

Modelos climáticos de balance de energía y resultados de control para modelos discretizados



Víctor José García Garrido
Workshop de Jóvenes Investigadores
(Trabajo de Investigación dirigido por J.I.Díaz)



Objetivos

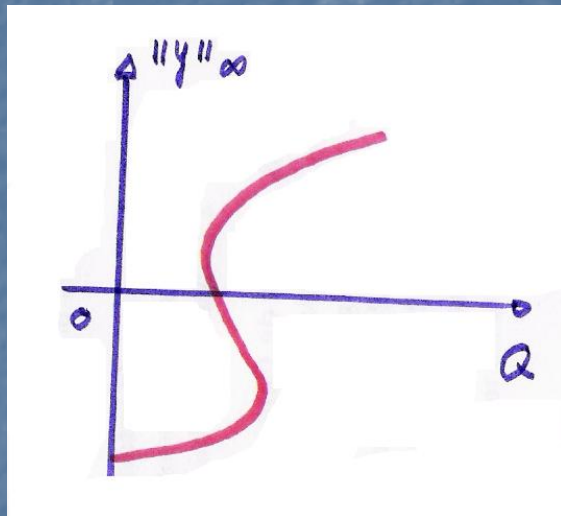
$$(P_Q)^v \begin{cases} \dot{y}(t) + Ay(t) = R_a(y(t), v(t), Q) - R_e(y(t)), & t > 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

$v(t) \in \mathbb{R}$ control

$y(t) \in \mathbb{R}^N$ estado

modelo climático unidimensional (no lineal)

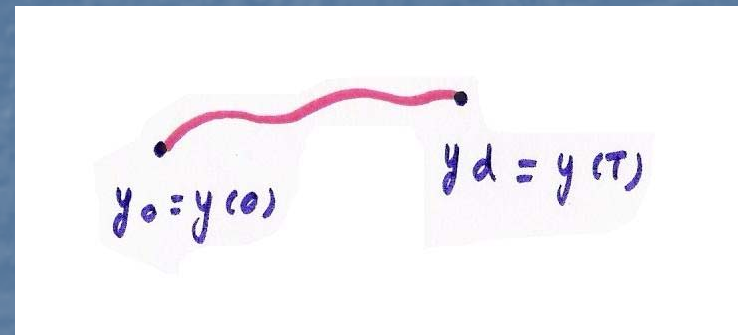
Problema estacionario



bifurcación en forma de S

Controlabilidad: Transferibilidad

$$Q = Q_0$$



$$(v_0 Q_0, y_0) \xrightarrow{T > 0} (v_f Q_0, y_f)$$

estado estacionario estable

Resultados publicados en las Actas del congreso CEDYA (Sevilla 24-28 Septiembre)

Contenido

- 1 Modelos climáticos de balance de energía
- 2 Estados estacionarios: Nuevos resultados
- 3 Controlabilidad: Nuevos resultados

1 Modelos climáticos de balance de energía

“Se entiende por clima el estado promediado de la atmósfera observado como tiempo meteorológico sobre un periodo finito de tiempo a lo largo de los años.”

(S. H. Schneider 1992)

Modelos de Budyko y Sellers (1969)

- Modelos simples pero muy aproximados
- Sensibilidad respecto a la constante solar (frágil habitabilidad)
(catastrófica transición hacia un planeta cubierto de hielo)

$$y(t, x) = \frac{1}{2\tau \text{vol}(B(x))} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \int_{B(x)} T(a, s) \, da \, ds,$$

promedio de temperatura

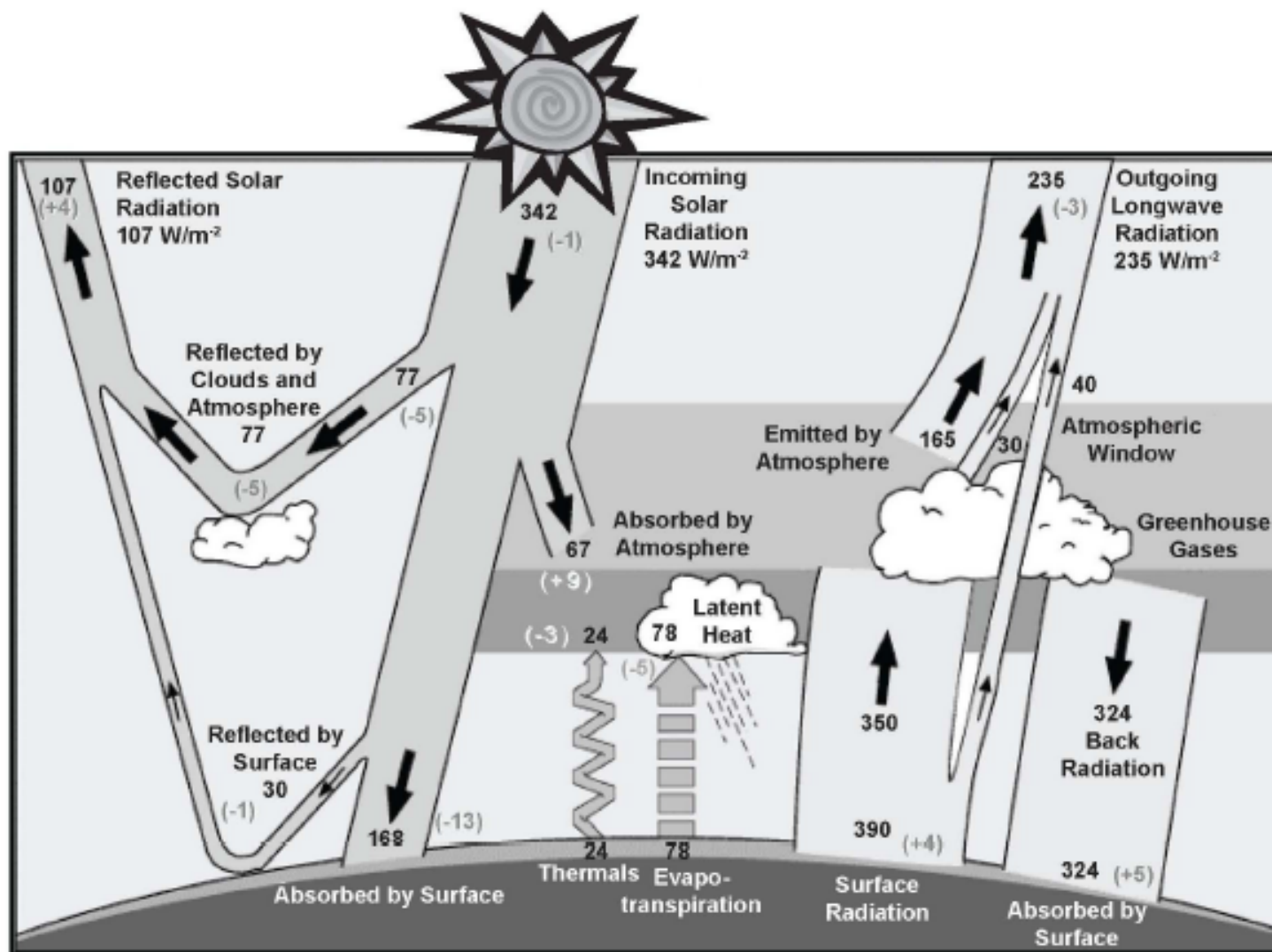


Figura 1.4: Balance de radiación del sistema climático.

