmapsto & \lambda(v_1, ..., v_i, v'_{i+1}, ..., v'_m) = \\ & & = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} \Lambda(v_1, ..., \hat{v}_j, ..., v_i, \varphi(v_j), v'_{i+1}, ..., v'_m) \end{array}$$

Demostración. Definiremos las aplicaciones más detalladamente

- Definimos A_1:

$$
\begin{tikzcd}
\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m} \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{K} \\
V \times \underbrace{V' \times \cdots \times V'}_{m-1} \arrow[u, "a"] \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
Mult(Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m})) & \xrightarrow{A_1} & Mult(V, Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-1})) \\
\gamma & \longmapsto & \delta = \gamma \circ a
\end{array}
$$

donde tenemos que:

- γ es multilineal y simétrica en las m coordenadas
- $a(v_1, v_2', ..., v_m') = (\varphi(v_1), v_2', ..., v_m')$
- y por tanto $\delta(v_1, v_2', ..., v_m') = \gamma(\varphi(v_1), v_2', ..., v_m')$

Luego δ es multilineal porque γ lo es y es simétrica en las m-1 últimas coordenadas ya que γ lo es.

- Definimos A_2:

$$
\begin{tikzcd}
V \times \overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-1} \arrow[r, "\delta"] & \mathbb{K} \\
V \times V \times \underbrace{V' \times \cdots \times V'}_{m-2} \arrow[u, "b"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
Mult(V, Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-1})) & \xrightarrow{A_2} & Mult(Ant(V,V), Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-2})) \\
\delta & \longmapsto & \alpha = \delta \circ b
\end{array}
$$

donde tenemos que:

- δ es multilineal y simétrica en las m-1 últimas coordenadas
- $b(v_1, v_2, ..., v_m') = (v_2, \varphi(v_1), v_3' ..., v_m') - (v_1, \varphi(v_2), v_3' ..., v_m')$
- y por tanto $\alpha(v_1, v_2, v_3', ..., v_m') = \delta(v_2, \varphi(v_1), v_3' ..., v_m') - \delta(v_1, \varphi(v_2), v_3' ..., v_m')$

Luego α es multilineal ya que δ lo es, es simétrica en las m-2 últimas coordenadas ya que δ lo es y es antisimétrica en las 2 primeras coordenadas ya que:

$$\alpha(v_1, v_2, ..., v'_m) = \delta(v_2, \varphi(v_1), v'_3..., v'_m) - \delta(v_1, \varphi(v_2), v'_3..., v'_m)$$

$$\alpha(v_2, v_1, ..., v'_m) = \delta(v_1, \varphi(v_2), v'_3..., v'_m) - \delta(v_2, \varphi(v_1), v'_3..., v'_m)$$

con lo cual vemos que efectivamente $\alpha(v_1, v_2, ..., v'_m) = -\alpha(v_2, v_1, ..., v'_m)$

- Definimos A_i:

$$\begin{tikzcd}
.\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i-1} \times \overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i+1} \arrow[r, "\Lambda"] & \mathbb{K} \\
.\underbrace{V \times \cdots \times V}_{i} \times \underbrace{V' \times \cdots \times V'}_{m-i} \arrow[u, "n"] \arrow[ur, "\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i-1}), Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i+1})) & \xrightarrow{A_i} & Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i}), Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i})) \\
\Lambda & \longmapsto & \lambda = \Lambda \circ n
\end{array}$$

donde tenemos que:

- Λ es multilineal, antisimétrica en las i-1 primeras coordenadas y simétrica en las m- i+1 últimas coordenadas
- $n(v_1, ..., v_i, v'_{i+1}, ..., v'_m) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} (v_1, ..., \hat{v}_j, ..., v_i, \varphi(v_j), v'_{i+1}, ..., v'_m)$
- y por tanto:
  $\lambda(v_1, ..., v_i, v'_{i+1}, ..., v'_m) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} \Lambda(v_1, ..., \hat{v}_j, ..., v_i, \varphi(v_j), v'_{i+1}, ..., v'_m)$

Luego λ es multilineal ya que Λ lo es, es simétrica en las m-i últimas coordenadas ya que Λ lo es y es antisimétrica en las i-1 ya que λ lo es, tambien es antisimétrica en las i ya que:

$$\lambda(v_1, ...v_{i-1}, v_i, v'_{i+1}, ..., v'_m) = \sum_{j=1}^{i-2} (-1)^{j+1} \Lambda(v_1, ...\hat{v}_j, ..., v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, \varphi(v_j), v'_{i+1}, ..., v'_m)$$

$$+(-1)^{i-1+1} \Lambda(v_1, ..., v_{i-2}, v_i, \varphi(v_{i-1}), v'_{i+1}, ..., v'_m) + (-1)^{i+1} \Lambda(v_1, ..., v_{i-2}, v_{i-1}, \varphi(v_i), v'_{i+1}, ..., v'_m)$$

Por otro lado,

$$\lambda(v_1,...v_i,v_{i-1},v'_{i+1},...,v'_m)=\sum_{j=1}^{i-2}(-1)^{j+1}\Lambda(v_1,...\hat{v}_j,...,v_{i-2},v_i,v_{i-1},\varphi(v_j),v'_{i+1},...,v'_m)$$

$$+(-1)^{i-1+1}\Lambda(v_1,...,v_{i-2},v_{i-1},\varphi(v_i),v'_{i+1},...,v'_m)+(-1)^{i+1}\Lambda(v_1,...,v_{i-2},v_i,\varphi(v_{i-1}),v'_{i+1},...,v'_m)$$

vemos entonces que

$$\lambda(v_1,...v_{i-1},v_i,v'_{i+1},...,v'_m)=-\lambda(v_1,...v_i,v_{i-1},v'_{i+1},...,v'_m)$$

- Definimos A_{i+1}:

$$\begin{tikzcd}
.\overbrace{V\times\cdots\times V}^{i}\times\overbrace{V'\times\cdots\times V'}^{m-i} \arrow[r, "\lambda"] & \mathbb{K} \\
.\underbrace{V\times\cdots\times V}_{i+1}\times\underbrace{V'\times\cdots\times V'}_{m-i-1} \arrow[u, "c"] \arrow[ur, "\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl}
Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{i}),Sim(\overbrace{V'\times\cdots\times V'}^{m-i})) & \xrightarrow{A_{i+1}} & Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{i+1}),Sim(\overbrace{V'\times\cdots\times V'}^{m-i-1})) \\
\lambda & \longmapsto & \rho=\lambda\circ c
\end{array}$$

donde tenemos que:

- λ es multilineal, antisimétrica en las i primeras coordenadas y simétrica en las m-i últimas coordenadas
- $c(v_1,...,v_{i+1},v'_{i+2},...,v'_m)=\sum_{j=1}^{i+1}(-1)^j(v_1,...,\hat{v}_j,...,v_{i+1},\varphi(v_j),v'_{i+2},...,v'_m)$
- y por tanto $\rho(v_1,...,v_{i+1},v'_{i+2},...,v'_m)=\sum_{j=1}^{i+1}(-1)^j\lambda(v_1,...,\hat{v}_j,...,v_{i+1},\varphi(v_j),v'_{i+2},...,v'_m)$

Luego ρ es multilineal ya que λ lo es, es simétrica en las m-i-1 últimas coordenadas ya que λ lo es y es antisimétrica en las i primeras ya que λ lo es, también es antisimétrica en las i+1 ya que:

$$\rho(v_1,...v_i,v_{i+1},v'_{i+2},...,v'_m)=\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j\lambda(v_1,...\hat{v}_j,...,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\varphi(v_j),v'_{i+2},...,v'_m)$$

$$+(-1)^i\lambda(v_1,...,v_{i-1},v_{i+1},\varphi(v_i),v'_{i+2},...,v'_m)+(-1)^{i+1}\lambda(v_1,...,v_{i-1},v_i,\varphi(v_{i+1}),v'_{i+2},...,v'_m)$$

Por otro lado,

$$\rho(v_1,...v_{i+1},v_i,v'_{i+2},...,v'_m)=\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j\lambda(v_1,...\hat{v_j},...,v_{i-1},v_{i+1},v_i,\varphi(v_j),v'_{i+2},...,v'_m)$$

$$+(-1)^i\lambda(v_1,...,v_{i-1},v_i,\varphi(v_{i+1}),v'_{i+2},...,v'_m)+(-1)^{i+1}\lambda(v_1,...,v_{i-2},v_{i+1},\varphi(v_i),v'_{i+1},...,v'_m)$$

vemos entonces que

$$\lambda(v_1,...v_{i-1},v_i,v'_{i+1},...,v'_m)=-\lambda(v_1,...v_i,v_{i-1},v'_{i+1},...,v'_m)$$

- Definimos A_m:

$$\begin{tikzcd}
\overbrace{V\times\cdots\times V}^{m-1}\times V' \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{K} \\
\underbrace{V\times\cdots\times V}_{m} \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{m-1}),V') & \xrightarrow{A_m} & Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{m})) \\
\epsilon & \longmapsto & \sigma=\epsilon\circ e
\end{array}$$

donde tenemos que:

- ϵ es multilineal, antisimétrica en las m-1 primeras coordenadas
- $e(v_1,...,v_m)=\sum_{j=1}^m(-1)^{j+1}(v_1,...,\hat{v_j},...,v_m,\varphi(v_j))$
- y por tanto $\sigma(v_1,...,v_m)=\sum_{j=1}^m(-1)^{j+1}\epsilon(v_1,...,\hat{v_j},..,v_m,\varphi(v_j))$

Luego σ es multilineal ya que ϵ lo es y es antisimétrica en las m-1 ya que λ lo es, también es antisimétrica en las m ya que:

$$\sigma(v_1,...,v_{m-1},v_m)=\sum_{j=1}^{m-2}(-1)^{j+1}\epsilon(v_1,...\hat{v_j},...,v_{m-2},v_{m-1},v_m,\varphi(v_j))$$

$$+(-1)^{m-1+1}\epsilon(v_1,...,v_{m-2},v_m,\varphi(v_{m-1}))+(-1)^{m+1}\epsilon(v_1,...,v_{m-2},v_{m-1},\varphi(v_m))$$

Por otro lado,

$$\sigma(v_1, ..., v_m, v_{m-1}) = \sum_{j=1}^{m-2} (-1)^{j+1} \epsilon(v_1, ...\hat{v_j}, ..., v_{m-2}, v_m, v_{m-1}, \varphi(v_j))$$

$$+(-1)^{m-1+1}\epsilon(v_1, ..., v_{m-2}, v_{m-1}, \varphi(v_m)) + (-1)^{m+1}\epsilon(v_1, ..., v_{m-2}, v_m, \varphi(v_{m-1}))$$

vemos entonces que $\sigma(v_1, ..., v_{m-1}, v_m) = \sigma(v_1, ..., v_m, v_{m-1})$

- Definimos A_{m+1}:

$$\begin{tikzcd}
.\overbrace{V \times \cdots \times V}^{m} \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{K} \\
.\underbrace{V \times \cdots \times V}_{m} \arrow[u, "d"] \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl}
Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{m})) & \xrightarrow{A_{m+1}} & Mult(Ant(\overbrace{V'' \times \cdots \times V''}^{m})) \\
\sigma & \longmapsto & \mu = \sigma \circ d
\end{array}$$

donde tenemos que:

  - σ es multilineal, antisimétrica en las m coordenadas
  - $d(v''_1, ..., v''_m) = (\beta(v''_1), ..., \beta(v''_m))$
  - y por tanto $\mu(v_1, ..., v_m) = \sigma(\beta(v''_1), ..., \beta(v''_m))$

Luego μ es multilineal ya que σ lo es y es antisimétrica en las m coordenadas ya que σ lo es.

Demostramos que la sucesión segun la hemos definido es exacta:

Por definición sabemos que:

- φ es sobreyectiva
- $Im(\beta) = ker(\varphi)$
- β es inyectiva

Tenemos que probar que:

1. La aplicación A_1 es inyectiva

2. La aplicación A_{m+1} es sobreyectiva

3. $Im(A_p) = Ker(A_{p+1})$ con $p = 1...m$ (más tarde identificaremos los tres casos)

A continuación probaremos cada uno de los requisitos

1. A_1 es inyectiva

   Para probar que A_1 es inyectica debemos ver que si $A_1(\gamma) = 0$ entonces $\gamma = 0$. Es decir,

   ¿ si $\gamma(\varphi(v_1), v_2', ..., v_m') = 0$ para cada $v_1 \in V$ y $v_2', ..., v_m' \in V' \Rightarrow \gamma(v_1', v_2', ..., v_m') = 0$ para cada $v_1', v_2', ..., v_m' \in V'$?

   Como φ es sobreyectiva entonces para cada $v_1' \in V'$ existe $v_1 \in V$ tal que $\varphi(v_1) = v_1'$. Y como $\gamma(\varphi(v_1), v_2', ..., v_m') = 0$ entonces se tiene que $\gamma(v_1', v_2', ..., v_m') = 0$.

2. A_{m+1} es sobreyectiva.

   A_{m+1} será sobreyectiva si para cada $\mu \in Mult(Ant(\overbrace{V'' \times \cdots \times V''}^{m}))$ existe

   $\sigma \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{m}))$ tal que $\mu = A_{m+1}(\sigma)$, es decir,

   ¿ para cada $\mu \in Mult(Ant(\overbrace{V'' \times \cdots \times V''}^{m}))$ existe $\sigma \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{m}))$ tal que

   $$\mu(v_1'', ..., v_m'') = \sigma(\beta(v_1''), ..., \beta(v_m''))$$

   para cada $v_1'', ..., v_m'' \in V''$?

   Debemos construir la aplicación $\sigma \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{m}))$ que verifique la igualdad anterior. Como β es inyectiva, entonces podemos poner V como suma directa de $\beta(V'')$ y un espacio complementario.

   $$V = \beta(V'') \oplus W$$

   Definimos

   $$\begin{array}{rccc} \sigma : & \overbrace{V'' \times \cdots \times V''}^{m-antisim} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (\beta(v_1'') + w_1, \beta(v_2'') + w_2, ..., \beta(v_m'') + w_m) & \longmapsto & \mu(v_1'', v_2'', ..., v_m'') \end{array}$$

   Debemos probar que σ está bien definida y que verifica que

   $$\mu(v_1'', ..., v_m'') = \sigma(\beta(v_1''), ..., \beta(v_m''))$$

- ¿ σ está bien definida?

  Sabemos que σ está bien definido ya que si tomamos

$$v_1 = \beta(v_1'') + \tilde{w_1}$$

  o

$$v_1 = \beta(v_1'') + w_1$$

  y $\cdots$

$$v_m = \beta(v_m'') + \tilde{w_m}$$

  o

$$v_m = \beta(v_m'') + w_m$$

  entonces $\sigma(v_1, ..., v_m) = \mu(v_1'', ..., v_m'')$ es independiente de la elección de los elementos de W que hagamos.

- ¿$\mu(v_1'', ..., v_m'') = \sigma(\beta(v_1''), ..., \beta(v_m''))$?

  La igualdad anterior se verifica por como hemos definido σ.

3. $Im(A_p) = ker(A_{p+1})$ para $p = 1...m$

   Tenemos que tres casos:

   - Caso1: $Im(A_1) = ker(A_2)$
   - Caso2: $Im(A_i) = ker(A_{i+1})$ para $i = 2...m-1$
   - Caso3: $Im(A_m) = ker(A_{m+1})$

   Veamos cada uno de los casos

   Caso1: $Im(A_1) = ker(A_2)$

   - $Im(A_1) = \{\delta \in Mult(V, Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-1}))$ tal que existe $\gamma \in Mult(Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m}))$ con $\delta = A_1(\gamma)\} = \{\delta \in Mult(V, Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-1}))$ tal que existe $\gamma \in Mult(Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m}))$ con $\delta(v_1, v_2', ..., v_m') = \gamma(\varphi(v_1), v_2', ..., v_m')$ para cada $v_1 \in V$ y para cada $v_2', ..., v_m' \in V'\}$

   - $ker(A_2) = \{\delta \in Mult(V, Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-1}))$ tal que $A_2(\delta) = 0\} =$ $\{\delta \in Mult(V, Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-1}))$ tal que $\alpha(v_1, v_2, v_3', ...v_m') = 0$ para cada $v_1, v_2 \in$

V y para cada $v'_3, ..., v'_m \in V'\} = \{\delta \in Mult(V, Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-1}))$ tal que $\delta(v_2, \varphi(v_1), v'_3, ..., v'_m) = \delta(v_1, \varphi(v_2), v'_3, ..., v'_m)$ para cada $v_1, v_2 \in V$ y para cada $v'_3, ..., v'_m \in V'\}$

- Veamos que $Im(A_1) \subseteq ker(A_2)$.

  Sea $\delta \in Im(A_1)$, entonces tenemos que existe $\gamma \in Mult(Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m}))$ tal que $\delta(v_1, v'_2, ..., v'_m) = \gamma(\varphi(v_1), v'_2, ..., v'_m)$ para cada $v_1 \in V$ y para cada $v'_2, ..., v'_m \in V'\}$.
  ¿$\delta \in ker(A_2)$? ¿$\delta(v_2, \varphi(v_1), v'_3, ..., v'_m) - \delta(v_1, \varphi(v_2), v'_3, ..., v'_m) = 0$? Por definición tenemos que:

$$\delta(v_2, \varphi(v_1), v'_3, ..., v'_m) = \gamma(\varphi(v_2), \varphi(v_1), v'_3, ..., v'_m)$$

$$\delta(v_1, \varphi(v_2), v'_3, ..., v'_m) = \gamma(\varphi(v_1), \varphi(v_2), v'_3, ..., v'_m)$$

  Como γ es simétrica entonces $\gamma(\varphi(v_2), \varphi(v_1), v'_3, ..., v'_m) = \gamma(\varphi(v_1), \varphi(v_2), v'_3, ..., v'_m)$ y por tanto $\delta(v_2, \varphi(v_1), v'_3, ..., v'_m) = \delta(v_1, \varphi(v_2), v'_3, ..., v'_m)$.
  Luego $\delta(v_2, \varphi(v_1), v'_3, ..., v'_m) - \delta(v_1, \varphi(v_2), v'_3, ..., v'_m) = 0$ y así $\delta \in ker(A_2)$.

- Veamos que $ker(A_2) \subseteq Im(A_1)$.
  Sea $\delta \in ker(B)$, entonces $\delta(v_2, \varphi(v_1), v'_3, ..., v'_m) - \delta(v_1, \varphi(v_2), v'_3, ..., v'_m) = 0$ para cada $v_1, v_2 \in V$ y para cada $v'_3, ..., v'_m \in V'$.

  ¿$\delta \in Im(A_1)$? ¿ Existe $\delta \in Mult(Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m}))$ tal que $\delta(v_1, v'_2, ..., v'_m) = \gamma(\varphi(v_1), v'_2, ..., v'_m)$ para cada $v_1 \in V$ y para cada $v'_2, ..., v'_m \in V'$?
  Debemos construir γ simétrica en las m coordenadas tal que $\delta(v_1, v'_2, ..., v'_m) = \gamma(\varphi(v_1), v'_2, ..., v'_m)$ para cada $v_1 \in V$ y para cada $v'_2, ..., v'_m \in V'$,
  sabiendo que $\delta(v_2, \varphi(v_1), v'_3, ..., v'_m) - \delta(v_1, \varphi(v_2), v'_3, ..., v'_m) = 0$ para cada $v_1, v_2 \in V$ y para cada $v'_3, ..., v'_m \in V'$
  Sea $B' = \{v'_1, \ldots, v'_{n-k}\}$ una base de V' y $B = \{v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ conjunto de elementos de V tal que $\varphi(v_i) = v'_i$.
  Definimos la aplicación ψ que manda los elementos de B' en los elementos de B.

$$\begin{array}{rccc} \psi : & V' & \longrightarrow & V \\ & v'_i & \longmapsto & v_i \end{array}$$

  Esta aplicación está bien definida. Usando ψ definimos la aplicación γ como sigue:

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (v'_1, ..., v'_m) & \longmapsto & \delta(\psi(v'_1), v'_2, ..., v'_m) \end{array}$$

γ está bien definida por como la hemos definido. Faltaría probar que es simétrica, es decir, $\gamma(v'_1, v'_2, ..., v'_m) = \gamma(v'_2, v'_1, ..., v'_m)$?. Evaluamos las dos partes de la igualdad que queremos probar,

$$\gamma(v'_1, v'_2, ..., v'_m) = \delta(\psi(v'_1), v'_2, ..., v'_m) = \delta(v_1), \varphi(v_2), v'_3, ..., v'_m)$$

$$\gamma(v'_2, v'_1, ..., v'_m) = \delta(\psi(v'_2), v'_1, ..., v'_m) = \delta(v_2), \varphi(v_1), v'_3, ..., v'_m)$$

Pero como $\delta \in ker(A_2)$ se tiene que:

$$\delta(v_2, \varphi(v_1), v'_3, ..., v'_m) - \delta(v_1, \varphi(v_2), v'_3, ..., v'_m) = 0$$

para cada $v_1, v_2 \in V$ y para cada $v'_3, ..., v'_m \in V'$.
Entonces γ es simétrica.

Caso2: $Im(A_i) = ker(A_{i+1})$

- $Im(A_i) = \{\lambda \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i}), Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i}))$ tal que existe $\Lambda \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i-1}, Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i+1}))$ con $\lambda = A_i(\Lambda)\} =$ $\{\lambda \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i}), Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i}))$ tal que existe $\Lambda \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i-1}), Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i+1}))$con $\lambda(v_1, ..., v_i, v'_{i+1}, ...v'_m) =$ $= \sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}\Lambda(v_1, ..., \hat{v}_j, ..., v_i, \varphi(v_j), v'_{i+1}, ..., v'_m)$ para cada $v_1, ...v_i \in V$ y para cada $v'_{i+1}, ..., v'_m \in V'\}$.

- $ker(A_{i+1}) = \{\lambda \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i}), Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i}))$ tal que $A_{i+1}(\lambda) = 0\} =$ $\{\lambda \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i}), Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i}))$ tal que $\rho(v_1, ..., v_{i+1}, v'_{i+2}, ...v'_m) =$ $= \sum_{j=1}^{i+1}(-1)^{j}\lambda(v_1, ..., \hat{v}_j, ..., v_{i+1}, \varphi(v_j), v'_{i+2}, ..., v'_m) = 0$ para cada $v_1, ...v_{i+1} \in V$ y para cada $v'_{i+2}, ..., v'_m \in V'\}$.
- Veamos que $Im(A_i) \subseteq ker(A_{i+1})$.

  Sea $\lambda \in Im(A_i)$, entonces existe $\Lambda \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{i-1}), Sim(\overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i+1}))$ con $\lambda(v_1, ..., v_i, v'_{i+1}, ...v'_m) = \sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}\Lambda(v_1, ..., \hat{v}_j, ..., v_i, \varphi(v_j), v'_{i+1}, ..., v'_m)$ para cada $v_1, ...v_i \in V$ y para cada $v'_{i+1}, ..., v'_m \in V'$.

¿ $\lambda \in ker(A_{i+1})$?
¿ $\sum_{j=1}^{i+1}(-1)^j\lambda(v_1,...,\hat{v_j},...,v_{i+1},\varphi(v_j),v'_{i+2},...,v'_m)=0$
para cada $v_1,...v_{i+1}\in V$ y para cada $v'_{i+2},...,v'_m\in V'\}$?
Por definición tenemos que:

$$\lambda(v_1,...,\hat{v_j},...,v_{i+1},\varphi(v_j),,v'_{i+1},...v'_m)=$$

$$=\sum_{n=1}^{j}(-1)^{n+1}\Lambda(v_1,...,\hat{v_n},...,\hat{v_j},...,v_{i+1},\varphi(v_n),\varphi(v_j),v'_{i+2},...,v'_m)+$$
$$\sum_{n=j+1}^{i+1}(-1)^{n+1}\Lambda(v_1,...,\hat{v_j},...,\hat{v_n},...,v_{i+1},\varphi(v_n),\varphi(v_j),v'_{i+2},...,v'_m)$$

Luego $\sum_{j=1}^{i+1}(-1)^j\lambda(v_1,...,\hat{v_j},...,v_{i+1},\varphi(v_j),v'_{i+2},...,v'_m)=$

$$=\sum_{j=1}^{i+1}(-1)^j(\sum_{n=1}^{j}(-1)^{n+1}\Lambda(v_1,...,\hat{v_n},...,\hat{v_j},...,v_{i+1},\varphi(v_n),\varphi(v_j),v'_{i+2},...,v'_m)+$$
$$\sum_{n=j+1}^{i+1}(-1)^{n+1}\Lambda(v_1,...,\hat{v_j},...,\hat{v_n},...,v_{i+1},\varphi(v_n),\varphi(v_j),v'_{i+2},...,v'_m))$$

desarrollandolo y sabiendo que Λ es simétrica en las m-i+1 últimas coordenadas llegamos a que es igual 0 luego $\lambda\in ker(A_{i+1})$

- Veamos que $ker(A_{i+1})\subseteq Im(A_i)$.
  Sea $\lambda\in ker(A_{i+1})$, entonces

$$\sum_{j=1}^{i+1}(-1)^j\lambda(v_1,...,\hat{v_j},...,v_{i+1},\varphi(v_j),v'_{i+2},...,v'_m)=0$$

para cada $v_1,...v_{i+1}\in V$ y para cada $v'_{i+2},...,v'_m\in V$

¿$\lambda\in Im(A_i)$? ¿ Existe $\Lambda\in Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{i-1},Sim(\overbrace{V'\times\cdots\times V'}^{m-i+1}))$
con $\lambda(v_1,...,v_i,v'_{i+1},...v'_m)=$
$=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}\Lambda(v_1,...,\hat{v_j},...,v_i,\varphi(v_j),v'_{i+1},...,v'_m)$
para cada $v_1,...v_i\in V$ y para cada $v'_{i+1},...,v'_m\in V'$?

Debemos construir una aplicación $\Lambda\in Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{i-1}),Sim(\overbrace{V'\times\cdots\times V'}^{m-i+1}))$con $\lambda(v_1,...,v_i,v'_{i+1},...v'_m)=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}\Lambda(v_1,...,\hat{v_j},...,v_i,\varphi(v_j),v'_{i+1},...,v'_m)$

para cada $v_1, ...v_i \in V$ y para cada $v'_{i+1}, ..., v'_m \in V'$ sabiendo que

$$\sum_{j=1}^{i+1} (-1)^j \lambda(v_1, ..., \hat{v_j}, ..., v_{i+1}, \varphi(v_j), v'_{i+2}, ..., v'_m) = 0$$

para cada $v_1, ...v_{i+1} \in V$ y para cada $v'_{i+2}, ..., v'_m \in V'$
Para definir Λ usamos la base $B' = \{v'_1, \ldots, v'_{n-k}\}$ de V', el conjunto $B = \{v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ de elementos de V tal que $\varphi(v_i) = v'_i$ y la aplicación ψ

$$\begin{array}{rccc} \psi : & V' & \longrightarrow & V \\ & v'_i & \longmapsto & v'_i \end{array}$$

Se verifica que $\varphi \circ \psi = Id$ pero $\psi \circ \varphi \neq Id$
Además,

$$v - \psi(\varphi(v)) \in Ker(\varphi) = Im(\beta) \Rightarrow v - \psi(\varphi(v)) = \beta(v'')$$

para algún $v'' \in V''$.
Usando ésto definimos Λ como sigue:

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & \overbrace{V \times \cdots \times V}^{i-1 antisim} \times \overbrace{V' \times \cdots \times V'}^{m-i+1 sim} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (v_1, ..., v_{i-1}, v'_i, ..., v'_m) & \longmapsto & * \end{array}$$

