DINÁMICA DE POBLACIONES: UNA PERSPECTIVA TOPOLÓGICA

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER PROPUESTO POR:
HÉCTOR BARGE YÁÑEZ Y JOSÉ MANUEL RODRÍGUEZ SANJURJO

Una noción importante en el estudio de dinámica de poblaciones es la de *permanencia* o *persistencia uniforme*. Esta noción recoge la idea de que ninguna de las especies que conforman una población se extingue con el tiempo y, por el contrario, todas ellas evolucionan hasta un estado de coexistencia estable. Puesto que las poblaciones están constituidas por un número no negativo de individuos, la evolución de un ecosistema conformado por n poblaciones suele modelarse a través de un flujo o un homeomorfismo *disipativo* definido en $\mathbb{R}^n_+$, el ortante no negativo de espacio Euclídeo n-dimensional. Desde el punto de vista dinámico, la permanencia del sistema es equivalente a la existencia de un atractor en el interior de $\mathbb{R}^n_+$ que atrae todo el interior de $\mathbb{R}^n_+$. Este atractor representa el estado o estados hacia los que evoluciona el sistema cuando todas las poblaciones tienen una cantidad positiva de individuos.

En el estudio de la permanencia, la topología juega un papel importante. Por ejemplo, el Teorema de Butler-Waltmann [4], reformulado por Garay [8] y Hofbauer [12], establece condiciones suficientes sobre el compartamiento del flujo cerca del borde de $\mathbb{R}^n_+$ que garantizan permanencia de un sistema. Por otro lado, Wójcik [27, 28] en el caso continuo y Szymczak, Wójcik y Zgliczyński [26] en el caso discreto establecen condiciones necesarias, en términos del índice de Conley, para la permanencia de un sistema disipativo. La topología también encuentra aplicaciones al estudio de la robustez de la permanencia. Algunos resultados en esta dirección se deben a Sanjurjo [24], y Giraldo, Laguna y Sanjurjo [9]. Cabe destacar que si se consideran familias parametrizadas de flujos disipativos, una bifurcación de Hopf en el borde de $\mathbb{R}^n_+$ puede transformar un sistema con propiedades extremas de no permanencia en uno permanente. Este tipo de fenómenos pueden entenderse en detalle utilizando la teoría de la forma de Borsuk [5]. Otro resultado topológico que juega un papel importante en el estudio de la permanencia es el Teorema de punto fijo de Brouwer, utilizado por Campos, Ortega y Tineo [6] para probar que en un sistema discreto en el disco (compactificación por un punto de $\mathbb{R}^n_+$) que no tiene puntos fijos interiores, cualquier condición inicial evoluciona hacia la extinción de alguna de las especies. Resultados similares en el caso continuo han sido obtenidos por Barge y Sanjurjo [1]. Otros resultados de carácter topológico relacionados con la permanencia pueden encontrarse en los trabajos de Ruiz-Herrera [22, 23].

El tema propuesto es continuación del Trabajo de Fin de Máster “Métodos Topológicos en Dinámica de Poblaciones” presentado por Héctor Barge Yáñez en el curso 2011/2012. Se pretende realizar una revisión del tema y discutir resultados posteriores de varios autores y, en la medida de lo posible, presentar alguna aportación original.

Referencias

[1] H. Barge, J.M.R. Sanjurjo, Flows in $\mathbb{R}^2_+$ without interior fixed points, global attractors and bifurcations, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM (2017). DOI: 10.1007/s13398-017-0455-y

[2] H. Barge, K. Wójcik, Mayer-Vietoris property of the fixed point index, Topol. Methods Nonlinear Anal. 50 (2017), no. 2, 643–667.

[3] N.P. Bhatia, G.P. Szegö, Stability Theory of Dynamical Systems, Grundlehren der Mat. Wiss. 16, Springer, Berlín, 1970.
[4] G. Butler, P. Waltman, Persistence in dynamical systems, J. Differential Equations 63 (1986) 425–430.
[5] K. Borsuk, Theory of Shape, Monografie Matematyczne 59, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975.
[6] J. Campos, R. Ortega, A. Tineo, Homeomorphisms of the disk with trivial dynamics and extinction of competitive systems, J. Differential Equations 138 (1997), no.1, 157–170.
[7] C. Conley, Isolated Invariant Sets and the Morse Index, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, American Mathematical Society, Providence R.I., 1978.
[8] B.M. Garay, Uniform persistence and chain recurrence, J. Math. Anal. Appl. 139 (1989) 372–381.
[9] A. Giraldo, V.F. Laguna, J.M.R. Sanjurjo, Uniform persistence and Hopf bifurcations in $\mathbb{R}^n_+$, J. Differential Equations 256 (2014), no. 8, 2949–2964.
[10] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
[11] M.W. Hirsch, H.L. Smith, X-Q. Zhao, Chain transitivity, attractivity and strong repellors for semidynamical systems, J. Dynam. Diff. Equat. 13 (2001) 107–131.
[12] J. Hofbauer, A unified approach to persistence, Acta Appl. Math. 14 (1989) 11–22.
[13] M. Izydorek, M. Styborski, Stability, attraction and shape: a topological study of flows, Lecture Notes in Nonlinear Anal. Schauder Center for Nonlinear Studies 12 (2011) 37–60.
[14] L. Kapitanski, I. Rodnianski, Shape and Morse theory of attractors, Comm. Pure Appl. Math. 53 (2000) 218–242.
[15] S. Mardešić, J. Segal, Shape Theory. The inverse system approach, North Holland Mathematical Library, Noth Holland Publishing Co., Amsterdan-New York, 1982.
[16] J.W. Milnor, Topology From the Differentiable Viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, Va., 1965
[17] J.W. Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
[18] R. Obaya, A.M. Sanz, Is uniform persistence a robust property in almost periodic models? A well-behaved family: almost-periodic Nicholson systems, Nonlinearity 31 (2018), no. 2, 388–413.
[19] E. Outerelo, J. Ruiz, Mapping degree theory, Graduate studies in Mathematics 108, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
[20] J.C. Robinson, Global attractors: topology and finite dimensional dynamics, J. Dynam. Diff. Equat. 11 (1999), no. 3, 557–581.
[21] G. Roth, P.L. Salceanu, S.J. Schreiber, Robust permanence for ecological maps, SIAM J. Math. Anal. 49 (2017), no. 5, 3527–3549.
[22] A. Ruiz-Herrera, Topological criteria of global attraction with applications in population dynamics, Nonlinearity 25 (2012) 2823–2841.
[23] A. Ruiz-Herrera, Permanence of two species and fixed point index, Nonlinear Anal. 74 (2011) 146–153.
[24] J.M.R. Sanjurjo, On the fine structure of the global attractor of a uniformly persistent flow, J. Differential Equations 252 (2012), no. 9, 4886–4897.
[25] J.M.R. Sanjurjo, Stability, attraction and shape: a topological study of flows, Lecture Notes in Nonlinear Anal. Schauder Center for Nonlinear Studies 12 (2011) 93–122.
[26] A. Szymczak, K. Wójcik, P. Zgliczyński, On the discrete Conley index in the invariant subspace, Top. Appl. 87 (1998) 105–115.
[27] K. Wójcik, On the Conley index in the invariant manifolds, Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 17, 6342–6347.
[28] K. Wójcik, Conley index and permanence in dynamical systems, Topol. Methods Nonlinear Anal. 12 (1998) 153–158.