Balance energético

$$c \frac{\partial y}{\partial t} = R_a - R_e + D$$

$(\mathcal{M}, g)$ es una variedad Riemanniana bidimensional de clase C^∞ , compacta, sin borde, conexa y orientada (donde g representa la métrica en la variedad).

$c \equiv$ capacidad calorífica o calor específico

$D \equiv$ difusión térmica $\longrightarrow$ nubes, circulación atmosférica, corrientes oceánicas...

$D = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} y) \longrightarrow k > 0$ coeficiente de difusión

$$\begin{cases} c(x)y_t - \operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad} y) = R_a(x, y) - R_e(x, y), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathcal{M}, \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

$$R_a(x, y) = Q\beta(y)S(x), \quad x \in \mathcal{M},$$

radiación solar absorbida

$S \equiv$ función de insolación

$$Q = \frac{\sigma_{\odot}}{4} \approx 342 \frac{W}{m^2}$$

$$\beta = 1 - \alpha = \frac{\text{radiación solar absorbida}}{\text{radiación solar incidente}} \in [0, 1]$$

β coalbedo

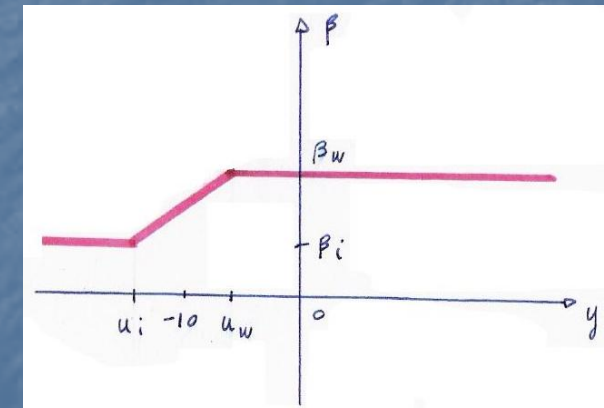
α albedo

$$y_{crit} = -10^{\circ}\text{C}$$

(hielo transparente a blanco)

Modelo de Sellers (Lipschitz continua)

$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_i, & y < u_i, \\ \beta_i + \left(\frac{y - u_i}{u_w - u_i} \right) (\beta_w - \beta_i), & u_i \leq y \leq u_w, \\ \beta_w, & y > u_w, \end{cases}$$



$\beta_w \approx 0,71$ coalbedo zona sin hielo

$\beta_i \approx 0,38$ coalbedo zona con hielo

$$u_i < y_{crit} = -10 < u_w$$

$R_e(y)$ radiación emitida por la Tierra como cuerpo caliente (creciente con y)
Depende del efecto invernadero

Modelo de Sellers

$$R_e(y) = \sigma y^4 \left(1 - m \tanh\left(\frac{19y^6}{10^6}\right)\right)$$

(ley de Stefan-Boltzmann)

$\sigma > 0 \equiv$ emisividad

$y > 0 \equiv$ temperatura (Kelvin)

$m > 0 \equiv$ opacidad de la atmósfera

$R_e = \sigma |y|^3 y$ (temperatura en centígrados)

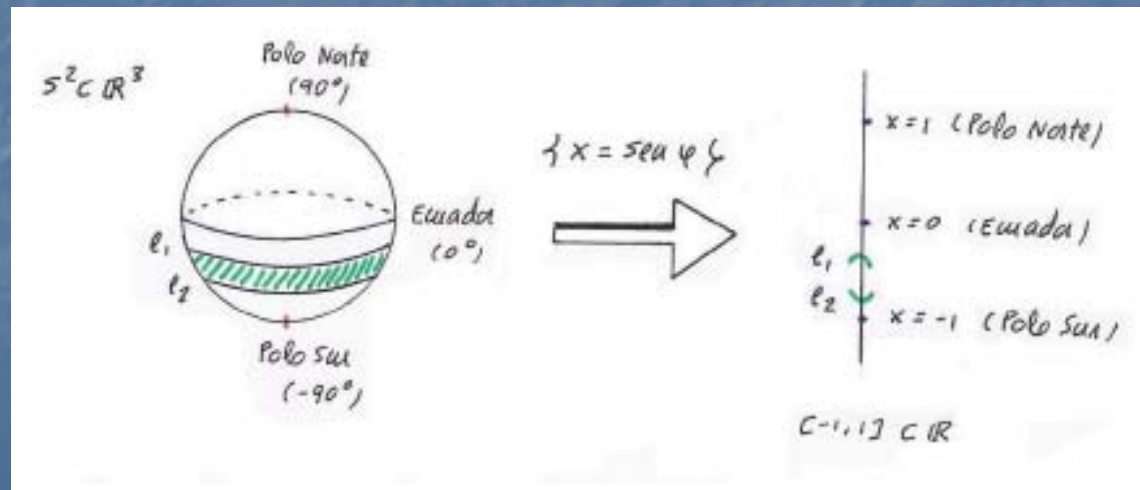
Modelo considerado

$$\mathcal{M} \approx \mathbb{S}^2$$

$$c = k = 1$$

$$x = \sin \varphi$$

$$(v(t)\chi_{(l_1, l_2)} + 1)$$



$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{S}^2} y &= -\frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} (-y_\varphi \cos\varphi) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(-y_x \frac{\partial x}{\partial\varphi} \frac{\partial x}{\partial\varphi} \right) = \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} (y_x \cos^2\varphi) = \\ &= \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} (y_x(1-x^2)) = (y_x(1-x^2))_x\end{aligned}$$