Siendo * igual:

$$\Lambda(v_1, ..., v_{i-1}, v'_i, ..., v'_m) = \frac{1}{m-i+1} \sum_{n=i}^{m} \Lambda(v_1, , ..., v_{i-1}, \psi(v'_n), v'_i, ..., \hat{v'_n}, ..., v'_m)$$

$$-\frac{1}{(m-i+1)(m-i+2)} \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{n=i}^{m}$$

$$\Lambda(v_1, ..., \psi(\varphi(v_p)), ..., v_{i-1}, \psi(v'_n), v'_i, ..., \hat{v'_n}, ..., v'_m)$$

$$+\frac{1}{\frac{(m-i+1)(m-i+2)(m-i+3)}{2}} \sum_{p=1}^{i-2} \sum_{q=p+1}^{i-1} \sum_{n=i}^{m}$$

$$\Lambda(v_1, ..., \psi(\varphi(v_p)), ..., \psi(\varphi(v_q)), ..., v_{i-1}, \psi(v'_n), v'_i, ..., \hat{v'_n}, ..., v'_m)$$

$$- \cdots$$

$$+(-1)^l \frac{1}{\frac{(m-i+1)(m-i+2)\cdots(m-i+1+l)}{l}} \sum_{r_1=1}^{i-1-l} \sum_{r_2=r_1+1}^{i-1-l+1} \cdots \sum_{r_l=r_{l-1}}^{i-1} \sum_{n=i}^{m}$$

$$\Lambda(v_1,...,\psi(\varphi(v_{r_1})),...,\psi(\varphi(v_{r_2})),...,\psi(\varphi(v_{r_l})),...,v_{i-1},\psi(v'_n),v'_i,...,\hat{v'_n},...,v'_m)$$

$$-\cdots+(-1)^{i-1}\frac{1}{\frac{(m-i+1)(m-i+2)\cdots(m-i+1+i-1)}{i-1}}$$

$$\sum_{n=i}^{m}\Lambda(\psi(\varphi(v_1)),...,\psi(\varphi(v_{i-1})),\psi(v'_n),v'_i,...\hat{v'_n},...,v'_m)$$

Es una aplicación bien definida y desarrollando se comprueba que efectivamente $\lambda \in Im(A_i)$

Caso3: $Im(A_m) = ker(A_{m+1})$

- $Im(A_m) = \{\sigma \in Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{m}))$ tal que existe $\epsilon \in Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{m-1}), V')$ con $\sigma = A_m(\epsilon)\} = \{\sigma \in Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{m}))$ tal que existe $\epsilon \in Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{m-1}), V')$ con $\sigma(v_1,,...v_m) = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\epsilon(v_1,...,\hat{v}_j,...,v_m,\varphi(v_j))$ para cada $v_1,...v_m \in V\}$.
- $ker(A_{m+1}) = \{\sigma \in Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{m}))$ tal que $A_{m+1}(\sigma)=0\} =$ $\{\sigma \in Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{m}))$ tal que $\sigma(\beta(v''_1),...,\beta(v''_m)) = 0$ para cada $v''_1,...v''_m \in V''\}$
- Veamos que $Im(A_m) \subseteq ker(A_{m+1})$.

  Sea $\sigma \in Im(A_m)$, entonces existe $\epsilon \in Mult(Ant(\overbrace{V\times\cdots\times V}^{m-1}), V')$ con

$$\sigma(v_1,,...v_m) = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\epsilon(v_1,...,\hat{v}_j,...,v_m,\varphi(v_j))$$

  para cada $v_1,...v_m \in V$.
  ¿$\sigma \in ker(A_{m+1})$? ¿$\sigma(\beta(v''_1),...,\beta(v''_m)) = 0$ para cada $v''_1,...v''_m \in V''$?
  Por definición tenemos que:

$$\sigma(\beta(v''_1),...,\beta(v''_m)) = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\epsilon(\beta(v_1),...,\beta(\hat{v''_j}),...,\beta(v''_m),\varphi(\beta(v''_j)))$$

  Como $Im(\beta) = ker(\varphi) \Rightarrow Im(\beta) \subseteq ker(\varphi)$

$$\Rightarrow \varphi\circ\beta = 0$$

entonces $sigma(\beta(v''_1),...,\beta(v''_m)) = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\epsilon(\beta(v_1),...,\beta(\hat{v''_j}),...,\beta(v''_m),0)$
$\Rightarrow \sigma \in kerA_{m+1}$.

- Veamos que $ker(A_{m+1}) \subseteq Im(A_m)$.
  Sea $\sigma \in ker(A_{m+1})$, entonces $\sigma(\beta(v''_1),...,\beta(v''_m)) = 0$
  para cada $v''_1,...v''_m \in V''$

  ¿ $\sigma \in Im(A_m)$? ¿ Existe $\epsilon \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{m-1}), V')$ con

$$\sigma(v_1,,...v_m) = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\epsilon(v_1,...,\hat{v_j},...,v_m,\varphi(v_j))$$

  para cada $v_1,...v_m \in V$?

  Debemos construir una aplicación $\epsilon \in Mult(Ant(\overbrace{V \times \cdots \times V}^{m-1}), V')$ con

$$\sigma(v_1,,...v_m) = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\epsilon(v_1,...,\hat{v_j},...,v_m,\varphi(v_j))$$

  para cada $v_1,...v_m \in V$ sabiendo que$\sigma(\beta(v''_1),...,\beta(v''_m)) = 0$
  para cada $v''_1,...v''_m \in V''$
  Para definir ϵ usamos la base $B' = \{v'_1,\ldots,v'_{n-k}\}$ de V', el conjunto $B = \{v_1,\ldots,v_{n-k}\}$ de elementos de V tal que $\varphi(v_i) = v'_i$ y la aplicación ψ

$$\begin{array}{rccc} \psi: & V' & \longrightarrow & V \\ & v'_i & \longmapsto & v'_i \end{array}$$

  Se verifica que $\varphi \circ \psi = Id$ pero $\psi \circ \varphi \neq Id$
  Además,

$$v - \psi(\varphi(v)) \in Ker(\varphi) = Im(\beta) \Rightarrow v - \psi(\varphi(v)) = \beta(v'')$$

  para algún $v'' \in V''$.
  Usando ésto definimos ϵ como sigue:

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \bigwedge^{m-1} V \times V' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (v_1,...,v_{m-1},v'_m) & \longmapsto & * \end{array}$$

  Siendo * igual:

$$\epsilon(v_1,...,v_{m-1},v'_m) = \sigma(v_1,...,v_{m-1},\psi(v'_m)) -$$

$$-\frac{1}{1\cdot 2}\sum_{n=1}^{m-1}\sigma(v_1,,...,\psi(\varphi(v_n)),...,v_{m-1},\psi(v'_m))$$

$$+\frac{1}{\frac{2\cdot 3}{2}}\sum_{n=1}^{m-2}\sum_{p=n+1}^{m-1}\sigma(v_1,...,\psi(\varphi(v_n)),...,\psi(\varphi(v_p)),...,v_{m-1},\psi(v'_m))$$

$$-\cdots+(-1)^l\frac{1}{\frac{1\cdot 2\cdots l\cdot l+1}{l}}\sum_{r_1=1}^{m-1-l}\sum_{r_2=r_1+1}^{m-1-l+1}\cdots\sum_{r_l=r_{l-1}}^{m-1}$$

$$\sigma(v_1,...,\psi(\varphi(v_{r_1})),...,\psi(\varphi(v_{r_2})),...,\psi(\varphi(v_{r_l})),...,v_{m-1},\psi(v'_m))$$

$$-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1}{\frac{(1\cdot 2\cdots m-1\cdot m}{m-1}}\sigma(\psi(\varphi(v_1)),...,\psi(\varphi(v_{m-1})),\psi(v'_m))$$

Es una aplicación bien definida y desarrollando se comprueba que efectivamente $\sigma\in Im(A_m)$

□

3.1.2. Versión tensorial de espacios vectoriales

Construiremos aquí el complejo de Eagon-Northcott como una sucesión exacta de espacios vectoriales de tensores.

En primer lugar daremos una notación que usaremos que aquí en adelante:

Notación 3.2.

- *S^iX representa el producto simétrico i-ésimo de X*
- *$\bigwedge^i X$ representa el producto exterior i-ésimo de X*

para cualquier X espacio vectorial, fibrado vectorial, ...

A continuación demostraremos el siguiente:

Teorema 3.3. *Dada una sucesión exacta de espacios vectoriales*

$$0\longrightarrow W'\xrightarrow{\beta}W\xrightarrow{\varphi}W''\longrightarrow 0$$

con dimW"=k+1, para cada $m\leq k+1$ existe una sucesión exacta

$$0\longrightarrow S^mW''^*\longrightarrow W^*\otimes S^{m-1}W''^*\longrightarrow\bigwedge^2 W^*\otimes S^{m-2}W''^*\longrightarrow\cdots\longrightarrow$$

$$\cdots\longrightarrow W''^*\otimes\bigwedge^{m-1}W^*\longrightarrow\bigwedge^m W^*\longrightarrow\bigwedge^m W'^*\longrightarrow 0$$

donde cada i definimos

$$\begin{array}{ccc}\bigwedge^{i-1}W^*\times S^{m-i+1}W''^* & \longrightarrow & \bigwedge^i W^*\times S^{m-i}W''^*\\ (\lambda_1\wedge\cdots\wedge\lambda_{i-1})\otimes(\alpha'_i\cdots\alpha'_m) & \longmapsto & \sum_{p=i}^m(\lambda_1\wedge\cdots\wedge\lambda_{i-1}\wedge\varphi^*(\alpha'_j))\otimes(\alpha'_i\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha'_m)\end{array}$$

Como las flechas están definidas de forma natural, el mismo resultado sigue siendo cierto para fibrados vectoriales, que es el que usaremos:

Corolario 3.4. *Dada una sucesión exacta de fibrados vectoriales*

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

con dim F"=k+1, para cada $m \leq k+1$ existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S^m F''^* \longrightarrow F^* \otimes S^{m-1} F''^* \longrightarrow \bigwedge^2 F^* \otimes S^{m-2} F''^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow F''^* \otimes \bigwedge^{m-1} F^* \longrightarrow \bigwedge^m F^* \longrightarrow \bigwedge^m F'^* \longrightarrow 0$$

Empezaremos llamando V', V, V" respectivamente a los espacios vectoriales duales de W', W, W", con lo que tendremos una sucesión exacta,

$$0 \longrightarrow V'' \longrightarrow V \longrightarrow V' \longrightarrow 0$$

a la que podemos aplicar el Teorema 3.1. El punto clave es que la sucesión que queremos demostrar es equivalente a la dada por el Teorema 3.1. Para ver ello necesitamos una definición previa:

Definición 3.5. *Sea $A \in M_n$, definimos su permanente por la fórmula:*
$[A] = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}$

Observación 3.6. *Para cada i existe un isomorfismo*
$\bigwedge^i V^* \otimes S^{m-i} V'^* \cong Mult(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{i-antisim} \underbrace{V' \times \cdots \times V'}_{m-i-sim})$ *donde*

Para $(\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_i) \otimes (\alpha'_{i+1} \cdots \alpha'_m) \in \bigwedge^i V^* \otimes S^{m-i} V'^*$

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^i V \times S^{m-i} V' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, ..., v_i, v'_{i+1}, ..., v'_m) & \longmapsto & ** \end{array}$$

*siendo ** igual*

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1(v_1) & \dots & \lambda_1(v_i) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_i(v_1) & \dots & \lambda_i(v_i) \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha'_{i+1}(v'_{i+1}) & \dots & \alpha'_m(v'_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{i+1}(v'_m) & \dots & \alpha'_m(v'_m) \end{bmatrix}$$

de esta forma definimos el isomorfismo como determinante por permanente.

El Teorema 3.3 quedará demostrado en cuanto demostremos el siguiente:

Lema 3.7. *Con los isomorfismos de la Observación 3.6 y las aplicaciones definidas en los enunciados de los Teoremas 3.1 y 3.3 se tiene un diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^m V'^* \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & V^* \otimes S^{m-1} V'^* \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & Mult(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{m-sim}) \arrow[r] & Mult(V, \underbrace{V' \times \cdots \times V'}_{m-1 sim}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \bigwedge^{m-2} V^* \otimes S^2 V'^* \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \bigwedge^{m-1} V^* \otimes V'^* \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & {} \\
\cdots \arrow[r] & Mult(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{m-2-antisim}, Sim(V', V')) \arrow[r] & Mult(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{m-1-antisim}, V') \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \bigwedge^{m} V^* \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \bigwedge^{m} V''^* \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
{} \arrow[r] & Mult(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{m-antisim}) \arrow[r] & Mult(\underbrace{V'' \times \cdots \times V''}_{m-antisim}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demostración. Tenemos que demostrar para cada i la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^{i-1} V^* \otimes S^{m-i+1} V'^* \arrow[r, "p_3"] \arrow[d, "\cong p_1"] & \bigwedge^{i} V^* \otimes S^{m-i} V'^* \arrow[r] \arrow[d, "\cong p_4"] & {} \\
Mult(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{i-1-antisim} \underbrace{V' \times \cdots \times V'}_{m-i+1-sim}) \arrow[r, "p_2"] & Mult(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{i-antisim}) \underbrace{V' \times \cdots \times V'}_{m-i-sim}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

donde p_1 y p_4 son los isomorfismos de la Observación 3.6, p_2 es el homomorfismo del Teorema 3.1 y p_3 es el homomorfismo del Teorema 3.3

Para ver que conmuta el diagrama comprobamos que $p_2 \circ p_1 = p_4 \circ p_3$

Definimos el isomorfismo p_1:

Para $(\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_{i-1}) \otimes (\alpha'_i \cdots \alpha'_m) \in \bigwedge^{i-1} V^* \otimes S^{m-i+1} V'^*$

$$\begin{array}{rcl} \bigwedge^{i-1} V \times S^{m-i+1}V' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, ..., v_{i-1}, v'_i, ..., v'_m) & \longmapsto & ** \end{array}$$

siendo ** igual

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1(v_1) & \dots & \lambda_1(v_{i-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i-1}(v_1) & \dots & \lambda_{i-1}(v_{i-1}) \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha'_i(v'_i) & \dots & \alpha'_m(v'_i) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_i(v'_m) & \dots & \alpha'_m(v'_m) \end{bmatrix}$$

Definimos p_2:

Para $\Lambda \in Mult(\bigwedge^{i-1} V, S^{m-i+1}V')$, definimos $\lambda \in Mult(\bigwedge^{i} V, S^{m-i}V')$ de la siguiente forma

$$\lambda(v_1, ..., v_i, v'_{i+1}, ...v'_m) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} \Lambda(v_1, ..., \hat{v}_j, ..., v_i, \varphi(v_j), v'_{i+1}, ..., v'_m)$$

