

PROPUESTA DE TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

Directores: Alejandro Melle

Alumno: Daniel Jáñez

Curso: 2018/2019

Título: Curvas elípticas sobre cuerpos p -ádicos y representaciones de Galois.

Resumen:

La motivación del concepto de curva elíptica viene dada por el estudio de un tipo de integrales a las cuales se las denominó integrales elípticas que aparecen en numerosos problemas como el cálculo de la longitud de arco de elipse o de lemniscata. En este contexto las curvas elípticas se definieron como las variedades complejas unidimensionales compactas de género topológico igual a uno donde dichas integrales deben de ser estudiadas para que estén bien definidas. Esta definición supone una limitación, pues nos obliga a hacer nuestro estudio en el cuerpo de los números complejos, pues en un cuerpo cualquiera no hay topología de antemano y en consecuencia no se dispone de género topológico.

Así pues, en la primera parte del trabajo se estudian los conceptos necesarios sobre geometría algebraica para poder enunciar y demostrar el teorema de Riemann - Roch y así poder introducir el concepto de género de una curva en un cuerpo algebraicamente cerrado cualquiera, lo cual nos permitirá extender el concepto de curva elíptica más allá del cuerpo de los números complejos.

En la segunda parte del trabajo se definirán conceptos como morfismos, isogenias y grupos de torsión, para ello se demostrará que toda curva elíptica puede ser escrita como los ceros de un polinomio de grado tres con un único punto en la línea del infinito, éstas ecuaciones polinómicas son las denominadas ecuaciones de Weierstrass, y las usaremos para demostrar que el conjunto de puntos racionales de una curva elíptica forman un grupo abeliano y que la ley de grupo está dada por funciones

racionales.

En la tercera parte del trabajo se particularizará en el estudio de curvas elípticas definidas sobre cuerpos p -ádicos, haciendo una introducción de estos cuerpos previamente y con el objetivo de poder dar cálculos explícitos del grupo de puntos p -ádicos en una curva elíptica.

Por último introduciremos las representaciones de Galois de curvas elípticas sobre cuerpos numéricos, centrándonos en el caso módulo p .