$$(P) \begin{cases} y_t - (k(1-x^2)y_x)_x = R_a(x, y, v) - R_e(x, y), & (t, x) \in (0, \infty) \times (-1, 1), \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in (-1, 1). \end{cases}$$

problema parabólico degenerado (modelo unidimensional)

$$F = k(1-x^2)y_x \quad \text{flujo degenerado} \quad (F=0) \quad \text{cuando} \quad x = \pm 1$$

$$(P_u) \begin{cases} y_t - ky_{xx} = R_a(x, y, v) - R_e(x, y), & x \in (-1, 1), \quad t > 0, \\ y_x(t, -1) = y_x(t, 1) = 0, & t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (-1, 1). \end{cases}$$

$$R_e = g(y) - f(x)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{creciente con} \quad g(0) = 0 \text{ y } \lim_{|s| \rightarrow \infty} |g(s)| = +\infty$$

$$f \in C^0([-1,1])$$

$$R_a = (v(t)\chi_{(l_1,l_2)} + 1)QS(x)\beta(y)$$

$$S \in C^0([-1,1]) \text{ , } s_1 \geq S(x) \geq s_0 > 0 \text{ , } \forall x \in [-1,1]$$

$$\beta \quad \text{Lipschitz continua}$$

Diferencias finitas

$$N > 1 \text{ nodos}$$

$$x_i = -1 + (i-1)h$$

$$h = \frac{2}{N-1}$$

$$y_i(t) \approx y(t, x_i) \text{ , } i = 1, \dots, N$$

$$y_{xx}(t, x_i) \approx \frac{y_{i+1}(t) - 2y_i(t) + y_{i-1}(t)}{h^2}$$

$$y_x(t, x_N = 1) \approx \frac{y_{N+1}(t) - y_N(t)}{h} = 0 \Rightarrow y_{N+1} = y_N$$

$$y_x(t, x_1 = -1) \approx \frac{y_1(t) - y_0(t)}{h} = 0 \Rightarrow y_1 = y_0$$

$$y_i(0) = y(0, x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - k \frac{y_2 - y_1}{h^2} = R_a(-1, y_1, v) - R_e(-1, y_1), & i = 1, \\ \dot{y}_i - k \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = R_a(x_i, y_i, v) - R_e(x_i, y_i), & i = 2, \dots, N-1, \\ \dot{y}_N - k \frac{y_N - y_{N-1}}{h^2} = R_a(1, y_N, v) - R_e(1, y_N), & i = N. \end{cases}$$

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))^T \in \mathbb{R}^N \quad v(t) \in \mathbb{R}$$



$$(P_h) \begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) + A_N \mathbf{y}(t) = \mathbf{R}_a(\mathbf{y}(t), v(t)) - \mathbf{R}_e(\mathbf{y}(t)), & t > 0, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

$$A_N = \frac{k}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N \times N}$$

simétrica y definida positiva

v está localizado en $m \in \mathbb{N}$ nodos con $1 \leq m < N - 1$

$v_j(t) \equiv v(t)$ si j es uno de los m nodos donde el control está localizado y $v_j(t) \equiv 1$ en caso contrario

2 Estados estacionarios: Nuevos resultados

$N=3$

$$(P_Q^\infty) \quad \mathbf{f}(\mathbf{y}_\infty, 1, 1, Q) = 0$$

problema estacionario

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, 1, 1, Q) = k \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} S(-1)\beta(y_1) \\ S(0)\beta(y_2) \\ S(1)\beta(y_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g(y_1) \\ g(y_2) \\ g(y_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}$$

Problemas auxiliares

$$(\mathbf{P}_Q^\infty)_m \quad \mathbf{f}_m(\mathbf{y}, 1, 1, Q) = k \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + Qm \begin{pmatrix} S(-1) \\ S(0) \\ S(1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g(y_1) \\ g(y_2) \\ g(y_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{P}_Q^\infty)_M \quad \mathbf{f}_M(\mathbf{y}, 1, 1, Q) = k \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + QM \begin{pmatrix} S(-1) \\ S(0) \\ S(1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g(y_1) \\ g(y_2) \\ g(y_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hipótesis

$$(H_{f_\infty}) \quad \sup_{[-1,1]} f = -C_f < 0 \text{ (} \min f \leq f(x_i) \leq -C_f \text{)},$$

$$(H_\beta) \quad \beta \text{ es una función Lipschitz creciente y existen } 0 < m < M \text{ y } \epsilon > 0 \text{ con}$$

$$\beta(r) = \begin{cases} m, & r \in (-\infty, -10 - \epsilon), \\ M, & r \in (-10 + \epsilon, +\infty), \end{cases}$$

Notación

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (g(y_1), g(y_2), g(y_3))^T$$

$$\mathbf{f} = (f(-1), f(0), f(1))^T$$

$$\beta(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \beta(y_1) & 0 & 0 \\ 0 & \beta(y_2) & 0 \\ 0 & 0 & \beta(y_3) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = (1, 1, 1)^T$$

$$\mathbf{S} = (S(-1), S(0), S(1))^T$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \leq \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y_i \leq w_i \text{ para todo } i = 1, 2, 3$$

y de forma análoga se definen las desigualdades estrictas. Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$, la notación $\alpha \leq \mathbf{y}$ con $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ implica que $\alpha \leq y_i$ para todo $i = 1, 2, 3$.

$$(P_Q^\infty) \quad A\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) = Q\beta(\mathbf{y})\mathbf{S} + \mathbf{f}$$

Teorema 1 Supongamos que se verifican las hipótesis anteriores y sean $\mathbf{y}_m$ (resp. $\mathbf{y}_M$) las únicas soluciones del problema $(P_Q^\infty)_m$ (resp. $(P_Q^\infty)_M$). Entonces:

1. para cada $Q > 0$ cualquier solución $\mathbf{y}$ de (P_Q^∞) debe satisfacer

$$\mathbf{y}_m \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_M$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(Qs_0m + \min f) &\leq (y_m)_i \leq g^{-1}(Qs_1m - C_f), \\ g^{-1}(Qs_0M + \min f) &\leq (y_M)_i \leq g^{-1}(Qs_1M - C_f), \end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, 3$.

