

Propuesta de trabajo de Fin de Master:

Título: Algunas propiedades geométricas de las autofunciones del Laplaciano en variedades Riemannianas

Resumen: El objetivo general del trabajo es introducir al alumno en el estudio de algunos aspectos geométricos de las autofunciones del operador de Laplace-Beltrami en variedades Riemannianas compactas sin borde. Concretamente, nos centraremos en el estudio del número de puntos críticos de las autofunciones (esto es, los conjuntos donde el gradiente de la autofunción se anula). Uno de los problemas centrales en este contexto es una conjetura de Yau que afirma que el número de puntos críticos de cualquier sucesión de autofunciones tiende a infinito cuando el autovalor tiende a infinito. Dicha conjetura fue refutada por Jakobson y Nadirashvili (Journal of Differential Geometry 1999) mediante la construcción de una métrica en el 2-toro para la que existe una sucesión de autofunciones con autovalores crecientes y número de puntos críticos uniformemente acotado. Los objetivos concretos del trabajo son:

- (1) Entender la construcción de Jakobson y Nadirashvili, completando ciertas partes que están sólo esbozadas en el trabajo original.
- (2) Chequear si la conjetura de Yau débil se verifica en el ejemplo de Jakobson y Nadirashvili (esto es, si existe alguna sucesión de autofunciones de autovalor creciente para la que el número de puntos críticos tiende a infinito).
- (3) Entender los conjuntos nodales de las autofunciones en la sucesión de Jakobson y Nadirashvili (el conjunto nodal es el conjunto de puntos donde se anula la autofunción).
- (4) Extender esta construcción a variedades de dimensión mayor que 2.
- (5) Visualización de puntos críticos y conjuntos nodales de las autofunciones de Jakobson y Nadirashvili mediante el ordenador (usando Mathematica).