PROPUESTA DE TRABAJO FIN DE MÁSTER:
UN TEOREMA DE BEURLING EN EL ESPACIO DE BERGMAN

PROFESORA: EVA A. GALLARDO-GUTIÉRREZ

1. Introducción

Uno de los problemas abiertos más importantes en Teoría de Operadores en espacios de Hilbert es determinar si existe un operador lineal y continuo que no tenga subespacios cerrados e invariantes no triviales. Este problema es conocido como *Problema del Subespacio Invariante.* Caracterizar los subespacios invariantes de un operador no sólo supone un conocimiento profundo de la Teoría de Operadores, sino también de otras áreas del análisis, como el Análisis de Fourier o la Teoría de Funciones. Por ejemplo, si ℓ^2 denota el espacio de Hilbert de las sucesiones de números complejos de cuadrado sumable, y $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es la base canónica de ℓ^2, la caracterización de los subespacios invariantes de un operador tan simple como el *operador desplazamiento* S definido por

$$Se_n = e_{n+1},$$

requiere la teoría de Beurling de la descomposición de las funciones del espacio de Hardy H^2 en funciones internas y funciones externas, teoría que data de finales de los años cuarenta.

De hecho, el Teorema de Beurling representa un resultado fundamental en la *Teoría de Funciones* moderna, caracterizando los subespacios cerrados e invariantes de S en término de las funciones internas. Más concretamente, si recordamos que H^2 es el espacio de funciones $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ analíticas en el disco unidad abierto $\mathbb{D}$ del plano complejo $\mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty,$$

el operador de desplazamiento S se identifica con el operador de multiplicación por la variable independiente z. En 1949, Beurling [2] probó que todo subespacio cerrado e invariante M para S tiene la forma $M = \theta H^2$, donde θ es una función interna. Aquí, una función interna es una función analítica en $\mathbb{D}$ con valores contractivos, i. e., $|\theta(z)| \leq 1$ para $z \in \mathbb{D}$, tal que los valores frontera

$$\theta(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} \theta(re^{it})$$

(los cuales existes en casi todo punto e^{it} con respecto a la medida de Lebesgue de $\partial\mathbb{D}$) tienen módulo 1 en casi todo e^{it}. La importancia de este resultado se refuerza, en cierto sentido, porque toda función interna θ puede ser factorizada, en principio, como producto de dos funciones internas: una de ellas conteniendo todos los ceros de θ en $\mathbb{D}$ (producto de Blaschke) y la otra, sin ceros en $\mathbb{D}$, una función singular interna, i. e., puede ser expresada con una fórmula integral de una medida singular en la circunferencia unidad.

En 1959, Lax [5] extendió el resultado al caso con valores vectoriales (en un espacio de dimensión finita), y Halmos [4] probó el caso de valores vectoriales infinito dimensional.

Desde entonces, la extensión del Teorema de Beurling a otros espacios de funciones analíticas ha llamado la atención de muchos expertos en Teoría de Operadores y Teoría de Funciones. Un caso particularmente importante es el caso del espacio de Bergman A^2, esto es, el espacio de funciones $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ analíticas en $\mathbb{D}$ tales que

$$\|f\|_{A^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} < \infty.$$

De hecho, la estructura de los subespacios invariantes de S en A^2 es tremendamente complicada; y su caracterización implicaría la resolución del *Problema del Subespacio Invariante* (véase [3], por ejemplo). No obstante, un resultado esencial en esta dirección fue probado por Aleman, Richter y Sundberg [1] en 1996 estableciendo, a "grosso modo", que los subespacios invariantes de S en A^2 se generan de forma similar al caso del espacio de Hardy H^2. La prueba de este resultado se basa en estimaciones delicadas de una generalización de la función armónica de Green en el disco unidad. Una simplificación del mismo ha sido establecida recientemente, vía el espacio de Hardy del bidisco ([6] y [7]).

2. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es doble. Por un lado, la compresión y desarrollo de la teoría de funciones de los espacios de Hardy H^p; fundamentalmente en su conexión con el Teorema de Beurling en H^2. Por otro, el análisis del problema correspondiente en el espacio de Bergman; así como la simplificación presentada utilizando el espacio de Hardy del bidisco (véase [6] y [7]). Esta "simplificación" del trabajo [1] determina un amplio espectro de aplicabilidad de estas técnicas.

3. Alumnos

El trabajo que se propone será llevado a cabo por el alumno D. David García, que se encuentra cursando el Máster en Matemáticas Avanzadas impartido en la Facultad de CC. Matemáticas de la UCM durante el curso 2015-2016.

Referencias

[1] A. Aleman, S. Richter and C. Sundberg, *Beurling's theorem for the Bergman space*, Acta Math., 177 (1996), no. 2, 275–310.

[2] A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math., 81, (1948).

[3] P. Duren and A. Schuster *Bergman Spaces*, American Mathematical Society, Providence, RI., 2004.

[4] P.R. Halmos, *Shifts on Hilbert spaces*, J. Reine Angew. Math., 208 (1961), 102–112.

[5] P.D. Lax, *Translation invariant subspaces*, Acta Math., 101 (1959), 163–178.

[6] K. Guo, S. Sun, D.Zheng and C. Zhong *Multiplication Operators on the Bergman Space via the Hardy Space of the bidisk*, J. Reine Angew. Math., 628 (2009), 129-168.

[7] S. Sun and D. Zheng, *Beurling type theorem on the Bergman space via the Hardy space of the bidisk*, Sci. China Ser. A, 52 (2009), 2517-252

Universidad Complutense de Madrid e ICMAT
Departamento de Análisis Matemático,
Facultad de Ciencias Matemáticas,
Plaza de Ciencias 3
28040, Madrid (SPAIN)

E-mail address: eva.gallardo@mat.ucm.es