Si asumimos además

$$(H_{C_f}) \quad g(-10 - \epsilon) + C_f > 0 \quad \text{y} \quad \frac{g(-10 + \epsilon) - \min f}{g(-10 - \epsilon) + C_f} \leq \frac{s_0M}{s_1m},$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{g(-10 - \epsilon) + C_f}{s_1M}, \quad Q_2 = \frac{g(-10 + \epsilon) - \min f}{s_0M}, \\ Q_3 &= \frac{g(-10 - \epsilon) + C_f}{s_1m}, \quad Q_4 = \frac{g(-10 + \epsilon) - \min f}{s_0m}, \end{aligned}$$

2. $0 < Q < Q_1$ (P_Q^∞) tiene una única solución $\mathbf{y} = \mathbf{y}_m$ con $\mathbf{y}_m < -10$

$$Q > Q_4 \quad (P_Q^\infty) \text{ tiene una única solución } \mathbf{y} = \mathbf{y}_M, \text{ con } \mathbf{y}_M > -10$$

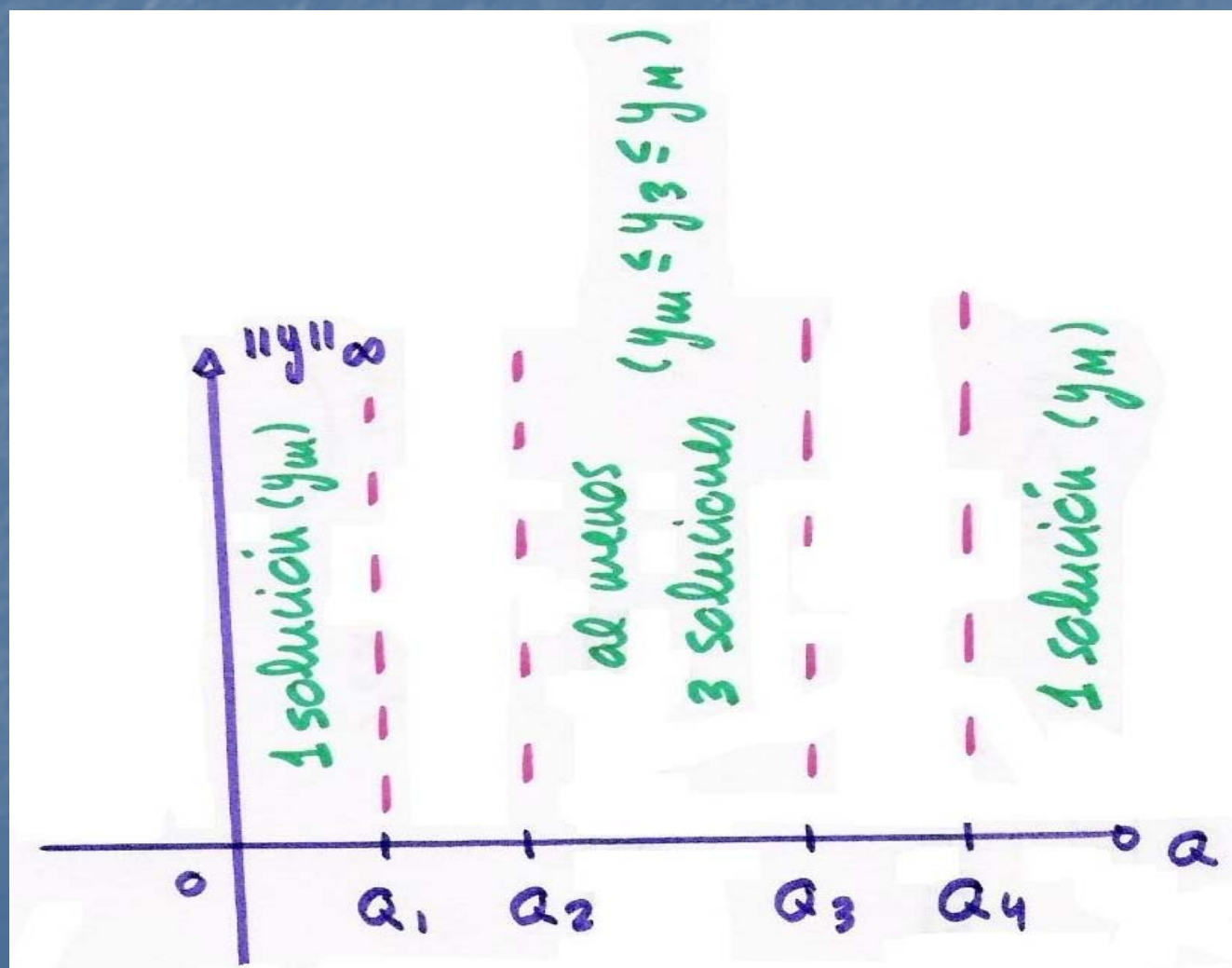
$$g^{-1}(\min f) \leq \liminf_{Q \searrow 0} \|y\|_\infty \leq \limsup_{Q \searrow 0} \|y\|_\infty \leq g^{-1}(-C_f)$$

3.

$$Q_2 < Q < Q_3$$

(P_Q^∞) tiene al menos tres soluciones

$$y_1 = y_M \geq y_3 \geq y_2 = y_m$$



Demostración

1.

$$(P_Q^\infty)_m \text{ y } (P_Q^\infty)_M$$

principio de comparación

$$QmS + \mathbf{f} \leq kA\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) \leq QMS + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{y}_m \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_M$$

Definimos

$\bar{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{g}^{-1}((Qs_1M - C_f)\mathbf{e})$ es supersolución de $(P_Q^\infty)_M$,
 $\bar{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{g}^{-1}((Qs_1m - C_f)\mathbf{e})$ es supersolución de $(P_Q^\infty)_m$,
 $\underline{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{g}^{-1}((Qs_0M + \min f)\mathbf{e})$ es subsolución de $(P_Q^\infty)_M$,
 $\underline{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{g}^{-1}((Qs_0m + \min f)\mathbf{e})$ es subsolución de $(P_Q^\infty)_m$.

$$\begin{aligned}
 A\bar{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}_1) &= (Qs_1M - C_f)\mathbf{e} \geq QSM + \mathbf{f} , \\
 A\bar{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}_2) &= (Qs_1m - C_f)\mathbf{e} \geq QSm + \mathbf{f} , \\
 A\underline{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{g}(\underline{\mathbf{y}}_1) &= (Qs_0M + \min f)\mathbf{e} \leq QSM + \mathbf{f} , \\
 A\underline{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{g}(\underline{\mathbf{y}}_2) &= (Qs_0m + \min f)\mathbf{e} \leq QSm + \mathbf{f} ,
 \end{aligned}$$

método de sub y supersoluciones de Amann $\longrightarrow$ $\underline{y}_1 \leq y_M \leq \overline{y}_1$ e $\underline{y}_2 \leq y_m \leq \overline{y}_2$



$$\begin{aligned} g^{-1}(Qs_0m + \min f) &\leq (y_m)_i \leq g^{-1}(Qs_1m - C_f), \\ g^{-1}(Qs_0M + \min f) &\leq (y_M)_i \leq g^{-1}(Qs_1M - C_f), \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3.$$