Luego $p_2 \circ p_1((\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_{i-1}) \otimes (\alpha'_i \cdots \alpha'_m)) =$

$$= \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} \lambda_1(v_1) & \dots & \lambda_1(v_{j-1}) & \lambda_1(v_{j+1}) & \dots & \lambda_1(v_i) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i-1}(v_1) & \dots & \lambda_{i-1}(v_{j-1}) & \lambda_{i-1}(v_{j+1}) & \dots & \lambda_{i-1}(v_i) \end{vmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \alpha'_i(\varphi(v_j)) & \alpha'_{i+1}(\varphi(v_j)) & \dots & \alpha'_m(\varphi(v_j)) \\ \alpha'_i(v'_{i+1}) & \alpha'_{i+1}(v'_{i+1}) & \dots & \alpha'_m(v'_{i+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_i(v'_m) & \alpha'_{i+1}(v'_m) & \dots & \alpha'_m(v'_m) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} \lambda_1(v_1) & \dots & \lambda_1(v_{j-1}) & \lambda_1(v_{j+1}) & \dots & \lambda_1(v_i) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i-1}(v_1) & \dots & \lambda_{i-1}(v_{j-1}) & \lambda_{i-1}(v_{j+1}) & \dots & \lambda_{i-1}(v_i) \end{vmatrix}$$

$$\cdot \sum_{p=i}^{m} \underbrace{\alpha'_p(\varphi(v'_j))}_{\varphi^*(\alpha'_p)(v'_j)} \begin{bmatrix} \alpha'_i(v'_{i+1}) & \dots & \alpha'_{p-1}(v'_{i+1}) & \alpha'_{p+1}(v'_{i+1}) & \dots & \alpha'_m(v'_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_i(v'_m) & \dots & \alpha'_{p-1}(v'_m) & \alpha'_{p+1}(v'_m) & \dots & \alpha'_m(v'_m) \end{bmatrix}$$

Por otro lado tenemos

Definimos el isomorfismo p_4:

Para $(\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_i) \otimes (\alpha'_{i+1} \cdots \alpha'_m) \in \bigwedge^i V^* \otimes S^{m-i} V'^*$

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^i V \times S^{m-i} V' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, ..., v_i, v'_{i+1}, ..., v'_m) & \longmapsto & ** \end{array}$$

siendo ** igual

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1(v_1) & \dots & \lambda_1(v_i) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_i(v_1) & \dots & \lambda_i(v_i) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha'_{i+1}(v'_{i+1}) & \dots & \alpha'_m(v'_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{i+1}(v'_m) & \dots & \alpha'_m(v'_m) \end{vmatrix}$$

Definimos p_3:

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{i-1} V^* \otimes S^{m-i+1} V'^* & \longrightarrow & \bigwedge^i V^* \otimes S^{m-i} V'^* \\ (\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_{i-1}) \otimes (\alpha'_i \cdots \alpha'_m) & \longmapsto & \sum_{p=i}^m (\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_{i-1} \wedge \varphi^*(\alpha'_j)) \otimes (\alpha'_i \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \alpha'_m) \end{array}$$

Luego $p_4 \circ p_3((\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_{i-1}) \otimes (\alpha'_i \cdots \alpha'_m)) =$

$$= \sum_{p=i}^m \begin{vmatrix} \lambda_1(v_1) & \dots & \lambda_1(v_i) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i-1}(v_1) & \dots & \lambda_{i-1}(v_i) \\ \varphi^*(\alpha'_p)(v_1) & \dots & \varphi^*(\alpha'_p)(v_i) \end{vmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \alpha'_i(v'_{i+1}) & \dots & \alpha'_{p-1}(v'_{i+1}) & \alpha'_{p+1}(v'_{i+1}) & \dots & \alpha'_m(v'_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_i(v'_m) & \dots & \alpha'_{p-1}(v'_m) & \alpha'_{p+1}(v'_m) & \dots & \alpha'_m(v'_m) \end{bmatrix} =$$

desarrollando el determinante por la ultima fila nos queda:

$$= \sum_{p=i}^m \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} \lambda_1(v_1) & \dots & \lambda_1(v_{j-1}) & \lambda_1(v_{j+1}) & \dots & \lambda_1(v_i) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i-1}(v_1) & \dots & \lambda_{i-1}(v_{j-1}) & \lambda_{i-1}(v_{j+1}) & \dots & \lambda_{i-1}(v_i) \end{vmatrix}$$

$$\cdot \varphi^*(\alpha'_p)(v'_j) \begin{bmatrix} \alpha'_i(v'_{i+1}) & \dots & \alpha'_{p-1}(v'_{i+1}) & \alpha'_{p+1}(v'_{i+1}) & \dots & \alpha'_m(v'_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_i(v'_m) & \dots & \alpha'_{p-1}(v'_m) & \alpha'_{p+1}(v'_m) & \dots & \alpha'_m(v'_m) \end{bmatrix}$$

Efectivamente tenemos los mismos sumandos en ambas expresiones y el signo coincide luego $p_2 \circ p_1 = p_4 \circ p_3$ y por tanto el diagrama conmuta $\square$

3.2. Lema de la serpiente

Terminamos esta sección recordando el Lema de la serpiente, que dice:

Lema 3.8. *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Dado un diagrama conmutativo de R-módulos con filas exactas:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "h"] & N \arrow[r, "\psi"] & N'' & \\ & M' \arrow[u, "f'"] \arrow[r, "\phi"] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[u, "f''"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

existe una aplicación δ en el diagrama inducido siguiente

$$\begin{tikzcd} & 0 & 0 & 0 & \\ & coker(f') \arrow[u] \arrow[r, "\bar{h}"] & coker(f) \arrow[u] \arrow[r, "\bar{\psi}"] & coker(f'') \arrow[u] & \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[u, "\pi_{f'}"] \arrow[r, "h"] & N \arrow[u, "\pi_f"] \arrow[r, "\psi"] & N'' \arrow[u, "\pi_{f''}"] & \\ & M' \arrow[u, "f'"] \arrow[r, "\phi"] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[u, "f''"] \arrow[r] & 0 \\ & ker(f') \arrow[u, "i_{f'}"] \arrow[r, "\bar{\phi}"] & ker(f) \arrow[u, "i_f"] \arrow[r, "\bar{g}"] & ker(f'') \arrow[u, "i_{f''}"] & \\ & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde i es la aplicación inclusión canónica, π es la aplicación proyección canónica y $\delta : ker(f'') \to coker(f')$ es tal que la sucesión siguiente es exacta

$$ker(f') \xrightarrow{\bar{\phi}} ker(f) \xrightarrow{\bar{g}} ker(f'') \xrightarrow{\delta} coker(f') \xrightarrow{\bar{h}} coker(f) \xrightarrow{\bar{\psi}} coker(f'')$$

y cualquier sección del diagrama es conmutativo. Además se verifica que:

1. *Si la aplicación ϕ es inyectiva, entonces $\bar{\phi}$ también es inyectiva.*

2. *Si la aplicación ψ es suprayectiva, entonces $\bar{\psi}$ también es suprayectiva.*

4. Fibrados vectoriales

En esta sección recordaremos algunas nociones sobre fibrados vectoriales. En la subsección 4.1 recordaremos algunas definiciones y propiedades de los fibrados vectoriales y en la subsección 4.2 recordaremos algunas nociones sobre los fibrados universales.

4.1. Definiciones

Definición 4.1. *Un fibrado vectorial de rango r de una variedad X sobre $\mathbb{K}$ es una variedad F con un morfismo $F \xrightarrow{\pi} X$ tal que*

- *existe un recubrimiento de X, $X = \bigcup U_i$*
- *$\forall\ i\ \exists \psi_i : \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{K}^r$ y el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, "\pi"] & U_i \times \mathbb{K}^r \arrow[dl] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

- *Además se tiene que $\forall i, j$:*

$$\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{K}^r \supseteq \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \subseteq \pi^{-1}(U_j) \cong U_i \times \mathbb{K}^r$$

y por la equivalencia anterior tendríamos:

$$\pi^{-1}(U_i \cap U_j) \cong (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r$$

y $\exists A_{ij}$ matriz $r \times r$ con elementos en $\vartheta_X(U_i \cap U_j)$ tal que:

$$\begin{array}{lcl} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r & \longrightarrow \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \\ (x, v) & \longmapsto & (x, A_{ij}(x) \cdot v) \end{array}$$

Observación 4.2. *Hay una equivalencia entre la categoría de fibrados vectoriales y haces localemente libres sobre esquemas de tipo finito. Trataremos a la par fibrados y haces, los distinguiremos por el tipo de letra: si F es un fibrado entonces $\mathcal{F}$ será su haz correspondiente*

Definición 4.3. *Sea X es una variedad lisa que tiene un fibrado cotangente Ω_X (localmente libre, de rango igual a la dimensión de X y generado por las diferenciales), $Y \subseteq X$ subvariedad lisa y $\Omega_{X|Y}$ haz de las diferenciales de X restringido a Y , entonces existe el epimorfismo siguiente*

$$\Omega_{X|Y} \to \Omega_Y$$

que consiste en la restricción de las diferenciales.

De esta forma

- *Se llama fibrado conormal de Y en X ,$N^*_{Y|X}$, al núcleo del epimorfismo anterior.*
- *Se llama fibrado normal de Y en X, $N_{Y|X}$,al dual del fibrado conormal.*

Por tanto se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to N^*_{Y|X} \to \Omega_{X|Y} \to \Omega_Y \to 0$$

Observación 4.4. *Existe una sucesión exacta llamada sucesión de Euler:*

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n}(1) \to \vartheta^{n+1}_{\mathbb{P}^n} \to \vartheta_{\mathbb{P}^n}(1) \to 0$$

que se denota identificando $\Omega_{\mathbb{P}^n}(1)$ como el nucleo del morfismo $\vartheta^{n+1}_{\mathbb{P}^n} \to \vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)$. Esta identificación en el abierto $x_i \neq 0$ se define como:

$$d(\frac{x_k}{x_i}) = (0, \ldots, 0, \underbrace{-\frac{x_k}{x_i^2}}_{(i)}, 0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{x_i}}_{(k)}, 0, \ldots, 0)$$

Ejemplo 4.5. *Para $X{=}\mathbb{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1} = \mathbb{P}$ y $Y{=}\mathbb{G}(k,n) = \mathbb{G}$, para hallar los elementos de $\Omega_{\mathbb{P}}$ procedemos de la misma forma que para k=0 que es la observación 4.4*

Para nuestro ejemplo la sucesión de Euler es la siguiente:

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \to \vartheta_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}(-1)^{\binom{n+1}{k+1}} \to \vartheta_{\mathbb{G}} \to 0$$

y los elementos de $\Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}$ son de la forma$d(\frac{q_{j_0 \ldots j_k}}{q_{i_0 \ldots i_k}})$ donde

$$d(\frac{q_{j_0 \ldots j_k}}{q_{i_0 \ldots i_k}}) = (0, \ldots, 0, \underbrace{-\frac{p_{j_0 \ldots j_k}}{p^2_{i_0 \ldots i_k}}}_{(i_0 \ldots i_k)}, 0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{p_{i_0 \ldots i_k}}}_{(j_0 \ldots j_k)}, 0, \ldots, 0)$$

Además por la definición anterior se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} \to \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \to \Omega_{\mathbb{G}} \to 0$$

Proposición 4.6. *Sea F un fibrado vectorial de rango r sobre un X arbitrario. Se tiene que $F^* \cong \bigwedge^{r-1} F$.*

Demostración. Como F es un fibrado vectorial de rango r, tenemos la aplicación no degenerada siguiente,

$$F \otimes \bigwedge^{r-1} F \to \bigwedge^{r} F$$

Como $\bigwedge^r F = \vartheta_X$ entonces tenemos la siguiente aplicación bilineal

$$F \otimes \bigwedge^{r-1} F \to \vartheta_X$$

y por tanto

$$F \otimes \bigwedge^{r-1} F \to \vartheta_X$$

sigue siendo una aplicación no degenerada. Entonces se verifica que el dual del primer elemento del producto es isomorfo al segundo elemento del producto, es decir $F^* \cong \bigwedge^{r-1} F$. $\square$

4.2. Fibrados Universales

Usaremos la notación y los conceptos dados en [1].

Sea $\mathbb{G} = \mathbb{G}(k,n)$. Consideremos $\Lambda \in \mathbb{G}$ como un subespacio lineal k-dimensional de $\mathbb{P}(V)$ o como un subespacio $(k+1)$-dimensional del espacio de vectores V^*. Según el punto de vista que tomemos tenemos dos diagramas donde las aplicaciones son proyecciones naturales:

$$\begin{tikzcd} & I = \{(p,\Lambda) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{G} | p \in \Lambda\} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathbb{P}(V) & & \mathbb{G} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & Q^* = \{(v,\Lambda) \in V^* \times \mathbb{G} | v \in \Lambda\} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ V^* & & \mathbb{G} \end{tikzcd}$$

El segundo diagrama da a Q^* una estructura de fibrado vectorial sobre $\mathbb{G}$. Es más, Q^* es un subfibrado vectorial del fibrado trivial $V^* \times \mathbb{G}$. De aquí podemos considerar el cociente

$$V^* \times \mathbb{G}/Q^*$$

que llamaremos fibrado vectorial cociente, S.

