



---

Teorema del Punto fijo de Lefschetz  
e introducción a la función Zeta y  
las Conjeturas de Weil

---

Trabajo Fin de Máster

Marta Aldasoro Rosales

Dirigido por María Pe Pereira

Madrid, 10 de julio de 2020



# Índice general

Introducción	v
<b>1. Teorema del Punto fijo de Lefschetz</b>	<b>1</b>
1.1. Teorema del Punto fijo de Lefschetz para complejos simpliciales	1
1.1.1. Subdivisión baricéntrica . . . . .	4
1.1.2. Aproximación simplicial . . . . .	8
1.1.3. Demostración del teorema del punto fijo de Lefschetz .	11
1.2. Teorema del punto fijo de Lefschetz para variedades diferen- ciables compactas . . . . .	16
1.2.1. Teorema del Punto fijo de Lefschetz . . . . .	16
1.2.2. Número local de Lefschetz . . . . .	18
1.3. Igualdad del número de Lefschetz . . . . .	26
1.3.1. Teorema de De Rham, Dualidad de Poincaré y formas de Thom . . . . .	27
1.3.2. Demostración del Teorema . . . . .	30
1.4. Corolarios . . . . .	33
1.4.1. Característica de Euler-Poincaré . . . . .	33
1.4.2. Teorema del punto fijo de Brower . . . . .	34
<b>2. Función Zeta y Conjeturas de Weil</b>	<b>35</b>
2.1. Funcion Zeta de Riemann. . . . .	35
2.2. Función Zeta global de un anillo finítamente generado . . . .	37
2.2.1. Función Zeta para un esquema sobre un cuerpo finito.	39
2.2.2. Soluciones sobre cuerpos finitos . . . . .	39
2.2.3. Cuerpos finitos y automorfismo de Frobenius. . . . .	42
2.3. Conjeturas de Weil . . . . .	42
2.3.1. Racionalidad . . . . .	43
2.3.2. Ecuación funcional . . . . .	45

2.4. Desarrollo histórico del las conjeturas de Weil . . . . .	48
<b>A. Resultados previos para la demostración del Teorema del Punto Fijo de Lefschetz</b>	<b>53</b>
A.1. Grupos de homología relativa . . . . .	53
A.1.1. Caso particular para la homología relativa . . . . .	57
A.2. Complejos de cadenas celulares . . . . .	57
<b>B. Transversalidad y Número de intersección</b>	<b>61</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# Introducción

Es algo natural preguntarse cuándo una aplicación continua de un espacio en sí mismo tiene puntos fijos. Otra cuestión interesante sería cómo contar los puntos fijos. Es Salomon Lefschetz, quién en 1926, nos responde a estas preguntas, en el caso de complejos simpliciales, que son espacios construidos a partir de triángulos  $n$ -dimensionales, como lo son las variedades compactas.

Más tarde, en el año 1949, André Weil, al final de su artículo ‘Numbers of solutions of equations in finite fields’ [9] escribe: “This, and other examples which we cannot discuss here, seem to lend some support to the following conjectural statements, which are known to be true for curves, but which I have not so far been able to prove for varieties of higher dimension.” Esta frase introducía las llamadas conjeturas de Weil. Estas conjeturas trataban las funciones generatrices obtenidas al contar el número de puntos de variedades algebraicas sobre cuerpos finitos. Encontrando una cohomología adecuada estos puntos se pueden ver como puntos fijos de cierta aplicación. Tardaron décadas en poder demostrarlas y ha sido una parte central de la Geometría algebraica del siglo XX, pero, finalmente, en el año 1974, Pierre Deligne demuestra la conjetura que faltaba por probar, obteniendo así la medalla Fields en el año 1978.

Para desarrollar esto, hemos dividido el trabajo en dos capítulos. El primero tiene, a su vez, cuatro secciones. La primera trata de demostrar el Teorema del punto fijo de Lefschetz, que dice lo siguiente:

“Si  $X$  es un complejo simplicial finito y  $f : X \rightarrow X$  una aplicación con

$$\tau(f) := \sum_n (-1)^n \text{tr}(f_* : H_n(X, K) \rightarrow H_n(X, K)),$$

el número de Lefschetz distinto de cero, entonces  $f$  tiene un punto fijo”.

En la segunda sección se define de otra manera el número de Lefschetz que “cuenta” puntos fijos para cualquier aplicación de una variedad diferenciable compacta en sí misma cuyos puntos fijos son aislados. Este cálculo se hace a partir de lo que llamaremos número local de Lefschetz. Es en la tercera sección dónde demostramos que, efectivamente, ambos números de Lefschetz son iguales; para ello, necesitaremos usar el número de Lefschetz  $\tau(f)$  definido a partir de la cohomología de De Rham. Esta sección es la más importante de este primer capítulo. La cuarta sección abarca dos aplicaciones del Teorema del punto fijo de Lefschetz.

