MÉTODOS TOPOLÓGICOS EN DINÁMICA DE POBLACIONES.

Trabajo de fin de Master propuesto por

José Manuel Rodríguez Sanjurjo

Una propiedad importante de algunos sistemas dinámicos utilizados para modelar la evolución temporal de las poblaciones es la permanencia, también conocida con el nombre de persistencia uniforme. Esta noción recoge la idea de que ninguna de las especies que configuran un ecosistema se extingue con el tiempo y, por el contrario, todas ellas evolucionan hacia estados de coexistencia estable. La permanencia es equivalente a la existencia de un atractor global, que representa el estado o estados hacia los que evoluciona el sistema con independencia de las condiciones iniciales.

Puesto que las poblaciones están constituidas por un número positivo (o cero) de elementos, los sistemas que las representan suelen estar definidos en el octante no-negativo del espacio euclídeo. La no extinción de las especies se traduce en que las trayectorias del sistema no se aproximan al borde cuando $t \to \infty$. Uno de los resultados clásicos es el Teorema de Butler-Waltman, que establece condiciones suficientes para la permanencia, que se pueden verificar con sencillez estudiando el comportamiento del sistema cerca del borde de $\mathbb{R}^n_+$. Este resultado es la formulación abstracta de un argumento que ha sido utilizado frecuentemente en Biología Matemática, especialmente en relación con los modelos predador-presa, coexistencia permanente y exclusión competitiva. El teorema y otros resultados relacionados han sido formulados en contextos más generales, a menudo de naturaleza topológica, por Butler, Freedman, Garay, Hale, Hirsch, Hofbauer, Waltman y otros. Las técnicas topológicas juegan un papel importante en esta teoría en su formulación actual, por ejemplo en el estudio de la robustez de la permanencia, que trata de establecer si ésta se mantiene después de pequeñas perturbaciones del sistema. Aquí la teoría del índice de Conley (una teoría de carácter homotópico y homológico) encuentra varias aplicaciones. Para estudiar la estructura del atractor global es también importante la Topología, en concreto la teoría de la forma de Borsuk además de las técnica homológicas y cohomológicas. Por último, ciertos aspectos de la teoría de Morse, en particular las ecuaciones de Morse de ciertas descomposiciones del atractor global, proporcionan un conocimiento muy útil para determinar su estructura fina. Por ejemplo, es posible deducir la existencia de atractores locales (contenidos en el global) de forma (shape) circular en ciertos casos a partir del conocimiento de las ecuaciones de Morse.

El trabajo de Master que se propone trataría de dar una exposición coherente y organizada de los resultados relevantes en este contexto y, en la medida de lo posible, realizar alguna nueva aportación.

Referencias.

N.P. Bhatia and G.P. Szego, Stability theory of dynamical systems, Grundlehren der Mat. Wiss. 16, Springer, Berlin, 1970.

G. Butler, P. Waltman, Persistence in Dynamical Systems, J. Differential Equations 63 (1986) 425-430.

K. Borsuk. Theory of Shape, Monografie Matematyczne 59, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975.

C. Conley and E. Zehnder, Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984) 207-253.

B.M. Garay, Uniform persistence and chain recurrence, Journal of Mathematical Analysis and its Applications 139 (1989) 372-381.

B.M. Garay, J. Hofbauer, Robust permanence for ecological differential equations, minimax and discretizations, SIAM J. Math Anal. 34 (2003) 1007-1039.

A. Hatcher, Algebraic Topology. Cambridge University Press, Cambridge 2002.

M.W. Hirsch, H.L. Smith, X-Q. Zhao. Chain transitivity, attractivity and strong repellors for semidynamical systems. J. Dynam. Differential Equations 13 (2001) 107-131.

L. Kapitanski and I. Rodnianski, Shape and Morse theory of attractors, Communications in Pure and Applied Mathematics 53 (2000) 218-242.

S. Mardesic, Strong shape and homology. Springer monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

J. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, 1965.

J. Milnor, Morse Theory. (Annals Studies 51). Princeton University Press, 1963.

E. Outerelo, J. Ruiz, Mapping degree theory. Graduate Studies in Mathematics, 108. American Mathematical Society, Providence, RI; 2009.

J.C. Robinson, Global attractors: topology and finite-dimensional dynamics, J. Dynam. Differential Equations 11 (1999), n^o 3, 557-581.

J.M.R. Sanjurjo, Stability, attraction and shape: a topological study of flows. Lecture Notes in Nonlinear Analysis. Schauder Center for Nonlinear Studies (2011) 93-122.

S.J. Schreiber, Criteria for C-robust permanence . J. Differential Equations 162 (2000) 400-426.

H. L. Smith, H. R. Thieme. Dynamical systems and population persistence. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island 2011.