2.

$$0 < Q < Q_1$$

$$\begin{aligned} \overline{y}_1 &= \mathbf{g}^{-1}((Qs_1M - C_f)\mathbf{e}) < \mathbf{g}^{-1}\left((s_1M \frac{g(-10 - \epsilon) + C_f}{s_1M} - C_f)\mathbf{e}\right) = -10 - \epsilon, \\ \overline{y}_2 &= \mathbf{g}^{-1}((Qs_1m - C_f)\mathbf{e}) < \mathbf{g}^{-1}\left((s_1m \frac{g(-10 - \epsilon) + C_f}{s_1M} - C_f)\mathbf{e}\right) < -10 - \epsilon, \end{aligned}$$

$$y_m \leq y \leq y_M \longrightarrow y < -10 - \epsilon \longrightarrow Ay + \mathbf{g}(y) = QSm + \mathbf{f}, \longrightarrow y = y_m$$

$$Q > Q_4$$

$$\underline{y}_1 = \mathbf{g}^{-1}((Qs_0M + \min f)\mathbf{e}) > \mathbf{g}^{-1}\left((s_0M \frac{g(-10 + \epsilon) - \min f}{s_0m} + \min f)\mathbf{e}\right) > -10 + \epsilon,$$

$$\underline{y}_2 = \mathbf{g}^{-1}((Qs_0m + \min f)\mathbf{e}) > \mathbf{g}^{-1}\left((s_0m \frac{g(-10 + \epsilon) - \min f}{s_0m} + \min f)\mathbf{e}\right) = -10 + \epsilon,$$

$$\mathbf{y}_m \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_M \longrightarrow \mathbf{y} > -10 + \epsilon \longrightarrow A\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) = Q\mathbf{S}\mathbf{M} + \mathbf{f}, \longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}_M$$

$$g^{-1}(\min f) \leq \liminf_{Q \searrow 0} \|\mathbf{y}\|_\infty \leq \limsup_{Q \searrow 0} \|\mathbf{y}\|_\infty \leq g^{-1}(-C_f).$$

en ambos casos

$$3. \quad Q_2 < Q < Q_3$$

Paso 1: Construcción de sub y supersoluciones de (P_Q^∞)

$$(P_1) \quad \mathbf{g}(\mathbf{U}) = Qs_1\beta(\mathbf{U})\mathbf{e} - C_f\mathbf{e}$$

solución de (P_1)

$\longrightarrow$

supersolución de (P_Q^∞)

$$(P_2) \quad \mathbf{g}(\mathbf{V}) = Qs_0\beta(\mathbf{V})\mathbf{e} + \min f\mathbf{e}$$

solución de (P_2)

$\longrightarrow$

subsolución de (P_Q^∞)

sub y supersoluciones constantes de (P_Q^∞)

soluciones de (P_1)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \mathbf{g}^{-1}((Qs_1M - C_f)\mathbf{e}) > \mathbf{g}^{-1}\left((s_1M \frac{g(-10 + \epsilon) - \min f}{s_0M} - C_f)\mathbf{e}\right) \geq \\ &\geq \mathbf{g}^{-1}((g(-10 + \epsilon) - (\min f + C_f))\mathbf{e}) > -10 + \epsilon \end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{g}^{-1}((Qs_1m - C_f)\mathbf{e}) < \mathbf{g}^{-1}\left((s_1m \frac{g(-10 - \epsilon) + C_f}{s_1m} - C_f)\mathbf{e}\right) = -10 - \epsilon$$

soluciones de (P_2)

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{g}^{-1}((Qs_0M + \min f)\mathbf{e}) > \mathbf{g}^{-1}\left((s_0M \frac{g(-10 + \epsilon) - \min f}{s_0M} + \min f)\mathbf{e}\right) = -10 + \epsilon$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 &= \mathbf{g}^{-1}((Qs_0m + \min f)\mathbf{e}) < \mathbf{g}^{-1}\left((s_0m \frac{g(-10 - \epsilon) + C_f}{s_1m} + \min f)\mathbf{e}\right) \leq \\ &\leq \mathbf{g}^{-1}((g(-10 - \epsilon) + (C_f + \min f))\mathbf{e}) < -10 - \epsilon \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_2 \leq \mathbf{U}_2 < -10 - \epsilon < -10 + \epsilon < \mathbf{V}_1 \leq \mathbf{U}_1.$$

Paso 2: Existencia de soluciones de (P_Q^∞)

método de las sub y supersoluciones que existen dos soluciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ de (P_Q^∞)

$$\mathbf{V}_i \leq \mathbf{y}_i \leq \mathbf{U}_i, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

$$y_1 > -10 + \epsilon \longrightarrow y_1 \text{ verifica } (P_Q^\infty)_M \longrightarrow y_1 = y_M$$

unicidad

$$y_2 < -10 - \epsilon \longrightarrow y_2 \text{ verifica } (P_Q^\infty)_m \longrightarrow y_2 = y_m$$

$$(P_Q^\infty) \quad Ay + g(y) = Q\beta(y)S + f$$

toda solución y de (P_Q^∞) es un punto fijo

$$y = (A + g)^{-1}(Q\beta(y)S + f)$$

Lema Sea X un retracto de un cierto espacio de Banach E y sea $F : X \rightarrow X$ una aplicación compacta. Supongamos además que X_1 y X_2 son retractos disjuntos de X , y consideremos Y_1, Y_2 subconjuntos abiertos de X tales que $Y_k \subset X_k$ para $k = 1, 2$. Si $F(X_k) \subset X_k$ y F no tiene puntos fijos en $X_k - Y_k$ para $k = 1, 2$ entonces F tiene al menos tres puntos fijos x_1, x_2 y x_3 con $x_k \in X_k$ para $k = 1, 2$ y $x_3 \in X - (X_1 \cup X_2)$.

