

**PROPUESTA DE TRABAJO FIN DE MÁSTER:
HIPERSUPERFICIES INVARIANTES POR ENDOMORFISMOS**

ALUMNO: ANTONIO RUBIO CALZADO

La dinámica compleja en dimensión superior es un área muy activa de investigación en matemáticas desde mediados de los 90 del siglo pasado. Incluye muy diversas aproximaciones, analíticas, geométricas y topológicas: por ejemplo, desarrollando la teoría del potencial en el caso de varias variables complejas, y tratando de extender los resultados conocidos en el caso clásico de una variable, o con el perfeccionamiento de la teoría de corrientes armónicas, estudiando las variedades como variedades foliadas...

Un problema interesante en dinámica compleja es el de estudiar las subvariedades invariantes de una variedad compleja compacta, bajo la acción de un endomorfismo $f : M \rightarrow M$. En concreto, podemos considerar las subvariedades *completamente invariantes*, es decir, subvariedades $V \subset M$ con la propiedad de que $f^{-1}(V) = V$.

Incluso en el caso en principio más elemental, aquel en el que M es \mathbb{P}^k , hay muchos problemas abiertos. En ese caso, se puede considerar el *conjunto excepcional* que es el mayor subconjunto algebraico propio completamente invariante (esta definición tiene sentido, según se muestra en [3]). Cuando $k = 2$, se puede demostrar (combinando resultados de Fornaess y Sibony [7] y de Gurjar [10]) que el conjunto excepcional es la unión de, a lo sumo, tres rectas. Sin embargo, el resultado análogo para espacios proyectivos de dimensión mayor está abierto: decidir si el conjunto excepcional es la unión de espacios lineales. Briend, Cantat y Shishikura dieron una demostración de este hecho [2], pero uno de los lemas usados esencialmente es incorrecto, y según nos comentó Cantat durante su visita al IMI en 2010, es necesaria una aproximación diferente al problema.

Hay algunos resultados en esta dirección (por ejemplo, Cerveau y Lins Neto [6]), donde demuestran que las hipersuperficies totalmente invariantes de grado mayor o igual que tres han de ser singulares). Por otra parte, en otra línea recientemente Amerik y Campana [1] han acotado el número de subespecies de codimensión dos completamente invariantes para un endomorfismo de grado mayor que uno.

En otra dirección, en 2010, Cantat [4] ha demostrado que si M es una variedad compleja compacta, y f es un endomorfismo dominante de M , y si existen k

hipersuperficies totalmente invariantes, con

$$k > \dim M + \dim H^1(M, \Omega_M^1)$$

entonces existe una función meromorfa Φ y un número complejo no nulo α de modo que

$$\Phi \circ f = \alpha \Phi.$$

Un resultado análogo había sido demostrado por Jouanolou [11] y Ghys [8] para variedades foliadas: si una foliación \mathcal{F} (con singularidades) de una variedad compacta compleja tiene un número suficientemente grande de hojas compactas (ese número depende de M y del *grado* de la foliación) tiene una integral primera meromorfa.

El objetivo del trabajo propuesto es estudiar en detalle este artículo de Cantat, que en particular requiere el manejo de técnicas fundamentales de la geometría de variedades complejas y algebraicas, al nivel de lo expuesto en el libro de Griffiths y Harris [9].

Por otra parte, se estudiarán los aspectos necesarios en lo referido a la dinámica, haciendo uso de algunos artículos que dan una panorámica del mismo, como [5]. También se abordará la versión foliada del mismo que acabamos de mencionar, para lo cual se estudiarán los fundamentos de la teoría de foliaciones holomorfas. Se presentará finalmente el panorama de lo que es conocido actualmente en el problema de los subconjuntos algebraicos totalmente invariantes para endomorfismos de espacios proyectivos.

REFERENCIAS

- [1] E. Amerik, F. Campana *Exceptional points of an endomorphism of the projective plane*, Math. Z., 249, no. 4 (2005), 741-755.
- [2] J.-Y. Briend, S. Cantat, M. Shishikura *Linearity of exceptional sets for maps of $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$* , Math. Annalen, 330, 1 (2004), 39-43.
- [3] J.-Y. Briend, J. Duval *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$* , Publications Mathématiques de l' IHES (2001), vol. 93, 145-159.
- [4] S. Cantat, *Invariant hypersurfaces in holomorphic dynamics*, Math. Research Letters, 17 (2010), no. 5, 833-831.
- [5] *Dynamics of automorphisms of compact complex surfaces* in "Frontiers in complex dynamics: In celebration of John Milnor's 80th. birthday" Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 463-514.
- [6] D. Cerveau, A. Lins Neto *Hypersurfaces exceptionnelles des endomorphismes de $\mathbb{C}P(n)$* , Bol. Soc. Bras. Mat. (N. S.) 31, (2000), no. 2, 155-161.
- [7] J. E. Fornæss, N. Sibony *Complex dynamics in higher dimension I*, Asterisque 222 (1994), pp. 201-231. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992).
- [8] E. Ghys, *À propos d'un théorème de J.-P. Jouanolou concernant les feuilles fermées des feuilletages holomorphes*, Rend. Cric. Mat. Palermo (2), 49 (1), (2000), 175-180.
- [9] Ph. Griffiths, J. Harris *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Classics Library. John Wiley and Sons, New York 1994 (reprint of the 1978 edition).
- [10] R.V.Gurjar, *On ramification of self maps of \mathbb{P}^2* , Journal of Algebra 259 (2003), 191-200.

- [11] J.-P. Jouanolou *Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique*, Math. Annalen 232 (3) (1978), 239-245.

TUTOR: LUIS GIRALDO SUÁREZ
DEPTO. GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA,
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID