FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Máster
De Tayomara Anjara Borsich González
Dirigido por Elena Martín Peinador

El grupo de los caracteres de un grupo topológico abeliano. Cardinalidad y Conexión.

El trabajo que proponemos se basa en el TFG defendido en 2016 en el que se describe una topología ν que hace del grupo aditivo de los reales $\mathbb{R}$ un grupo topológico compacto y de Hausdorff. La topología ν se obtiene a través de un isomorfismo algebraico entre $\mathbb{R}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ y el grupo de todos los caracteres de los racionales $Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$, dónde $\mathbb{T}$ designa el círculo unidad del plano complejo.

Primero probamos que $Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ admite una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, con dimensión la potencia del continuo. Por otra parte tiene también una topología natural, la heredada del producto $\mathbb{T}^{\mathbb{Q}}$. Llamaremos $Hom_p(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ a $Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ dotado de dicha topología. Si fijamos un isomorfismo algebraico Φ entre los espacios vectoriales de la misma dimensión $\mathbb{R}$ y $Hom_p(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$, al imponer que dicho isomorfismo sea topológico obtenemos la topología ν mencionada arriba.

A través de herramientas cómo el *Teorema de dualidad de Pontryagin-van Kampen* obtuvimos en el TFG que $(\mathbb{R}, \nu)$ es conexo, pero no es conexo por caminos, ni localmente conexo. Posteriormente hemos probado que $CHom(\mathbb{Q}_u, \mathbb{T})$ es un conjunto de primera categoría en $Hom_p(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$, dónde $\mathbb{Q}_u$ designa el grupo de los racionales dotado de la topología euclídea, y $CHom(\mathbb{Q}_u, \mathbb{T})$ el grupo de sus carateres continuos. Este resultado ya podría forma parte del TFM, dónde queremos estudiar las siguientes cuestiones.

Si G es un grupo topológico abeliano cualquiera:
1) Qué relación existe entre el grupo de los caracteres continuos de G, $CHom(G, \mathbb{T})$, y el grupo de todos los caracteres $Hom(G, \mathbb{T})$.
1-a) Estudiar la cardinalidad de $Hom(G, \mathbb{T}) \setminus CHom(G, \mathbb{T})$.
1-b) Cómo se encaja $CHom(G, \mathbb{T})$ en $Hom(G, \mathbb{T})$ si ambos están dotados de la topología de la convergencia puntual.
2) Cómo influyen las propiedades topológicas de G, por ejemplo si G es metrizable, o compacto, o localmente compacto, o normal en las dos preguntas del apartado 1).

Referencias

[1] M. J. Chasco, E. Martín-Peinador, V. Tarieladze : *On Mackey topology for groups.* Studia Mathematica 132 (3) (1999).

[2] W. Comfort: *Topological Groups*. Handbook of Set-Theoretic Topology, Chapter 24 (1984).

[3] E. K. van Douwen: *The maximal totally bounded group topology on G and the biggest minimal G-space for abelian groups G*. Topology and its Applications 34 (1990) 69-91.

[4] W. Rudin *Fourier Analysis on Groups*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. Number 12.

[5] M. Bruguera Padró, E. Matín-Peinador: *Compact Hausdorff group topologies for the additive group of real numbers*. A Mathematical tribute to Professor José María Montesinos Amilibia. Departamento de Geometría y Topología de la U.C.M. (2016) 491-497.