Podemos asociar a los fibrados Q^* y S su haz localmente libre correspondiente sobre $\mathbb{G}$: $\mathcal{Q}^*$ y $\mathcal{S}$. Dualizando obtenemos la *sucesión exacta universal* sobre $\mathbb{G}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^* \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

Definición 4.7. *Los haces $\mathcal{S}^*$ y $\mathcal{Q}$ de la sucesión anterior se llaman subfibrado universal (de rango $n-k$) y cociente subfibrado universal (de rango $k+1$) respectivamente.*

Notación 4.8. *Llamaremos fibrados universales a los haces localmente libres correspondientes. La notación es consistente si miramos los espacios grassmannianos como el espacio de cocientes de V. Puede no ser notación estándar pero preferimos que S y Q tengan el mismo comportamiento al dualizar. Esto es así porque tenemos la siguiente identificación $\mathbb{G}(k,\mathbb{P}^n) \approx \mathbb{G}(n-k-1,\mathbb{P}^{n*})$. Y entonces la sucesión exacta para $\mathbb{G}(n-k-1,\mathbb{P}^{n*})$ es la dual de la sucesión anterior. De esta forma podemos intercambiar los fibrados de S y Q.*

Al intercambiar de forma libre las nociones de haz localmente libre y fibrado vectorial tenemos que:

- *mirando como fibrado vectorial, el fibrado universal cociente puede ser interpretado como el dual del subfibrado Q^* del fibrado vectorial trivial $\mathbb{G} \times V^*$, $Q^* = \{(\Lambda, v)$ tal que $v \in \vec{\Lambda} quedefine \Lambda\}$*

  Además se verifica que $Q|_{U_{i_0 \dots i_k}}$ viene generado por los siguientes vectores definidos en la sección 2.2
  $Q|_{U_{i_0 \dots i_k}} =< w^*_{i_0 \dots i_{k-1}}, \dots, w^*_{i_1 \dots i_k} >$ *y* $Q^*|_{U_{i_0 \dots i_k}} =< w^*_{i_0 \dots i_{k-1}}, \dots, w^*_{i_1 \dots i_k} >^*$

- *también consideramos el fibrado vectorial universal $S := \mathbb{G} \times V^*/Q^*$ que puede ser interpretado como el dual del subfibrado de $\mathbb{G} \times V$ que consiste en $S^* = \{(\Lambda, H)$ tal que H se anula en $\Lambda\}$*

  Además se verifica que $S|_{U_{i_0 \dots i_k}}$ viene generado por alguno de las formas lineales $H_{i_0 \dots i_k j_0}$ definidas en la sección 2.2

$$S^*|_{U_{i_0 \dots i_k}} =< H_{i_0 \dots i_k j_0}, \quad j_0 = 0, \dots, n, \quad j_0 \neq i_0 \dots i_k >$$

Un modo alternativo de construir fibrados universales es considerar en $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ la sucesión de Euler

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \vartheta_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow 0$$

levantándola a I mediante p y bajándola a $\mathbb{G}$ mediante q. Así tendríamos :

- $\mathcal{S}^* = q_* p^*(\Omega_{\mathbb{P}^n}(1))$
- $\mathcal{Q} = q_* p^*(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))$

Observación 4.9. *En $\mathbb{G}(0, n) = \mathbb{P}^n$, la sucesión exacta universal coincide con la sucesión de Euler y $\mathcal{Q} = \vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)$ y $\mathcal{S} = \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, es decir, $\Omega_{\mathbb{P}^n}(1) \cong \mathcal{S}^* \otimes \mathcal{Q}^*$. En $\mathbb{G}(n-1, n) = \mathbb{P}^{n*}$, tenemos que $\mathcal{Q} = \mathcal{T}_{\mathbb{P}^{n*}}(-1)$ y $\mathcal{S} = \vartheta_{\mathbb{P}^{n*}}(1)$.*

De las identificacones de $\mathcal{S}^*$ y $\mathcal{Q}$ con las proyecciones p y q se sigue que $H^0(\mathbb{G}, \mathcal{Q}) = V$ y considerando los duales, $H^0(\mathbb{G}, \mathcal{S}) = V^*$. En particular:

- dar una sección no nula de $\mathcal{Q}$ es lo mismo que dar un hiperplano de $\mathbb{P}^n$ (salvo constantes)
- dar una sección no nula de $\mathcal{S}$ es lo mismo que dar un punto en $\mathbb{P}^n$ (salvo constantes)

Más en general, tomamos $s_0, \dots, s_r$ $r+1$ secciones independietes de $\mathcal{S}$. Generan un subespacio lineal $W \subseteq V^*$ de dimensión $r+1$ que define un r-plano $\Omega \subseteq \mathbb{P}^n$. Consideramos el siguiente diagrama conmuitativo de sucesiones exactas de fibrados vectoriales:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & W \times \mathbb{G} \arrow[d] \arrow[dr, "s"] & & \\
0 \arrow[r] & Q^* \arrow[r] & V^* \times \mathbb{G} \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[r] & 0 \\
 & & V^*/W \times \mathbb{G} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde s está definido por las secciones $s_0, \ldots, s_r$ dadas de $\mathcal{S}$. Queremos estudiar cuándo

$$s : \quad W \times \mathbb{G} \quad \longrightarrow \quad S$$

o su asociada

$$W \times \vartheta_{\mathbb{G}} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{S}$$

no es inyectiva.

Del diagrama tenemos que un elemento $(w, \Lambda) \in W \times \mathbb{G}$ va a 0 por s si y sólo si su imagen en $V^* \times \mathbb{G}$ está en $\mathcal{Q}^*$ y ésto ocurre si y sólo si $w \in \Lambda$. Ésto quiere decir que s no es inyectiva en la fibra de Λ si y sólo si Λ tiene intersección no nula con W.

Así tenemos que el conjunto donde s es degenerada localmente coincide con el conjunto de k-planos $\Lambda \in \mathbb{P}^n$ tal que Λ corta a Ω. (Tenemos un resultado análogo para las secciones de $\mathcal{Q}$). Todo ésto se resume en la siguiente proposición.

Proposición 4.10. *Tenemos las identificaciones naturales $H^0(\mathbb{G}, \mathcal{Q}) = V$ y $H^0(\mathbb{G}, \mathcal{S}) = V^*$. Bajo estas identificaciones, s secciones independientes de $\mathcal{Q}$ corresponden con un subespacio lineal $A \subseteq \mathbb{P}^n$ de codimensión s.*

Si $s \leq k+1$, el conjunto de dependencia local de las secciones coincide con el conjunto de k-planos que cortan a A en dimensión al menos $k-s+1$.

Análogamente, $r+1$ secciones independientes de $\mathcal{S}$ corresponden con un subespacio lineal $B \subseteq \mathbb{P}^n$ de dimensión r.

Si $r+1 \leq n-k$, el conjunto de dependencia local de las secciones coincide con el conjunto de k-planos que cortan a B.

Si tomamos $s = k+1$ y $r+1 = n-k$, entonces tenemos el mismo conjunto de dependencia local que coincide con el conjunto de k-planos que cortan a un $(n-k-1)$-plano fijado ya que tenemos la siguiente identificación de haces invertibles $\bigwedge^{k+1} \mathcal{Q} \cong \bigwedge^{n-k} \mathcal{S}$ (podemos ver la equivalencia mediante la sucesión exacta universal).

Observación 4.11. *Como este haz invertible es dado por la inmersión de Plücker, lo denotaremos por* $\vartheta_{\mathbb{G}}(1)$.

A continuación daremos una propiedad del fibrado universal Q basado en una proposicion de la subsección 4.1 y utilizando los elementos de la base de Q definidos en 4.2

Observación 4.12. *Se tiene* $Q^* \cong \bigwedge^k Q(-1)$ *y el isomorfismo viene dado por la siguiente aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^k Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \cong & Q^* \\ w^*_{i_0\ldots i_{k-2}i_k} \wedge \cdots \wedge w^*_{i_1\ldots i_k} \otimes a_{\bar{i_0\ldots i_k}} & \longmapsto & w_{i_0 i_1 \ldots i_{k-1}} \\ w^*_{i_0\ldots i_{k-1}} \wedge w_{i_0\ldots i_{k-3}i_{k-1}i_k} \wedge \cdots \wedge w^*_{i_1\ldots i_k} \otimes a_{\bar{i_0\ldots i_k}} & \longmapsto & -w_{i_0 i_1 \ldots i_{k-2} i_k} \\ \vdots & \longmapsto & \vdots \\ w^*_{i_0,\ldots,i_{k-1}} \wedge \cdots \wedge w^*_{i_0 i_1 \ldots \hat{i_{j-2}} i_{j-1} \ldots i_k} \otimes a_{\bar{i_0\ldots i_k}} & \longmapsto & (-1)^{j+1} w_{i_0 i_1 \ldots \hat{i_{j-1}} \ldots i_k} \\ \vdots & \longmapsto & \vdots \\ w^*_{i_0\ldots i_{k-1}} \wedge \cdots \wedge w^*_{i_0 i_2 \ldots i_k} \otimes a_{\bar{i_0\ldots i_k}} & \longmapsto & (-1)^{k+2} w_{i_1\ldots i_k} \end{array}$$

Finalmente enunciamos una generalización de las Observaciónes 4.4 y 4.9, el isomorfismo entre fibrados universales y haz de las diferenciales $S^* \otimes Q^* \cong \Omega_{\mathbb{G}}$, solo lo enunciamos sin demostrarlo porque la demostración es bastante engorrosa

Proposición 4.13. *Sea* $U_{i_0\ldots i_k}$ *el subconjunto de* $\mathbb{G}$ *que consiste en aquellos subespacios (k+1)-dimensionales donde las coordenadas de Plücker* $p_{i_0\ldots i_k}$ *no son cero. Por una particularización el Ejemplo 4.5 se sabe que* $U_{i_0\ldots i_k}$ *es un conjunto abierto afín de* $\mathbb{G}$ *con coordenadas afines de este tipo* $\frac{q_{i_0\cdots i_{k-1}j_0}}{q_{i_0\cdots i_k}}$*,(con todos los subindices de arriba iguales a los de abajo menos uno), donde* $j_0 = 0, \ldots, \hat{i_0}, \ldots, \hat{i_k}, \ldots, n$*. Entonces existe un isomorfismo*

$$Q^* \otimes S^* \cong \Omega_{\mathbb{G}}$$

determinado en cada $U_{i_0\ldots i_k}$ *por*

$$\begin{array}{ccc} Q^* \otimes S^* & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{G}} \\ (\bar{p}, w_{i_0\ldots i_{k-1}} \otimes H_{i_0\ldots i_k j_0}) & \longmapsto & p^2_{i_0\ldots i_k} d(\frac{q_{i_0\cdots i_{k-1}j_0}}{q_{i_0\cdots i_k}}) \end{array}$$

donde $\bar{p}$ *son las coordenadas de Plücker de un elemento de* $U_{i_0\ldots i_k}$.

5. Fibrado conormal de la grassmaniana

En esta sección hallaremos la resolución del fibrado conormal de la grassmaniana. En concreto demostraremos el resultado principal de esta investigación. Para ello nos apoyamos en [2] y en la idea de sección 5.1 de [5]

Teorema 5.1. *El fibrado conormal $N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}}$ de la grassmaniana $\mathbb{G}(k,n) = \mathbb{G}$, admite la siguiente resolución:*

$$0 \longrightarrow F_{k+1}(S^*) \longrightarrow V \otimes F_k(S^*) \longrightarrow \bigwedge^2 V \otimes F_{k-1}(S^*) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{k-i} V \otimes F_{i+1}(S^*) \longrightarrow \bigwedge^{k-i+1} V \otimes F_i(S^*) \longrightarrow \cdots$$
$$\longrightarrow \bigwedge^{k-2} V \otimes F_3(S^*) \longrightarrow \bigwedge^{k-1} V \otimes F_2(S^*) \longrightarrow N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} \longrightarrow 0$$

donde $F_i(S^*) = (S^* \otimes S^{i-1}S^*/S^iS^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$

Observación 5.2. *Para el caso k =1 la expresión del fibrado conormal coincide con la expresión a la que se llegó en [5]*

Partiendo de la resolución anterior para el caso particular k=1 nos queda la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow F_2(S^*) \longrightarrow N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} \longrightarrow 0$$

Por lo tanto la expresión del fibrado conormal es $N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} = F_2(S^*) = (S^* \otimes S^*/S^2S^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) = \bigwedge^2 S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$ *luego efectivamente coinciden .*

5.1. Demostración del Teorema principal

Para demostrar el Teorema 5.1 demostraremos una serie de lemas y proposiciones a continuación. Primero de todo formaremos un diagrama conmutativo partiendo de la sucesión enunciada en la Definición 4.3

$$0 \to N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} \to \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \to \Omega_{\mathbb{G}} \to 0$$

Hallaremos dos resoluciones una para $\Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}$(Lema 5.3) y la otra para $\Omega_{\mathbb{G}}$(Lema 5.4). Estas resoluciones son sucesiones de Eagon-Northcott(Teorema 3.3)

Lema 5.3. *La siguiente sucesión es exacta*

$$0 \longrightarrow S^{k+1}S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^kS^* \longrightarrow \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^{k-1}S^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{k-i} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^{i+1}S^* \longrightarrow \bigwedge^{k+1-i} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^iS^* \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \longrightarrow 0$$

Demostración. Para hallar la resolución para $\Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}$ partimos de la sucesión exacta universal(vista en la sección 4.2)

$$0 \longrightarrow S^* \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Aplicamos esta sucesión a la siguiente sucesión de Eagon-Northcott, la cual hemos probado en Teorema 3.3 que es exacta:

$$0 \longrightarrow S^mV'^* \longrightarrow V^* \otimes S^{m-1}V'^* \longrightarrow \bigwedge^2 V^* \otimes S^{m-2}V'^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{m-i-1} V^* \otimes S^{i+1}V'^* \longrightarrow \bigwedge^{m-i} V^* \otimes S^iV'^* \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow V'^* \otimes \bigwedge^{m-1} V^* \longrightarrow \bigwedge^m V^* \longrightarrow \bigwedge^m V''^* \longrightarrow 0$$

Aplicamos el caso m=k+1, con lo cual nos quedaría la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow S^{k+1}S^* \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^kS^* \longrightarrow \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^{k-1}S^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{k-i} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^{i+1}S^* \longrightarrow \bigwedge^{k+1-i} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^iS^* \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \longrightarrow \underbrace{\bigwedge^{k+1} V}_{\vartheta_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}^{\binom{n+1}{k+1}}} \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \longrightarrow \underbrace{\bigwedge^{k+1} Q}_{\vartheta_{\mathbb{G}}(1)} \longrightarrow 0$$

Unimos esta sucesión en la parte final con la sucesión de Euler(vista en la sección 4.3) para la grassmaniana $\mathbb{G}(k,n)$

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}(1) \longrightarrow \vartheta_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}^{\binom{n+1}{k+1}} \longrightarrow \vartheta_{\mathbb{G}}(1) \longrightarrow 0$$

Así tendríamos:

$$0 \longrightarrow S^{k+1}S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^k S^* \longrightarrow \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^{k-1}S^* \longrightarrow \cdots$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \quad \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^* & & \longrightarrow & & \underbrace{\bigwedge^{k+1} V}_{\vartheta_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}^{\binom{n+1}{k+1}}} \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} & \rightarrow & \underbrace{\bigwedge^{k+1} Q}_{\vartheta_{\mathbb{G}}(1)} \rightarrow \quad 0 \\
& \searrow & & \nearrow & & & \\
& & \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}(1) & & & & \\
& \nearrow & & \searrow & & & \\
0 & & & & 0 & &
\end{array}$$