El segundo capítulo, también, lo hemos dividido en cuatro secciones. En la primera, introducimos la función Zeta de Riemann y enunciamos su famosa hipótesis. En la segunda sección, generalizamos esta definición para conseguir las funciones Zeta de variedades algebraicas sobre cuerpos finitos, pudiendo así en la tercera sección enunciar las conjeturas de Weil y demostrar dos de ellas asumiendo la existencia de una cierta cohomología sobre estas variedades cumpla tres propiedades, entre ellas, el Teorema del punto fijo de Lefschetz. Finalmente, en la cuarta sección, hablaremos de la evolución de estas conjeturas a lo largo de los años.

# Capítulo 1

## Teorema del Punto fijo de Lefschetz

### 1.1. Teorema del Punto fijo de Lefschetz para complejos simpliciales

El Teorema del Punto fijo de Lefschetz, demostrado por éste en el año 1926, nos dice cuándo una aplicación entre complejos simpliciales finitos tiene puntos fijos, haciendo uso de  $\tau(f)$ , llamado número de Lefschetz. En esta sección, nos hemos basado en [4] y [10].

En primer lugar, veamos quién es el número de Lefschetz.

**Definición 1.1.1.** Dado un homomorfismo  $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ , denotamos por  $[a_{ij}]$  su matriz asociada. Llamamos **traza** de  $\varphi$  a  $tr(\varphi) := \sum_i a_{ii}$ , es decir, a la suma de los elementos de la diagonal de la matriz  $[a_{ij}]$ .

**Observación 1.1.2.** Como la  $tr([a_{ij}] \cdot [b_{ij}]) = tr([b_{ij}] \cdot [a_{ij}])$ , tenemos que si  $[a_{ij}]$  y  $[b_{ij}]$  son matrices conjugadas:

$$tr([b_{ij}]) = tr([p_{ij}]^{-1} \cdot ([a_{ij}] \cdot [p_{ij}])) = tr([a_{ij}] \cdot [p_{ij}] \cdot [p_{ij}]^{-1}) = tr([a_{ij}]),$$

y, por tanto, la traza de  $\varphi$  es independiente de la base elegida para  $\mathbb{Z}^n$ .

Generalizamos la definición a un homomorfismo entre grupos abelianos finitamente generados.

**Definición 1.1.3.** Dado un homomorfismo  $\varphi : A \rightarrow A$  de grupos abelianos finitamente generados, definimos la **traza** de  $\varphi$  como la traza de la función

inducida

$$\bar{\varphi} : A/Torsión \rightarrow A/Torsión.$$

**Observación 1.1.4.** De esta manera tenemos una aplicación entre grupos abelianos libres finitamente generados, y por tanto, la traza está bien definida. Recordemos que todo grupo abeliano  $A$  finitamente generado es isomorfo a la suma directa de  $\mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_r}$ , para ciertos  $k, a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N}$ , siendo  $\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_r}$  la parte de torsión.

**Observación 1.1.5.** Si tomamos  $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , entonces cualquier endomorfismo de un  $\mathbb{Z}$ -módulo finitamente generado, es decir, cualquier aplicación  $\mathbb{Z}$ -lineal define una aplicación  $K$ -lineal del propio módulo sobre  $K$ , que tiene la misma base. Esto ocurre por ser  $K^n$  un  $\mathbb{Z}$ -módulo como grupo abeliano y  $\mathbb{Z}^n \oplus Torsión \otimes_{\mathbb{Z}} K = K^n$ . Por tanto,  $tr(\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n) = tr(\varphi' : K^n \rightarrow K^n)$ , donde  $\varphi'$  es la aplicación  $K$ -lineal correspondiente.

**Definición 1.1.6.** Dada una aplicación  $f : X \rightarrow X$ , con  $X$  un espacio topológico cuyos grupos de homología están finitamente generados, definimos el **número de Lefschetz** de  $f$  como:

$$\tau(f) := \sum_n (-1)^n tr(f_* : H_n(X, K) \rightarrow H_n(X, K)),$$

donde  $H_n(X, K)$  son los grupos de homología singular de  $X$  con coeficientes en  $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

**Observación 1.1.7.** El número de Lefschetz es un invariante homotópico.

*Demostración.* Dos aplicaciones homótopas inducen las mismas aplicaciones en homología singular. Por tanto, es un invariante homotópico.  $\square$

**Observación 1.1.8.** El número de Lefschetz se puede definir a partir de los grupos de cohomología con coeficientes en  $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , es decir,:

$$\tau(f) = \sum_n (-1)^n tr(f^* : H^n(X, K) \rightarrow H^n(X, K)).$$

*Demostración.* Tomamos una base  $\{e_j\}$  de  $H_i(X, K)$  con  $j \in \{0, \dots, n_i\}$  donde  $n_i = \dim H_i(X, K)$ , y consideramos la base dual  $\{e_j^*\}$  de  $H^i(X, K)$  tal que  $e_k^*(e_j) = \delta_{kj}$ .

