GEOMETRÍA DE SUPERFICIES TOPOLÓGICAS

Curso 2012/13, Máster en Matemáticas Avanzadas

Profesor: Vicente Muñoz Velázquez (despacho 440)
Email: vicente.munoz@mat.ucm.es
Página web: www.mat.ucm.es/~vmunozve/master.html

Objetivos, metodología y método de evaluación: Con el objetivo de estudiar y clasificar las variedades, hacemos un análisis interdisciplinar de éstas con técnicas de topología, geometría diferencial, geometría riemanniana, geometría compleja y geometría algebraica. Lo haremos a través del estudio de las variedades de dimensión 2, las superficies, pero con constantes menciones al caso de dimensión superior.

Los ejercicios deberán ser resueltos por los alumnos en las clases prácticas. La participación en clase (y alguna posible exposición oral) puede ser suficiente en algunos casos para la calificación final, aunque en todo caso habrá un examen final para fijar o subir la calificación.

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

1. Superficies topológicas:
    a. Variedades topológicas y variedades diferenciables.
    b. Topología cocientes. Variedades PL.
    c. Variedades con borde. Orientabilidad. Suma conexa.
    d. Clasificación de superficies compactas.
2. Propiedades topológicas:
    a. Grupo fundamental.
    b. Recubridores. Recubridor universal. Recubridor orientado.
    c. Grupos de homología. Característica de Euler-Poincaré.
    d. Grupos de cohomología de De Rham.
    e. Grado de aplicaciones entre superficies.
3. Geometría riemanniana:
    a. Métricas riemannianas. Curvatura. Geodésicas.
    b. Teorema de Gauss-Bonnet.
    c. Variedades homogéneas, simétricas e isotrópicas.
    d. Orbifolds. Recubrimientos ramificados.
4. Métricas de curvatura constante:
    a. Formas espaciales. Grupos de isometrías.
    b. Geometría elíptica. La esfera de Riemann.
    c. Geometría hiperbólica. El postulado de las paralelas.
    d. Métricas de curvatura constante en superficies.
5. Geometría compleja:

   a. Variedades complejas. Estructuras casi-complejas. Integrabilidad.
   b. Estructuras hermíticas y Kähler. Variedades proyectivas.
   c. Estructuras conformes.
   d. Transformaciones conformes. Transformaciones de Möbius.
   e. Curvas elípticas. Función ρ de Weierstrass.
   f. Grupos Fuchsianos. Espacio de Teichmüller.
6. Uniformización:
   a. Operador de Laplace-Beltrami.
   b. Flujo de la curvatura.
   c. Existencia de métricas de curvatura constante en superficies.

BIBLIOGRAFÍA

- M.P. Do Carmo, Geometría Riemanniana, 2ª edición, Birkhäuser, 1988.
- B. O'Neill, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, 1983.
- F. Kirwan, Complex Algebraic Curves, London Mathematical Society, Student Texts 23, Cambridge, 1992.
- W.S. Massey, A basic course in algebraic topology. Graduate Texts in Math, 127. Springer-Verlag, 1991.
- V. Muñoz, Cien años de la Conjetura de Poincaré, La Gaceta de la RSME, Vol. 7 (2004) 629-653.
- R. Bott, L.W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Graduate Texts in Math, 82. Springer-Verlag, 1982.