Multiplicamos tensorialmente por $\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$ y obtenemos una sucesión que sigue siendo exacta y es la resolución que buscabamos

$$0 \longrightarrow S^{k+1}S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^k S^* \longrightarrow \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^{k-1}S^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{k+1-i-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^{i+1}S^* \longrightarrow \bigwedge^{k+1-i} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^i S^* \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \longrightarrow 0$$

□

Lema 5.4. *La siguiente sucesión es exacta*

$$0 \longrightarrow S^* \otimes S^k S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow S^* \otimes V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^{k-1}S^* \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^{k-2}S^* \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^{k-i-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^{i+1}S^* \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^{k-i} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^i S^* \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^{k-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^k Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) = S^* \otimes Q^* \longrightarrow 0$$

Demostración. Para hallar la resolución para $\Omega_{\mathbb{G}} \cong S^* \otimes Q^*$ partimos de la sucesión exacta universal(vista en la sección 4.2)

$$0 \longrightarrow S^* \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Aplicamos esta sucesión a la siguiente sucesión de Eagon-Northcott, la cual hemos probado en Teorema 3.3 que es exacta:

$$0 \longrightarrow S^m V'^* \longrightarrow V^* \otimes S^{m-1} V'^* \longrightarrow \bigwedge^2 V^* \otimes S^{m-2} V'^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{m-i-1} V^* \otimes S^{i+1} V'^* \longrightarrow \bigwedge^{m-i} V^* \otimes S^i V'^* \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow V'^* \otimes \bigwedge^{m-1} V^* \longrightarrow \bigwedge^m V^* \longrightarrow \bigwedge^m V''^* \longrightarrow 0$$

Aplicando el caso m=k nos quedaria la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow S^k S^* \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^{k-1} S^* \longrightarrow \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^{k-2} S^* \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{k-i-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^{i+1} S^* \longrightarrow \bigwedge^{k-i} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^i S^* \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^{k-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \longrightarrow \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \longrightarrow \underbrace{\bigwedge^k Q}_{Q^*(1)} \longrightarrow 0$$

Multiplicamos tensorialmente por $S^*(-1)$ y la sucesión que nos queda sigue siendo exacta y es la resolución que buscabamos:

$$0 \longrightarrow S^* \otimes S^k S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow S^* \otimes V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^{k-1} S^* \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^2 V \times \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^{k-2} S^* \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^{k-i-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^{i+1} S^* \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^{k-i} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^i S^* \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^{k-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow S^* \otimes \bigwedge^k Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) = S^* \otimes Q^* \longrightarrow 0$$

□

A continuación relacionaremos estas dos resoluciones mediante el siguiente lema. Más adelante lo utilizaremos en la demostración de la proposición 5.7

Lema 5.5. *Partiendo de la siguiente sucesión exacta de espacios vectoriales*

$$0 \longrightarrow W' \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\beta} W'' \longrightarrow 0$$

entonces $\forall$ *i el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} S^{i+1}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i} W^* + \arrow[r, "p_2"] & W''^* \otimes S^iW''^* \otimes \bigwedge^{k-i} W^* \\ S^{i+2}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i-1} W^* \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_4"] & W''^* \otimes S^{i+1}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i-1} W^* \arrow[u, "p_3"'] \end{tikzcd}$$

donde p_1 *y* p_3 *están definidas como en el Teorema 3.3 y* p_2 *y* p_4 *están defnidos de la siguiente forma*

Definimos p_2 *como:*

$$\begin{array}{llcl} p_2: & S^{i+1}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i} W^* & \longrightarrow & W''^* \otimes S^iW''^* \otimes \bigwedge^{k-i} W^* \\ & (\alpha''_1 \cdots \alpha''_{i+1}) \otimes (\lambda_{i+2} \wedge \cdots \wedge \lambda_{k+1}) & \longmapsto & \sum_{r=1}^{i+1} \alpha''_r \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \alpha''_{i+1}) \otimes \\ & & & \otimes (\lambda_{i+2} \wedge \cdots \lambda_{k+1}) \end{array}$$

Definimos p_4 *como:*

$$\begin{array}{llcl} p_4: & S^{i+2}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i-1} W^* & \longrightarrow & W''^* \otimes S^{i+1}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i-1} W^* \\ & (\alpha''_1 \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\lambda_{i+3} \wedge \cdots \lambda_{k+1}) & \longmapsto & \sum_{q=1}^{i+2} \alpha''_q \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes \\ & & & \otimes (\lambda_{i+3} \wedge \cdots \wedge \lambda_{k+1}) \end{array}$$

Demostración. Para ello tenemos que demostrar que $p_2 \circ p_1 = p_3 \circ p_4$

Por un lado tenemos:

$$\begin{array}{llcl} p_1: & S^{i+2}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i-1} W^* & \longrightarrow & S^{i+1}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i} W^* \\ & (\alpha''_1 \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\lambda_{i+3} \wedge \cdots \wedge \lambda_{k+1}) & \longmapsto & \sum_{q=1}^{i+2} (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes \\ & & & \otimes (\varphi^*(\alpha''_q) \wedge \lambda_{i+3} \cdots \wedge \lambda_{k+1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} p_2: & S^{i+1}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i} W^* & \longrightarrow & W''^* \otimes S^iW''^* \otimes \bigwedge^{k-i} W^* \\ & (\alpha''_1 \cdots \alpha''_{i+1}) \otimes (\lambda_{i+2} \wedge \cdots \wedge \lambda_{k+1}) & \longmapsto & \sum_{r=1}^{i+1} \alpha''_r \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \alpha''_{i+1}) \otimes \\ & & & \otimes (\lambda_{i+2} \wedge \cdots \lambda_{k+1}) \end{array}$$

Luego

$$p_2 \circ p_1((\alpha''_1 \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\lambda_{i+3} \wedge \cdots \wedge \lambda_{k+1})) =$$

$$= p_2(\sum_{q=1}^{i+2} (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\varphi^*(\alpha''_q) \wedge \lambda_{i+3} \cdots \wedge \lambda_{k+1})) =$$

$$= \sum_{r=2}^{i+2} \alpha''_r \otimes (\hat{\alpha''_1} \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\varphi^*(\alpha''_1) \wedge \lambda_{i+3} \wedge \cdots \lambda_{k+1})$$

$$+ \sum_{q=2}^{i+1} [\sum_{r=1}^{q-1} \alpha''_r \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\varphi^*(\alpha''_q) \wedge \lambda_{i+3} \wedge \cdots \lambda_{k+1})$$

$$+ \sum_{r=q+1}^{i+2} \alpha''_r \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\varphi^*(\alpha''_q) \wedge \lambda_{i+3} \wedge \cdots \lambda_{k+1})]$$

$$+ \sum_{r=1}^{i+1} (-1)^{i+2} \alpha''_r \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \hat{\alpha''_{i+2}}) \otimes (\varphi^*(\alpha''_{i+2}) \wedge \lambda_{i+3} \wedge \cdots \lambda_{k+1})$$

Y por otro lado tenemos:

$$\begin{array}{llll} p_3 : & W''^* \otimes S^{i+1}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i-1} W^* & \longrightarrow & W''^* \otimes S^i W''^* \otimes \bigwedge^{k-i} W^* \\ & \alpha''_q \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\lambda_{i+3} \wedge \cdots \wedge \lambda_{k+1}) & \longmapsto & \sum_{r=1}^{q-1} \alpha''_q \otimes \\ & & & \otimes(\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes \\ & & & \otimes(\varphi^*(\alpha''_r) \wedge \lambda_{i+3} \wedge \cdots \wedge \lambda_{k+1}) + \\ & & & \sum_{r=q+1}^{k+1} \alpha''_q \otimes \\ & & & \otimes(\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes \\ & & & \otimes(\varphi^*(\alpha''_r) \wedge \lambda_{i+3} \wedge \cdots \wedge \lambda_{k+1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} p_4 : & S^{i+2}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i-1} W^* & \longrightarrow & W''^* \otimes S^{i+1}W''^* \otimes \bigwedge^{k-i-1} W^* \\ & (\alpha''_1 \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\lambda_{i+3} \wedge \cdots \lambda_{k+1}) & \longmapsto & \sum_{q=1}^{i+2} \alpha''_q \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \alpha_{i+2}) \otimes \\ & & & \otimes(\lambda_{i+3} \wedge \cdots \wedge lambda_{k+1}) \end{array}$$

Luego

$$p_3 \circ p_4((\alpha''_1 \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\lambda_{i+3} \wedge \cdots \lambda_{k+1})) =$$

$$= p_3(\sum_{q=1}^{i+2} \alpha''_q \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\lambda_{i+3} \wedge \cdots \wedge \lambda_{k+1})) =$$

$$= \sum_{r=2}^{i+2} \alpha''_1 \otimes (\hat{\alpha''_1} \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\varphi^*(\alpha''_r) \wedge \lambda_{i+3} \wedge \cdots \lambda_{k+1})$$

$$+ \sum_{q=2}^{i+1} [\sum_{r=1}^{q-1} \alpha''_q \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \alpha'_{i+2}) \otimes (\varphi^*(\alpha''_r) \wedge \lambda_{i+3} \wedge \cdots \lambda_{k+1})$$

$$+ \sum_{r=q+1}^{i+2} \alpha''_q \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_q} \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \alpha''_{i+2}) \otimes (\varphi^*(\alpha''_r) \wedge \lambda_{i+3} \wedge \cdots \lambda_{k+1})]$$

$$+\sum_{r=1}^{i+1} \alpha''_{i+2} \otimes (\alpha''_1 \cdots \hat{\alpha''_r} \cdots \alpha''_i \hat{+} 2) \otimes (\varphi^*(\alpha''_r) \wedge \lambda_{i+3} \wedge \cdots \lambda_{k+1})$$

Vemos que efectivamente es lo mismo $p_2 \circ p_1 = p_3 \circ p_4$ ya que q y r se mueven ambos entre 1 y i+2 por lo el diagrama conmuta. $\square$

Corolario 5.6. *El lema anterior funciona tambien para los fibrados vectoriales $F_i(S^*) \forall i = 2...k+1$ definidos el teorema 5.1*

Con estas dos resoluciones del Lema 5.3 y 5.4 formamos el diagrama siguiente:

Proposición 5.7. *El siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & \\
N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} \arrow[r] & \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes Q^* \cong \Omega_{\mathbb{G}} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^2 S^* \otimes \bigwedge^{k-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^* \otimes \bigwedge^{k-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \bigwedge^{k-1} V \otimes F_2(S^*) \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^3 S^* \otimes \bigwedge^{k-2} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^2 S^* \otimes \bigwedge^{k-2} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \bigwedge^{k-2} V \otimes F_3(S^*) \arrow[u] \\
\vdots \arrow[r] \arrow[u] & \vdots \arrow[r] \arrow[u] & \vdots \arrow[r] \arrow[u] & \vdots \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^{k-1} S^* \otimes \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^{k-2} S^* \otimes \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \bigwedge^2 V \otimes F_{k-1}(S^*) \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^k S^* \otimes V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^{k-1} S^* \otimes V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & V \otimes F_k(S^*) \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^{k+1} S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^k S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & F_{k+1}(S^*) \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

donde la primera y la segunda sucesión son las de los lemas 5.3 y 5.4 respectivamente y las sucesiones horizontales son las aplicaciones naturales y de esta forma la tercera sucesión estara formada por los conucleos de dichas sucesiones horizontales

Demostración. Vamos aplicando el lema de la serpiente(Lema 3.8) a cada de estos pequeños diagramas, sabemos que podemos aplicarlo porque cada diagrama conmuta por el lema 5.5 y el corolario 5.6:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & Imf_1' \arrow[r] \arrow[u] & Imf_1 \arrow[r] \arrow[u] & Imf_1'' \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^kS^* \otimes V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^{k-1}S^* \otimes V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & V \otimes F_k(S^*) \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^{k+1}S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^kS^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & F_{k+1}(S^*) \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & Imf_3' & Imf_3 & Imf_3'' \\
0 \arrow[r] & S^{k-2}S^* \otimes \bigwedge^3 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^{k-3}S^* \otimes \bigwedge^3 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \bigwedge^3 V \otimes F_{k-2}(S^*) \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^{k-1}S^* \otimes \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^{k-2}S^* \otimes \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \bigwedge^2 V \otimes F_{k-1}(S^*) \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & kerf_3' \arrow[r] \arrow[u] & kerf_3 \arrow[r] \arrow[u] & kerf_3'' \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

. . . .

$$\begin{tikzcd}
 & Imf'_{k-i+1} & Imf_{k-i+1} & Imf''_{k-i+1} \\
0 \arrow[r] & S^iS^* \otimes \bigwedge^{k-i+1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^{i-1}S^* \otimes \bigwedge^{k-i+1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \bigwedge^{k-i+1} V \otimes F_i(S^*) \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^{i+1}S^* \otimes \bigwedge^{k-i} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^iS^* \otimes \bigwedge^{k-i} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \bigwedge^{k-i} V \otimes F_{i+1}(S^*) \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & kerf'_{k-i+1} \arrow[r] \arrow[u] & kerf_{k-i+1} \arrow[r] \arrow[u] & kerf''_{k-i+1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

. . . .

$$\begin{tikzcd}
 & Imf'_{k-1} & Imf_{k-1} & Imf''_{k-1} \\
0 \arrow[r] & S^2S^* \otimes \bigwedge^{k-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^* \otimes \bigwedge^{k-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \bigwedge^{k-1} V \otimes F_2(S^*) \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^3S^* \otimes \bigwedge^{k-2} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes S^2S^* \otimes \bigwedge^{k-2} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \bigwedge^{k-2} V \otimes F_3(S^*) \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & kerf'_{k-1} \arrow[r] \arrow[u] & kerf_{k-1} \arrow[r] \arrow[u] & kerf''_{k-1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

De forma que estos diagramas se van pegando ya que las sucesiones son exactas, con lo cual en la tercera sucesión vertical se van pegando los conucleos. Por lo tanto tenemos que esta sucesión vertical es exacta hasta $\bigwedge^{k-1} V \otimes F_2(S^*)$. Para comprobar que es exacta veremos el siguiente y último diagrama que estudiaremos en el siguiente lema 5.8 y que por tanto pondra fin a la demostración de esta Proposición 5.7. □

Lema 5.8. *El siguiente diagrama de sucesiones exactas es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & \\
N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} \arrow[r] & \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes Q^* \cong \Omega_{\mathbb{G}} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & ker f'_{k+1} \arrow[r] \arrow[u] & ker f_{k+1} \arrow[u] & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. El diagrama central inferior conmuta por definición.