Entonces, dada una aplicación  $f : X \rightarrow X$ , consideramos sus aplicaciones inducidas en homología  $f_* : H_i(X, K) \rightarrow H_i(X, K)$  y cohomología  $f^* :$

$H^i(X, K) \rightarrow H^i(X, K)$ , con  $A = (a_{kl})$  y  $B = (b_{kl})$  sus matrices asociadas, respectivamente. Es decir,

$$f_*(e_j) = \sum_{k=0}^{n_i} a_{kj} e_k; \quad f^*(e_j^*) = \sum_{k=0}^{n_i} b_{kj} e_k^*,$$

para  $j \in \{0, \dots, n_i\}$ .

Por el Teorema del Coeficiente universal,  $H^i(X, K) = \text{Hom}_K(H_i(X, K), K)$  cuando  $K$  es cuerpo. Entonces, tomamos  $f^*(e_j^*) : H_i(X, K) \rightarrow K$ . Por un lado, obtenemos:

$$(f^*(e_j^*))(e_k) = \left( \sum_{l=0}^{n_i} b_{lj} e_l^* \right) (e_k) = \sum_{l=0}^{n_i} b_{lj} e_l^*(e_k) = b_{kj}.$$

Por el otro lado, obtenemos:

$$(f^*(e_{j_*}))(e_k) = (e_j^* \circ f_*)(e_k) = e_j^*(f_*(e_k)) = e_j^* \left( \sum_{l=0}^{n_i} a_{lk} e_l \right) = \sum_{l=0}^{n_i} a_{lk} e_j^*(e_l) = a_{jk}.$$

Es decir, hemos probado que sus matrices inducidas son una la traspuesta de la otra. Por tanto, sus trazas son iguales, y hemos finalizado.  $\square$

En la sección 1.3, trabajaremos con esta expresión, ya que el producto cup hace que los grupos de cohomología sean anillos y tenemos teoremas muy útiles como son la fórmula de Künneth y la Dualidad de Poincaré.

Ahora, enunciaremos nuestro teorema principal:

**Teorema 1.1.9. (Punto fijo de Lefschetz)** *Si  $X$  es un espacio topológico con estructura de complejo simplicial finito y  $f : X \rightarrow X$  una aplicación con  $\tau(f) \neq 0$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

Para probar el teorema, vamos a ver que cualquier aplicación de un complejo simplicial finito en sí mismo que no tenga puntos fijos tiene número de Lefschetz igual a cero.

Haremos lo siguiente. Utilizando el Teorema de Aproximación simplicial para  $f$ , demostraremos que si  $f$  no tiene puntos fijos, utilizando la subdivisión baricéntrica, es decir, dividiendo  $X$  en símlices de diámetro tan pequeño como necesitemos, entonces  $f$  es homótopa a una aplicación simplicial que manda cada símlice de  $X$  a otro símlice de  $X$  distinto. En este

caso, todos los valores de la diagonal de la matriz asociada en homología celular a  $f_*$  son cero y, por tanto, también lo es su traza.

Para ello, veremos una primera subsección de cómo hacer una subdivisión baricéntrica de un símlice. Ésto nos permitirá demostrar el Teorema de Aproximación simplicial, que desarrollaremos en la siguiente subsección, clave para la demostración del teorema, que se presenta en la tercera subsección.

### 1.1.1. Subdivisión baricéntrica

Antes de introducir la subdivisión baricéntrica, recordaremos, sucintamente, la noción de complejo simplicial.

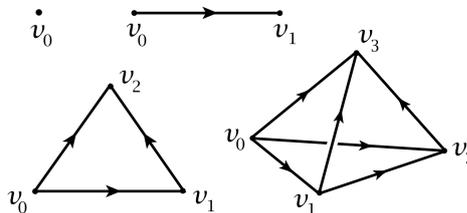
**Definición 1.1.10.** Llamamos **complejo simplicial (abstracto)** a una familia  $K$  de subconjuntos no vacíos de un conjunto fijo  $S$ , si para todo  $\alpha \in K$  y para todo subconjunto no vacío  $\beta \subset \alpha$ ,  $\beta \in K$ . Los conjuntos que pertenecen a  $K$  se llaman **símplices** de  $K$  y la dimensión de un símlice  $\alpha$  es  $\dim(\alpha) = \text{card}(\alpha) - 1$ . Si  $\alpha \subset \beta$ , se dice que  $\alpha$  es una **cara** de  $\beta$ . Se define la **dimensión de un complejo simplicial** como la máxima entre las dimensiones de sus símlices. Un complejo simplicial se dice **finito** si  $\text{card}(K) < \infty$ .