(H. Amann 1976)

$$E = \mathbb{R}^3 \text{ espacio de Banach}$$

$$F(v) = (A + g)^{-1}(Q\beta_\lambda(v)S + f)$$

continua + acotados en acotados

$$y_1 = y_M \geq y_3 \geq y_2 = y_m$$

$$f \equiv -C$$

Teorema 2

$$\Sigma = \left\{ (Q, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \mid Q \geq 0, \text{ y solución de } (P_Q^\infty) \right\}$$

Σ contiene una componente conexa no acotada que comienza en $(0, \mathbf{g}^{-1}(-C\mathbf{e}))$

y tiene forma de S

Demostración

Lema Sea E un espacio de Banach. Si $F : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ es compacta y $F(0, u) \equiv 0$ entonces $\Sigma = \{(Q, u) \mid F(Q, u) = u\}$ contiene un par de componentes no acotadas $C^+ \subset \mathbb{R}^+ \times E$ y $C^- \subset \mathbb{R}^- \times E$ tales que $C^+ \cap C^- = \{(0, 0)\}$.

(P. H. Rabinowitz 1971)

Paso 1: Σ tiene una componente conexa no acotada que contiene al punto $(0, \mathbf{g}^{-1}(-C\mathbf{e}))$

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{g}^{-1}(-C\mathbf{e}) \longrightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{g}}(\sigma) = \mathbf{g}(\sigma + \mathbf{g}^{-1}(-C\mathbf{e})) + C\mathbf{e} \\ \hat{\beta}(\sigma) = \beta(\sigma + \mathbf{g}^{-1}(-C\mathbf{e})) \end{cases} \quad \mathbf{z} \text{ es una solución de } (P_Q^\infty)$$

Definimos $\hat{\Sigma}$ análogamente a Σ

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{F}(Q, \mathbf{z}) := (A + \mathbf{g})^{-1}(Q\beta(\mathbf{z})\mathbf{S} + \mathbf{f}) \quad \text{compacto en } \mathbb{R}^3$$

si $Q = 0 \longrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{0}$ **única solución** $\longrightarrow$ luego $F(0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

$\hat{\Sigma}$ contiene dos componentes no acotadas $\hat{C}^+$ y $\hat{C}^-$ $\hat{C}^+ \cap \hat{C}^- = \{(0, \mathbf{0})\}$

Σ es una traslación de $\hat{\Sigma}$

Σ contiene dos componentes no acotadas C^+ y C^- $C^+ \cap C^- = \{(0, \mathbf{g}^{-1}(-C\mathbf{e}))\}$

nuestro modelo $Q \geq 0 \longrightarrow C^+ \longrightarrow$ proyección sobre el eje Q es $[0, \infty)$

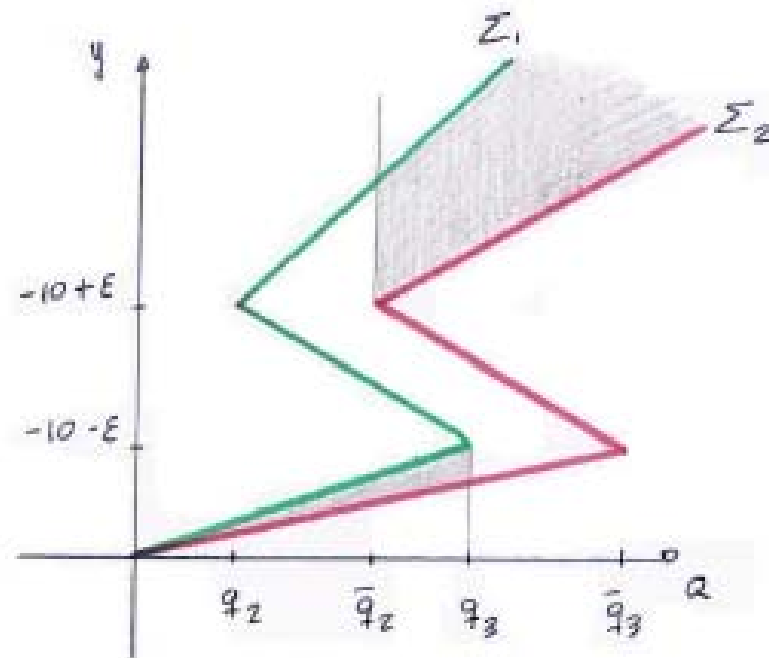
no acotada

$Q > Q_4 \longrightarrow (P_Q^\infty)$ tiene solución única $\mathbf{y}_Q \longrightarrow (\infty, \infty)$
 mayor que $\mathbf{g}^{-1}((Qs_0M - C)\mathbf{e})$ $\lim_{|s| \rightarrow \infty} |g(s)| = +\infty$

Paso 2: Diagrama de bifurcación para dos problemas auxiliares

$(P_1) \quad \mathbf{g}(\mathbf{y}) + C\mathbf{e} = Qs_1\beta(\mathbf{y})\mathbf{e} \longrightarrow \Sigma_1 \text{ y } \Sigma_2 \text{ tienen forma de S}$
 $(P_2) \quad \mathbf{g}(\mathbf{y}) + C\mathbf{e} = Qs_0\beta(\mathbf{y})\mathbf{e}$

Paso 3: Argumento de comparación



$$q_2 = \frac{g(-10+E) + C}{s_1 M} ; \quad q_3 = \frac{g(-10-E) + C}{s_1 u}$$

$$\bar{q}_2 = \frac{g(-10+E) + C}{s_0 M} ; \quad \bar{q}_3 = \frac{g(-10-E) + C}{s_0 u}$$

3 Controlabilidad: Nuevos resultados

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(y(t), u(t)), & t > 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$$

control

$$y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$$

estado

$$y(0) = y_0$$



$$y_d = y(T; u(T))$$

estado deseado

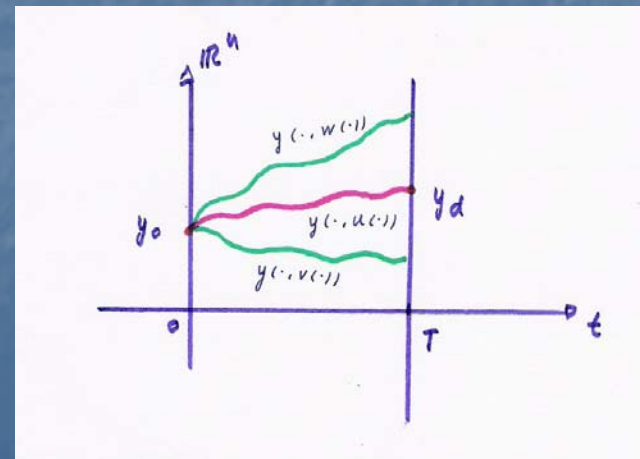
$$T > 0$$

controlabilidad

controlable en tiempo T si, para cada estado inicial $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y cada estado deseado $y_d = y(T) \in \mathbb{R}^n$ existe al menos un control $u \in \mathcal{U}$ de tal forma que $y(T; u(T)) = y_d$.