A continuación probaremos la conmutatividad del diagrama central superior:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \arrow[r, "\varphi_1"] & \Omega_{\mathbb{G}} \cong S^* \otimes Q^* \\
S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r, "="] \arrow[u, "\varphi_4"] & S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[u, "\varphi_2"']
\end{tikzcd}$$

Para esto estudiaremos cada aplicación por separado y de forma local, trabajaremos en los abiertos $U_{i_0 i_1 \dots i_k}$

1. $\varphi_1 : \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \to \Omega_{\mathbb{G}} \cong S^* \otimes Q^*$

   Esta aplicación viene de la sucesión mencionada en la subsectión 4.1

   $$0 \to N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} \to \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \to \Omega_{\mathbb{G}} \to 0$$

   Sabemos que $\Omega_{\mathbb{G}}$ está generado por las diferenciales del tipo $d(\frac{q_{i_0 \dots i_{k-1} j_0}}{q_{i_0 \dots i_k}})$ (es decir, los subíndices del numerador todos iguales menos uno a los subíndices del denominador, habra $\binom{k+1}{k}(n-k)$ (estas diferenciales tambien son elementos de $\Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}$).

   Faltaría dar la imagen de $d(\frac{q_{j_0 \dots j_k}}{q_{i_0 \dots i_k}})$. Para ello usaremos la relación de Plücker ya conocida,

   $$p_{i_0 \dots i_k} p_{j_0 \dots j_k} - p_{i_0 \dots i_{k-1} j_0} p_{i_k j_1 \dots j_k} + p_{i_0 \dots i_{k-2} i_k j_0} p_{i_{k-1} j_1 \dots j_k} -$$
   $$\cdots (-1)^{k+1} p_{i_1 \dots i_k j_0} p_{i_0 j_1 \dots j_k} = 0$$

y de aquí obtenemos una relación entre las diferenciales,

$$d(\frac{q_{j_0\ldots j_k}}{q_{i_0\ldots i_k}}) = \frac{p_{i_0\ldots i_{k-1}j_0}}{p_{i_0..i_k}}d(\frac{q_{i_kj_1..j_k}}{q_{i_0\ldots i_k}}) + \frac{q_{i_kj_1\ldots j_k}}{q_{i_0\ldots i_k}}d(\frac{q_{i_0\ldots i_{k-1}j_0}}{q_{i_0\ldots i_k}})$$

$$-\frac{p_{i_0\ldots i_{k-2}i_kj_0}}{p_{i_0\ldots i_k}}d(\frac{q_{i_{k-1}j_1\ldots j_k}}{q_{i_0\ldots i_k}}) - \frac{p_{i_{k-1}j_1\ldots j_k}}{p_{i_0\ldots i_k}}d(\frac{q_{i_0\ldots i_{k-2}i_kj_0}}{q_{i_0\ldots i_k}})$$

$$+\cdots(-1)^{k+2}\frac{p_{i_1\ldots i_kj_0}}{p_{i_0..i_k}}d(\frac{q_{i_0j_1..j_k}}{q_{i_0\ldots i_k}}) + (-1)^{k+2}\frac{p_{i_0j_1\ldots j_k}}{p_{i_0\ldots i_k}}d(\frac{q_{i_1\ldots i_kj_0}}{q_{i_0\ldots i_k}})$$

Usamos también el isomorfismo $\Omega_{\mathbb{G}} \cong S^* \otimes Q^*$ definido en la proposición 4.10 de la subsección 4.2

Así tendríamos que:

$$\begin{array}{rccl}
\varphi_1 : & \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{G}} \cong S^* \otimes Q^* \\
& d(\frac{q_{i_0\cdots i_{k-1}j_0}}{q_{i_0\cdots i_k}}) & \longmapsto & d(\frac{q_{i_0\cdots i_{k-1}j_0}}{q_{i_0\cdots i_k}}) \cong (w_{i_0\ldots i_{k-1}} \otimes H_{i_0\ldots i_kj_0})\frac{1}{p^2_{i_0\cdots i_k}} \\
& d(\frac{q_{j_0\cdots j_k}}{q_{i_0\cdots i_k}}) & \longmapsto & \frac{p_{i_0\cdots i_{k-1}j_0}}{p_{i_0..i_k}}d(\frac{q_{i_kj_1..j_k}}{q_{i_0\cdots i_k}}) + \frac{p_{i_kj_1\cdots j_k}}{p_{i_0\cdots i_k}}d(\frac{q_{i_0\cdots i_{k-1}j_0}}{q_{i_0\cdots i_k}}) \\
& & & -\frac{p_{i_0\cdots i_{k-2}i_kj_0}}{p_{i_0..i_k}}d(\frac{q_{i_{k-1}j_1\cdots j_k}}{q_{i_0\cdots i_k}}) - \frac{p_{i_{k-1}j_1\cdots j_k}}{p_{i_0\cdots i_k}}d(\frac{q_{i_0\cdots i_{k-2}i_kj_0}}{q_{i_0\cdots i_k}}) \\
& & & +\cdots(-1)^{k+2}\frac{p_{i_1\cdots i_kj_0}}{p_{i_0..i_k}}d(\frac{q_{i_0j_1..j_k}}{q_{i_0\cdots i_k}}) + (-1)^{k+2}\frac{p_{i_0j_1\cdots j_k}}{p_{i_0\cdots i_k}}d(\frac{q_{i_1\cdots i_kj_0}}{q_{i_0\cdots i_k}})
\end{array}$$

Ya tenemos definida la primera de las aplicaciones.

2. $\varphi_2 : S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to S^* \otimes Q^*$

   Esta aplicación viene de modificar la sucesión exacta universal definida en la subsección 4.2 y usamos también los elementos que generan la base de Q^* y Q definidos también en la subsección 4.2

   Por ello sabemos que $Q =< w^*_{i_0\ldots i_{k-1}}, \ldots, w^*_{i_1\ldots i_k} >$ y $Q^* =< w^*_{i_0\ldots i_{k-1}}, \ldots, w^*_{i_1\ldots i_k} >^*$
   De

$$0 \to S^* \to V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \to Q \to 0$$

   tenemos que

   $\bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \to \bigwedge^k Q$ es una aplicacion sobreyectiva

   Entonces,

$$\bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to \bigwedge^k Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \cong Q^*$$

   sigue siendo una aplicacion lineal sobreyectiva entre fibrados

Si hacemos producto tensorial porS^*,

$$S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to S^* \otimes Q^*$$

sigue siendo una aplicacion lineal

Así tenemos la aplicación $S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to S^* \otimes Q^*$ que es un morfismo de fibrados triviales localmente. Ahora, para definir la aplicación debemos tener presente que V está generado por los hiperplanos x_i de $\mathbb{P}^n$ que verifican $q_{i_0 \ldots i_k} = x_{i_0} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}$.

Definimos primero la aplicación $\bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to \bigwedge^k Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \cong Q^*$

Para ello necesitaremos también el isomorfismo enunciado en la proposición 4.9 de la subsectión 4.2, $\bigwedge^k Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \cong Q^*$

De manera que,

$$\begin{array}{cc}
\bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow & \bigwedge^k Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \\
x_{j_1} \wedge \cdots x_{j_k} \otimes a_{i_0 \bar{\ldots} i_k} \longmapsto & \frac{p_{i_k j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w^*_{i_0 \hat{\ldots} i_{k-1}} \wedge \cdots \wedge w^*_{i_0 i_2 \ldots i_k} \wedge w^*_{i_1 \ldots i_k} \otimes a_{i_0 \bar{\ldots} i_k} \\
 & + \frac{p_{i_{k-1} j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w^*_{i_0 \ldots i_{k-1}} \wedge w_{i_0 \ldots \hat{i}_{k-2} i_k} \cdots \wedge w^*_{i_1 \ldots i_k} \otimes a_{i_0 \bar{\ldots} i_k} + \cdots \\
 & + \frac{p_{i_0 j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w^*_{i_0 \ldots i_{k-1}} \wedge \cdots \wedge w^*_{i_0 i_2 \ldots i_k} \wedge w_{i_1 \hat{\ldots} i_k}{}^* \otimes a_{i_0 \bar{\ldots} i_k}
\end{array}$$

Entonces,

$$\begin{array}{cc}
\bigwedge^k Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow & Q^* \\
\frac{p_{i_k j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w^*_{i_0 \hat{\ldots} i_{k-1}} \wedge \cdots \wedge w^*_{i_0 i_2 \ldots i_k} \wedge w^*_{i_1 \ldots i_k} \otimes a_{i_0 \bar{\ldots} i_k} \longrightarrow & \frac{p_{i_k j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w_{i_0 \ldots i_{k-1}} - \frac{p_{i_{k-1} j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w_{i_0 \ldots i_{k-2} i_k} \\
+ \frac{p_{i_{k-1} j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w^*_{i_0 \ldots i_{k-1}} \wedge w_{i_0 \ldots \hat{i}_{k-2} i_k} \cdots \wedge w^*_{i_1 \ldots i_k} \otimes a_{i_0 \bar{\ldots} i_k} & + \cdots (-1)^{k+2} \frac{p_{i_0 j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w_{i_1 \ldots i_k} \\
+ \cdots + \frac{p_{i_0 j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w^*_{i_0 \ldots i_{k-1}} \wedge \cdots \wedge w^*_{i_0 i_2 \ldots i_k} \wedge w_{i_1 \hat{\ldots} i_k}{}^* \otimes a_{i_0 \bar{\ldots} i_k} &
\end{array}$$

Y por tanto:

$$\begin{array}{cccl}
\varphi_2 : & S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \longrightarrow & S^* \otimes Q^* \\
 & H_{i_0 \ldots i_k j_0} \otimes x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_k} \otimes a_{i_0 \bar{\ldots} i_k} & \longmapsto & H_{i_0 \ldots i_k j_0} \otimes \frac{p_{i_k j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w_{i_0 \ldots i_{k-1}} \\
 & & & - H_{i_0 \ldots i_k j_0} \otimes - \frac{p_{i_{k-1} j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w_{i_0 \ldots i_{k-2} i_k} \\
 & & & + \cdots (-1)^{k+2} H_{i_0 \ldots i_k j_0} \otimes + \cdots (-1)^{k+2} \frac{p_{i_0 j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} w_{i_1 \ldots i_k}
\end{array}$$

es la aplicación que estábamos buscando.

3. $\varphi_4 : S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}$

Esta aplicación viene de completar el complejo de Eagon-Northcott (visto en la subsección 3.1)

$$0 \longrightarrow S^{k+1}S^* \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^k S^* \longrightarrow \bigwedge^{2} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^{k-1}S^*$$
$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^{k-i-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes (S^{i+2}S^*) \longrightarrow \bigwedge^{k-i} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes (S^{i+2}S^*)$$
$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^{k-1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes (S^2S^*) \longrightarrow \bigwedge^{k} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^*$$
$$\longrightarrow \underbrace{\bigwedge^{k+1} V}_{\vartheta_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}^{\binom{n+1}{k+1}}} \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \longrightarrow \underbrace{\bigwedge^{k+1} Q}_{\vartheta_{\mathbb{G}}(1)} \longrightarrow 0$$

con la sucesión de Euler(visto en la subsección 4.1)

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}(1) \longrightarrow \vartheta_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}^{\binom{n+1}{k+1}} \longrightarrow \vartheta_{\mathbb{G}}(1) \longrightarrow 0$$

Así tendríamos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^{k+1}S^* \arrow[r] & V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^k S^* \arrow[r] & \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^{k-1}S^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \ \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \otimes S^* \arrow[rr] \arrow[dr] & & \underbrace{\bigwedge^{k+1} V}_{\vartheta_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}^{\binom{n+1}{k+1}}} \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \arrow[r] & \underbrace{\bigwedge^{k+1} Q}_{\vartheta_{\mathbb{G}}(1)} \arrow[r] & 0 \\
& \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}(1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

multiplicando por $\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$ tenemos la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow S^{k+1}S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^k S^* \longrightarrow \bigwedge^2 V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^{k-1}S^* \longrightarrow \cdots$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\dots \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \otimes S^* \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bigwedge^{k+1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] & \vartheta_{\mathbb{G}} \arrow[r] & 0 \\
& \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Llamamos ψ a la siguiente aplicación

$$\bigwedge^{k+1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \quad \xrightarrow{\psi} \quad \vartheta_{\mathbb{G}}$$

y llamamos φ a la siguiente

$$S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \quad \xrightarrow{\varphi} \quad \bigwedge^{k+1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$$

Tenemos que dar una base del nucleo de ψ y relacionar la imagen de los elementos de la base de $S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$ por φ con los elementos del nucleo de ψ. Entonces, primero definiremos φ, dando la imagen de los elementos, luego definiremos ψ, dando los elementos del nucleo y por último relacionaremos ambas cosas.

Empezamos definiendo φ. Damos la aplicación de forma explícita,

$$\begin{array}{rcl}
\varphi : S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \longrightarrow & \bigwedge^{k+1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \\
H_{i_0 \dots i_k j_0} \otimes x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_k} \otimes a_{\overline{i_0 \dots i_k}} & \longmapsto & H_{i_0 \dots i_k j_0} \wedge x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_k} \otimes a_{\overline{i_0 \dots i_k}}
\end{array}$$

Ahora sabemos que:

$H_{i_0 \dots i_k j_0} = p_{i_0 \dots i_k} x_{j_0} - p_{i_0 \dots i_{k-1} j_0} x_{i_k} + p_{i_0 \dots i_{k-2} i_k j_0} x_{i_{k-1}} - \cdots (-1)^{k+1} p_{i_1 \dots i_k j_0} x_{i_0}$

$H_{i_0 \dots i_k j_0}(w_{j_1 \dots j_k}) = p_{i_0 \dots i_k} p_{j_0 \dots j_k} - p_{i_0 \dots i_{k-1} j_0} p_{i_k j_1 \dots j_k} + p_{i_0 \dots i_{k-2} i_k j_0} p_{i_{k-1} j_1 \dots j_k} - \cdots (-1)^{k+1} p_{i_1 \dots i_k j_0} p_{i_0 j_1 \dots j_k}$

$H_{i_0 \dots i_k j_0} \wedge x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_k} = p_{i_0 \dots i_k} q_{j_0 \dots j_k} - p_{i_0 \dots i_{k-1} j_0} q_{i_k j_1 \dots j_k} + p_{i_0 \dots i_{k-2} i_k j_0} q_{i_{k-1} j_1 \dots j_k} - \cdots (-1)^{k+1} p_{i_1 \dots i_k j_0} q_{i_0 j_1 \dots j_k}$

donde $p_{0 \dots k}$ son las coordenadas de Plücker (números) y las $q_{0 \dots k}$ están en el espacio vectorial $\bigwedge^{k+1} V$.

