

CONTORNOS DE JAMES, AXIOMA DE MARTIN Y (P)-PROPIEDADES EN ESPACIOS DE BANACH DUALES

Por

HERNÁN JAVIER CABANA MÉNDEZ (Director: Antonio Suárez Granero)

Título: Contornos de James, copias de $\ell_1(c)$ y P-propiedades en espacios de Banach duales.

Breve resumen: El trabajo que presentamos está dedicado, en líneas generales, al estudio de los contornos de James en un espacio de Banach dual X^* . Cuando K es un subconjunto w^* -compacto de un espacio de Banach dual X^* , un subconjunto B de K se dice que es un **contorno (de James)** de K cuando todo $x \in X$ alcanza en B su máximo sobre K . Por ejemplo, el propio K o el conjunto de los puntos extremos $\text{Ext}(K)$ de K son contornos de K . Si B es un contorno de K , siempre ocurre que $w^*\text{-cl-co}(B) = w^*\text{-cl-co}(K)$ pero, en general, $\text{norm-cl-co}(B) \neq w^*\text{-cl-co}(K)$. Nos vamos a dedicar a estudiar las consecuencias de la igualdad $\text{norm-cl-co}(B) = w^*\text{-cl-co}(K)$ y de la desigualdad $\text{norm-cl-co}(B) \neq w^*\text{-cl-co}(K)$. El estudio de los contornos de James y de las propiedades que pasan del contorno B a todo el conjunto $w^*\text{-cl-co}(K)$, y viceversa, es un campo de investigación de creciente interés. Nos vamos a centrar en los siguientes resultados

(a) {Resultados de localización}. Se trata de ver que el w^* -compacto $K \subset X^*$ contiene una estructura, que denominamos una w^* -N-familia, y una copia de la base de $\ell_1(c)$ siempre que $\text{norm-cl-co}(K) \neq w^*\text{-cl-co}(K)$. ¿Qué podemos decir acerca de K ó de B en lo relativo a contener una w^* -N-familia y una copia de la base de $\ell_1(c)$? Vemos que en muchos caso existe en K -y en algunas situaciones en B - una w^* -N-familia y una copia de la base de $\ell_1(c)$, cuando $\text{norm-cl-co}(B) \neq w^*\text{-cl-co}(K)$. Aún más, vamos a probar que, en muchas situaciones (que incluyen los contornos $\text{Ext}(K)$, contornos w^* -K-analíticos, w^* -contablemente determinados, etc., el w^* -compacto K contiene una w^* -N-familia ó una copia de la base de $\ell_1(c)$ si y sólo si la contiene el contorno $B \subset K$.

(b) {Resultados cuantitativos sobre distancias}. Estamos interesados en comparar las distancias $\text{DIST}(B, C)$ con la distancia $\text{DIST}(w^*\text{-cl-co}(K), C)$, cuando C es un subconjunto convexo de X^* y

B un contorno de un cierto subconjunto w^* -compacto $K \subset X^*$. Mostramos que para ciertas clases de subconjuntos convexos C existe una constante M tal que $\text{DIST}(w^*\text{-cl-co}(K), C) \leq M \cdot \text{DIST}(B, C)$ para todo subconjunto w^* -compacto K de X^* y todo contorno $B \subset K$. En particular demostramos que $\text{DIST}(B, X) = \text{DIST}(B(X^{**}), X)$ para todo contorno B de $B(X^{**})$.

(c) Resultados que relacionan la propiedades (P) con los contornos w^* -contablemente determinados la propiedad super-(P) con la igualdad $X^{**} = \text{Sewq}(X^{**})$.

Finalmente, aplicamos con gran provecho el Axioma de Martin (y otras modalidades de este Axioma como $\text{MA}(\omega_1)$, MM) a la obtención de nuevos resultados.