$$\mathcal{U} = L^\infty(0, \infty; \mathbb{R}^m)$$

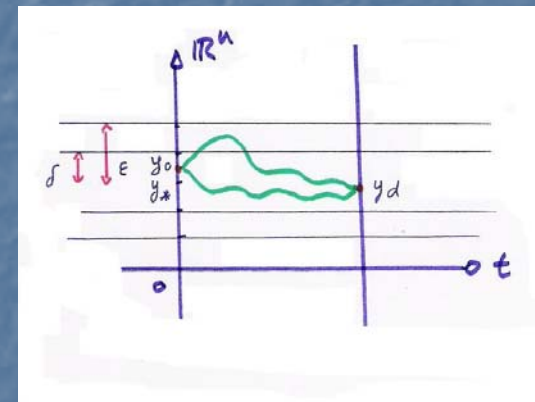
controles admisibles



controlabilidad local

Sea $B_r(\mathbf{x})$ la bola de centro $\mathbf{x}$ y radio r en $\mathbb{R}^n$. Se dice que el sistema es “localmente controlable en $\mathbf{y}_* \in \mathbb{R}^n$ en un tiempo T ” si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta \in (0, \epsilon)$ tal que para cualesquiera $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_d \in B_\delta(\mathbf{y}_*)$ existe un control $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ verificando:

1. $\mathbf{y}(T; \mathbf{u}(T)) = \mathbf{y}_d$,
2. $\mathbf{y}(t; \mathbf{u}(t)) \in B_\epsilon(\mathbf{y}_*)$ para todo $t \in [0, T]$.



Controlabilidad vía linealización

Teorema Supongamos que $\mathbf{f}$ es continuamente diferenciable en un entorno de un punto de equilibrio $(\mathbf{y}_\infty, \mathbf{u}_\infty)$. Entonces, si la linealización del sistema en torno a $(\mathbf{y}_\infty, \mathbf{u}_\infty)$ verifica la condición de Kalman, se tiene que nuestro sistema es localmente controlable en el punto $\mathbf{y}_\infty$ para cualquier $T > 0$.

matriz de controlabilidad (o de Kalman)

$$K = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathcal{M}_{n \times nm}$$

$$\text{rg}(K) = n \text{ (condición de Kalman)}$$

$$A = D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{y}_\infty, \mathbf{u}_\infty) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\mathbf{y}_\infty, \mathbf{u}_\infty) \right)_{i,j=1 \dots n}$$

$$B = D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{y}_\infty, \mathbf{u}_\infty) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\mathbf{y}_\infty, \mathbf{u}_\infty) \right)_{i,j=1}^{n,m}$$

Resultados modelo continuo

Díaz, García (RACSAM)

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + g(y) = (v\chi_\omega + 1)QS(x)\beta(y) + f(t, x) , & \text{en } (0, T) \times \Omega , \\ \frac{\partial y}{\partial \vec{n}} = 0 , & \text{en } (0, T) \times \partial\Omega , \\ y(0, \cdot) = y_0(\cdot) , & \text{en } \Omega , \end{cases}$$

abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^2$

ω abierto acotado de Ω

$$g(y) = \lambda |y|^{p-1} y , \quad y \in \mathbb{R} , \quad \lambda > 0 , \quad p > 1$$

modelo de Sellers (p=4)

“aproximadamente controlable” $\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in L^2((0, T) \times \omega)$ tal que.

$$\|y(T, \cdot; u_\epsilon) - y_d(\cdot)\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq \epsilon$$

fenómeno de obstrucción

$y_0 \in L^\infty(\Omega)$ existe $Y_\infty \in C([0, T] \times (\Omega - \bar{\omega}))$ tal que para todo $u \in L^2((0, T) \times \omega)$

$$\begin{cases} Y_\infty(t, x) = +\infty , & \forall (t, x) \in (0, T) \times \partial\omega , \\ \frac{\partial Y_\infty}{\partial \vec{n}}(t, x) = 0 , & \forall (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega . \end{cases}$$

$$|y(t, x; u)| \leq Y_\infty(t, x) , \quad \forall (t, x) \in (0, T] \times (\Omega - \bar{\omega})$$