Así tenemos que $H_{i_0 \dots i_k j_0} \wedge x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_k}$ son ecuaciones de hiperplanos en el espacio de Plücker donde está nuestra grassmanniana. Luego,

$$\begin{array}{rcl}
\varphi : S^* \otimes \bigwedge^k V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \longrightarrow & \bigwedge^{k+1} V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \\
H_{i_0 \dots i_k j_0} \otimes x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_k} \otimes a_{\overline{i_0 \dots i_k}} & \longmapsto & H_{i_0 \dots i_k j_0} \wedge x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_k} \otimes a_{\overline{i_0 \dots i_k}} \\
& & = p_{i_0 \dots i_k} q_{j_0 \dots j_k} \otimes a_{\overline{i_0 \dots i_k}} - p_{i_0 \dots i_{k-1} j_0} q_{i_k j_1 \dots j_k} \otimes a_{\overline{i_0 \dots i_k}} \\
& & + p_{i_0 \dots i_{k-2} i_k j_0} q_{i_{k-1} j_1 \dots j_k} \otimes a_{\overline{i_0 \dots i_k}} \\
& & - \cdots (-1)^{k+1} p_{i_1 \dots i_k j_0} q_{i_0 j_1 \dots j_k} \otimes a_{\overline{i_0 \dots i_k}}
\end{array}$$

Para dar los elementos del nucleo de ψ repetiremos un razonamiento análogo a la subsección 4.3 para la grassmanniana $\mathbb{G} = \mathbb{G}(k, n)$. De esta forma obtenemos que los elementos de la base del nucleo son de la forma $d(\frac{q_{j_0 \cdots j_k}}{q_{i_0 \cdots i_k}})$ donde

$$d(\frac{q_{j_0 \ldots j_k}}{q_{i_0 \ldots i_k}}) = (0, \ldots, 0, \underbrace{-\frac{p_{j_0 \ldots j_k}}{p^2_{i_0 \ldots i_k}}}_{(i_0 \ldots i_k)}, 0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{p_{i_0 \ldots i_k}}}_{(j_0 \ldots j_k)}, 0, \ldots, 0)$$

Por último vamos a dar una relación entre los elementos de la base del nucleo, $d(\frac{q_{j_0 \cdots j_k}}{q_{i_0 \cdots i_k}})$ y los hiperplanos.

$$d(\frac{q_{j_0 \ldots j_k}}{q_{i_0 \ldots i_k}}) = (0, \ldots, 0, \underbrace{-\frac{p_{j_0 \ldots j_k}}{p^2_{i_0 \ldots i_k}}}_{(i_0 \ldots i_k)}, 0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{p_{i_0 \ldots i_k}}}_{(j_0 \ldots j_k)}, 0, \ldots, 0)$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{1}{p_{i_0 \ldots i_k}} q_{j_0 \ldots j_k} - \frac{p_{j_0 \ldots j_k}}{p^2_{i_0 \ldots i_k}} q_{i_0 \ldots i_k}$$

Para dar la aplicación que queremos debemos poner

$$p_{i_0 \ldots i_k} q_{j_0 \ldots j_k} \otimes a^{-}_{i_0 \ldots i_k} - p_{i_0 \ldots i_{k-1} j_0} q_{i_k j_1 \ldots j_k} \otimes a^{-}_{i_0 \ldots i_k}$$
$$+ p_{i_0 \ldots i_{k-2} i_k j_0} q_{i_{k-1} j_1 \ldots j_k} \otimes a^{-}_{i_0 \ldots i_k}$$
$$- \cdots (-1)^{k+1} p_{i_1 \ldots i_k j_0} q_{i_0 j_1 \ldots j_k} \otimes a^{-}_{i_0 \ldots i_k}$$

o

$$p_{i_0 \ldots i_k} q_{j_0 \ldots j_k} - p_{i_0 \ldots i_{k-1} j_0} q_{i_k j_1 \ldots j_k} + p_{i_0 \ldots i_{k-2} i_k j_0} q_{i_{k-1} j_1 \ldots j_k}$$
$$- \cdots (-1)^{k+1} p_{i_1 \ldots i_k j_0} q_{i_0 j_1 \ldots j_k}$$

de la aplicación φ como combinación de los elementos del nucleo dados anteriormente $d(\frac{q_{j_0 \cdots j_k}}{q_{i_0 \cdots i_k}})$.

Entonces tenemos que ,

$$p_{i_0 \ldots i_k} q_{j_0 \ldots j_k} - p_{i_0 \ldots i_{k-1} j_0} q_{i_k j_1 \ldots j_k} + p_{i_0 \ldots i_{k-2} i_k j_0} q_{i_{k-1} j_1 \ldots j_k}$$
$$- \cdots (-1)^{k+1} p_{i_1 \ldots i_k j_0} q_{i_0 j_1 \ldots j_k} - p_{j_0 \ldots j_k} q_{i_0 \ldots i_k} + \frac{p_{i_0 \ldots i_{k-1} j_0} p_{i_k j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} q_{i_0 \ldots i_k}$$
$$- \frac{p_{i_0 \ldots i_{k-2} i_k j_0} p_{i_{k-1} j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} q_{i_0 \ldots i_k} + \cdots (-1)^k \frac{p_{i_1 \ldots i_k j_0} p_{i_0 j_1 \ldots j_k}}{p_{i_0 \ldots i_k}} q_{i_0 \ldots i_k} =$$

$$= p_{i_0\dots i_k}q_{j_0\dots j_k} - p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}q_{i_kj_1\dots j_k} + p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}q_{i_{k-1}j_1\dots j_k}$$
$$-\cdots(-1)^{k+1}p_{i_1\dots i_kj_0}q_{i_0j_1\dots j_k} - p_{j_0\dots j_k}q_{i_0\dots i_k} + \frac{p_{i_0\dots i_k}p_{j_0\dots j_k}}{p_{i_0\dots i_k}}q_{i_0\dots i_k} =$$
$$= p_{i_0\dots i_k}q_{j_0\dots j_k} - p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}q_{i_kj_1\dots j_k} + p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}q_{i_{k-1}j_1\dots j_k}$$
$$-\cdots(-1)^{k+1}p_{i_1\dots i_kj_0}q_{i_0j_1\dots j_k}$$
$$\updownarrow$$
$$p^2_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{j_0\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}}) - p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_kj_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}}) + p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_{k-1}j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}})$$
$$\cdots(-1)^{k+1}p_{i_1\dots i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_0j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}})$$

Definimos finalmente la aplicación φ_4

$$\begin{array}{rcl}\varphi_4 : S^*\otimes\bigwedge^k V\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \\ H_{i_0\dots i_kj_0}\otimes x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_k}\otimes a^-_{i_0\dots i_k} & \longmapsto & p^2_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{j_0\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}}) - p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_kj_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}}) \\ & & +p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_{k-1}j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}}) \\ & & \cdots(-1)^{k+1}p_{i_1\dots i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_0j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}})\end{array}$$

Por último comprobaremos que el diagrama conmuta, es decir la composicion de φ_1 y φ_4 es igual a φ_2 ya que φ_3 es isomorfismo Damos la composición de las aplicaciones φ_1 y φ_4

$$\varphi_1\circ\varphi_4(H_{i_0\dots i_kj_0}\otimes x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_k}\otimes a^-_{i_0\dots i_k}) = p^2_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{j_0\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}}) - p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_kj_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}})$$
$$+p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_{k-1}j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}})\cdots(-1)^{k+1}p_{i_1\dots i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_0j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}}) =$$

$$\varphi_1(p^2_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{j_0\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}}) - p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_kj_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}}) + p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_{k-1}j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}})$$
$$\cdots(-1)^{k+1}p_{i_1\dots i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_0j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}}) = p^2_{i_0\dots i_k}\frac{p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}}{p_{i_0..i_k}}d(\frac{p_{i_kj_1..j_k}}{p_{i_0\dots i_k}}) + p^2_{i_0\dots i_k}\frac{p_{i_kj_1\dots j_k}}{p_{i_0\dots i_k}}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}}{p_{i_0\dots i_k}})$$
$$-p^2_{i_0\dots i_k}\frac{p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}}d(\frac{p_{i_{k-1}j_1\dots j_k}}{p_{i_0\dots i_k}}) - p^2_{i_0\dots i_k}\frac{p_{i_{k-1}j_1\dots j_k}}{p_{i_0\dots i_k}}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}})$$
$$+\cdots(-1)^{k+2}p^2_{i_0\dots i_k}\frac{p_{i_1\dots i_kj_0}}{p_{i_0..i_k}}d(\frac{p_{i_0j_1..j_k}}{p_{i_0\dots i_k}})(-1)^{k+2}p^2_{i_0\dots i_k}\frac{p_{i_0j_1\dots j_k}}{p_{i_0\dots i_k}}d(\frac{p_{i_1\dots i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}}) - p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_kj_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}})$$
$$+p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_{k-1}j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}})\cdots(-1)^{k+1}p_{i_1\dots i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_0j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}}) =$$

$$p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}p_{i_0..i_k}d(\frac{p_{i_kj_1..j_k}}{p_{i_0\dots i_k}})+p_{i_kj_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}}{p_{i_0\dots i_k}})-p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_{k-1}j_1\dots j_k}}{p_{i_0\dots i_k}})$$

$$-p_{i_{k-1}j_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}})+\cdots(-1)^{k+2}p_{i_1\dots i_kj_0}p_{i_0..i_k}d(\frac{p_{i_0j_1..j_k}}{p_{i_0\dots i_k}})$$

$$(-1)^{k+2}p_{i_0j_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_1\dots i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}})-p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_kj_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}})+p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_{k-1}j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}})\cdots$$

$$(-1)^{k+1}p_{i_1\dots i_kj_0}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{q_{i_0j_1\dots j_k}}{q_{i_0\dots i_k}})=p_{i_kj_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}}{p_{i_0\dots i_k}})$$

$$-p_{i_{k-1}j_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}})\cdots(-1)^{k+2}p_{i_0j_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_1\dots i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}})$$

$$\begin{array}{rcl} S^*\otimes\bigwedge^k V\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \xrightarrow{\varphi_1\circ\varphi_4} & \Omega_{\mathbb{G}} \\ H_{i_0\dots i_kj_0}\otimes x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_k}\otimes a_{\bar{i_0\dots i_k}} & \longmapsto & p_{i_kj_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}}{p_{i_0\dots i_k}}) \\ & & -p_{i_{k-1}j_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}}) \\ & & \cdots(-1)^{k+2}p_{i_0j_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_1\dots i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}}) \end{array}$$

Por otro lado tenemos

$$\varphi_2(H_{i_0\dots i_kj_0}\otimes x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_k}\otimes a_{\bar{i_0\dots i_k}})=H_{i_0\dots i_kj_0}\otimes\frac{p_{i_kj_1\dots j_k}}{p_{i_0\dots i_k}}w_{i_0\dots i_{k-1}}$$

$$-H_{i_0\dots i_kj_0}\otimes\frac{p_{i_{k-1}j_1\dots j_k}}{p_{i_0\dots i_k}}w_{i_0\dots i_{k-2}i_k}+\cdots(-1)^{k+2}H_{i_0\dots i_kj_0}\otimes\frac{p_{i_0j_1\dots j_k}}{p_{i_0\dots i_k}}w_{i_1\dots i_k}=$$

$$p_{i_kj_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}}{p_{i_0\dots i_k}})-p_{i_{k-1}j_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}})\cdots$$

$$(-1)^{k+2}p_{i_0j_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_1\dots i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}})$$

$$\begin{array}{rcl} S^*\otimes\bigwedge^k V\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \xrightarrow{\varphi_2} & \Omega_{\mathbb{G}} \\ H_{i_0\dots i_kj_0}\otimes x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_k}\otimes a_{\bar{i_0\dots i_k}} & \longmapsto & p_{i_kj_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-1}j_0}}{p_{i_0\dots i_k}}) \\ & & -p_{i_{k-1}j_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_0\dots i_{k-2}i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}}) \\ & & \cdots(-1)^{k+2}p_{i_0j_1\dots j_k}p_{i_0\dots i_k}d(\frac{p_{i_1\dots i_kj_0}}{p_{i_0\dots i_k}}) \end{array}$$

Observamos que tenemos el mismo resultado, luego el diagrama conmuta. □

Fin de la demostración del Teorema 5.1: Aplicando el lema de la serpiente al diagrama del Lema 5.8 se observa que $N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}}$ es el conucleo de $ker f'_{k+1}\longrightarrow ker f_{k+1}$ y por exactitud este diagrama se pega al anterior y entonces el fibrado conormal para la grassmaniana general admite la siguiente resolucion:

$$0 \longrightarrow F_{k+1}(S^*) \longrightarrow V \otimes F_k(S^*) \longrightarrow \bigwedge^2 V \otimes F_{k-1}(S^*) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{k-i} V \otimes F_{i+1}(S^*) \longrightarrow \bigwedge^{k-i+1} V \otimes F_i(S^*) \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow \bigwedge^{k-2} V \otimes F_3(S^*) \longrightarrow \bigwedge^{k-1} V \otimes F_2(S^*) \longrightarrow N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} \longrightarrow 0$$

donde $F_i(S^*) = (S^* \otimes S^{i-1}S^*/S^iS^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$.

Referencias

[1] E. Arrondo, *Subvarieties of Grassmannians*, Lecture Note Series Dipartimento di Matematica Univ. Trento, 10 (1996).

[2] E. Arrondo, M. Bertolini, C. Turrini. *On the ampleness of the normal bundle of line congruences.* Aceptado en Forum Mat.

[3] D. Eisenbud. *Conmutative Algebra with a view Toward Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, No. 150. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1995.

[4] M. Schneider, J. Zintl. *The theorem of Barth-Lefschetz as a consequence of Le Potier's vanishing theorem.* Manuscripta Math., 80 (1993), 259-263.

[5] A. Tocino *Fibrados vectoriales y Grassmannianas.* Trabajo Fin de Master de Investigación Matemática 2010. Universidad Complutense.