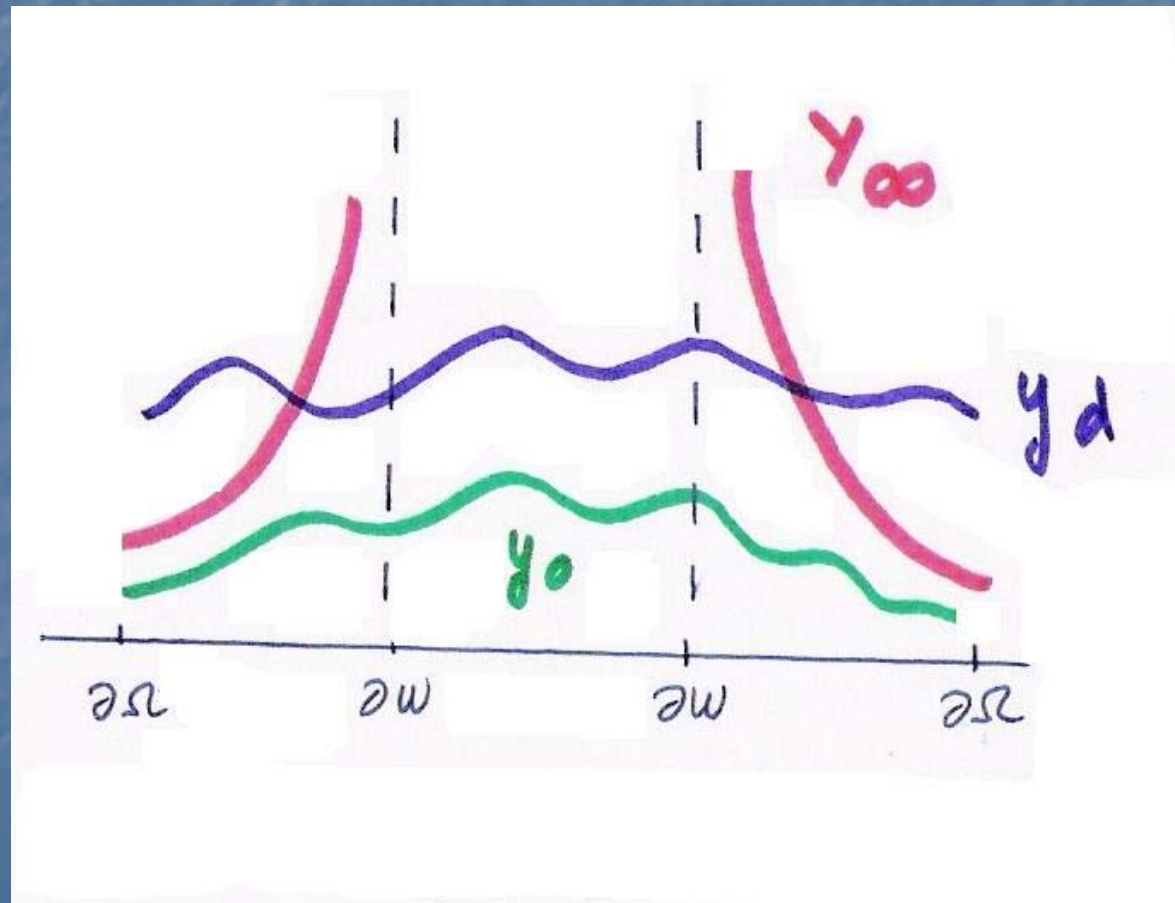
$$y_d \in L^2(\Omega)$$

$$|y_d(x)| > Y_\infty(T, x), \quad \forall x \in D$$



no es
aproximadamente
controlable

$D \subset \Omega - \bar{\omega}$ es un subconjunto de medida positiva



Nuevos resultados para el modelo discretizado

$$(P_Q)^v \begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) + A_N \mathbf{y}(t) = \mathbf{R}_a(\mathbf{y}(t), v(t)) - \mathbf{R}_e(\mathbf{y}(t), u(t)) , & t > 0 , \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 , \end{cases}$$

$$Q = Q_0 \text{ fijo}$$

Teorema 3 Sea $(v_f Q_0, \mathbf{y}_f)$ un estado estacionario estable de $(P_{Q_0})^v$. Entonces

1. Si $v(t)$ actúa sobre todos los nodos de la partición entonces para cualquier otro estado estacionario $(v_0 Q_0, \mathbf{y}_0)$ existe un instante de tiempo $T > 0$ y un control continuo a trozos $v \in L^\infty(0, T)$ tal que la solución $\mathbf{y}(t)$ de $(P_{Q_0})^v$ con dato inicial $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ verifica $\mathbf{y}(T) = \mathbf{y}_f$.
2. En el caso de que $v(t)$ esté localizado en el nodo ecuatorial de la partición se obtiene el mismo resultado siempre y cuando $(v_0 Q_0, \mathbf{y}_0)$ y $(v_f Q_0, \mathbf{y}_f)$ estén suficientemente próximos.

Demostración

$$y_1 = y_3$$

temperatura simétrica respecto del Ecuador

$$f \equiv 0$$

1.

$$(P) \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} k(y_2 - y_1) + v(t)R_a(y_1) - g(y_1) \\ 2k(y_1 - y_2) + v(t)R_a(y_2) - g(y_2) \end{pmatrix}$$

$$(Q(\tau) = v(\tau)Q_0, \mathbf{y}^*(\tau)) \quad \text{camino } C^1$$

$$Q(\tau) = (1 - \tau)v_0Q_0 + \tau v_fQ_0 = v(\tau)Q_0, \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\mathbf{y}^*(\tau) \text{ es solución de } (P_{Q_0}^\infty)^{v(\tau)}, \quad \tau \in [0, 1].$$

dado $\epsilon > 0$

pequeño

$$[0, 1/\epsilon] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

$$(Q^\epsilon(t), \mathbf{y}^\epsilon(t)) = (Q(\epsilon t), \mathbf{y}^*(\epsilon t))$$

“casi” una solución de $(P_{Q_0})^{v(\epsilon t)}$

$$\left\| \dot{\mathbf{y}}^\epsilon(t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^\epsilon(t), 1, v(\epsilon t), Q_0) \right\| = O(\epsilon)$$

como $(v_fQ_0, \mathbf{y}_f)$ es estable podemos asumir que $\mathbf{y}^\epsilon(T_\epsilon)$ (con $T_\epsilon = 1/\epsilon$) está próximo a $\mathbf{y}_f$

Conectaremos ahora $\mathbf{y}^\epsilon(T_\epsilon)$ con $\mathbf{y}^f$ mediante un control $\hat{v}(t)$ definido en $[T_\epsilon, T]$

Linealizando (P) en torno a $(v_f Q_0, \mathbf{y}_f)$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = C\mathbf{y}(t) + Bv(t)$$

$$C = \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{f}(\mathbf{y}_f, 1, v_f, Q_0) = \begin{pmatrix} -k + av_f - d & k \\ 2k & -2k + bv_f - e \end{pmatrix}$$

$$B = \nabla_v \mathbf{f}(\mathbf{y}_f, 1, v_f, Q_0) = \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = R'_a(y_f^1), & b = R'_a(y_f^2), & d = g'(y_f^1), \\ e = g'(y_f^2), & \tilde{a} = R_a(y_f^1), & \tilde{b} = R_a(y_f^2). \end{cases}$$

$$rg [B, CB] = 2 \Leftrightarrow \det([B, CB]) \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{a}\tilde{b}(v_f(b-a) + (d-e)) + (\tilde{a}-\tilde{b})k(2\tilde{a}+\tilde{b}) \neq 0$$

condición de Kalman

2.

$$(P) \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} k(y_2 - y_1) + R_a(y_1) - g(y_1) \\ 2k(y_1 - y_2) + v(t)R_a(y_2) - g(y_2) \end{pmatrix}$$

Linealizando (P) en torno a $(v_0 Q_0, \mathbf{y}_0)$

$$C = \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, 1, v_0, Q_0) = \begin{pmatrix} -k + a - d & k \\ 2k & -2k + bv_0 - e \end{pmatrix}$$

$$B = \nabla_v \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, 1, v_0, Q_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$$

$$rg [B, CB] = 2 \Leftrightarrow \det([B, CB]) \neq 0 \Leftrightarrow k\tilde{b}^2 \neq 0$$

condición de Kalman



controlabilidad
(suf. próximos)

Conclusiones

1. Diagrama de bifurcación en forma de S
(como en el caso continuo)
2. Evitar el fenómeno de obstrucción del
modelo continuo bajo hipótesis más
relajadas