Se llama **conjunto de vértices** a la unión de todos los símlices del complejo y se llaman **vértices** a las caras de un solo elemento.

**Observación 1.1.11.** La definición de complejo simplicial es equivalente a pedir que cada subconjunto de una cara de  $K$  sea, a su vez, cara de  $K$ .

Veamos, entonces, que a cada complejo simplicial abstracto  $K$ , podemos asociarle un complejo simplicial con estructura de espacio topológico, que llamaremos realización topológica de  $K$ , que es con lo que nosotros trabajaremos y que denotaremos por  $|K|$ . Veamos su construcción. Comencemos dando estructura topológica a los símlices de  $K$ .

**Definición 1.1.12.** Un  $n$ -**símplice** es el menor conjunto convexo de  $\mathbb{R}^m$  que contiene  $n + 1$  puntos  $v_0, \dots, v_n$  que no generan un plano de dimensión menor que  $n$ , es decir, que los vectores  $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$  son linealmente independientes. Lo denotaremos por  $[v_0, \dots, v_n]$ , o simplemente, por  $\Delta$ .



**Definición 1.1.13.** Llamaremos  $n$ -**símplice estándar** al subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \text{ para todo } i\}$$

Observemos que existe un homeomorfismo afín entre un  $n$ -símplice cualquiera  $\Delta$  y  $\Delta^n$ , que está unívocamente determinado por la imagen de sus vértices:

$$\begin{aligned} \Delta^n &\rightarrow \Delta \\ (t_0, \dots, t_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n t_i v_i. \end{aligned}$$

Los coeficientes  $t_i$  son las **coordenadas baricéntricas** del punto

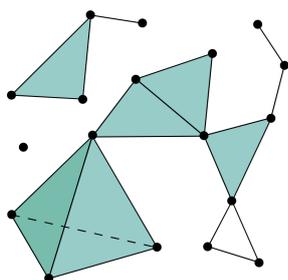
$$\sum_{i=1}^n t_i v_i \text{ en } [v_0, \dots, v_n].$$

En general, dado un complejo simplicial abstracto  $K$  finito de dimensión  $n$ , podemos construir su realización topológica como sigue. Consideramos una inmersión de los vértices de  $K$  en un subconjunto de  $\text{card}(K)$  puntos afínmente independientes de  $\mathbb{R}^{\text{card}(K)-1}$ . Tomando un  $(\text{card}(K) - 1)$ -símplice estándar, nos quedaría definido un isomorfismo entre los vértices de  $K$  y los vértices del símplice estándar.

Después, podemos identificar cada cara  $\alpha$  de  $K$  con el símplice  $\Delta$  generado por los  $\text{card}(\alpha)$  correspondientes vértices en el  $(\text{card}(K) - 1)$ -símplice estándar. Entonces, llamamos **realización topológica de  $K$**  al espacio topológico abstracto, que es unión de estos símplices dotado de la topología inducida del ambiente  $\mathbb{R}^{\text{card}(K)-1}$ .

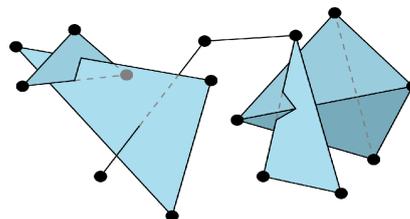
Como en la definición combinatoria, a cada espacio generado por un subconjunto no vacío de  $v_0, \dots, v_n$  le llamaremos **cara** y a los  $v_i$  les llamaremos **vértices**.

**Definición 1.1.14.** Llamamos **complejo simplicial** a la unión de un conjunto de vértices  $X_0$  con conjuntos  $X_n$  de  $n$ -símplices cuyos interiores son disjuntos tal que:



- (i) Sus respectivos conjuntos de vértices son subconjuntos de  $X_0$  con  $n + 1$  elementos.
- (ii) Para cada conjunto de  $n + 1$  vértices que genera un  $n$ -símplice, cada subconjunto de  $k + 1$  vértices genera un  $k$ -símplice, donde  $k < n$ .

**Observación 1.1.15.** En esta imagen obtenemos una construcción geométrica de un complejo simplicial abstracto que no es complejo simplicial. Los complejos simpliciales no tienen intersecciones no propias.

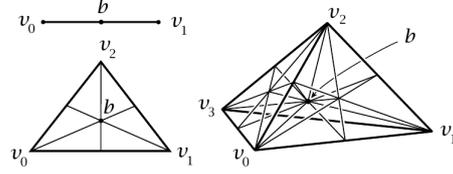


Una vez conocida la definición topológica de complejo simplicial, podemos empezar con la subdivisión baricéntrica.

**Definición 1.1.16.** Sean  $v_0, \dots, v_n$  los vértices de un  $n$ -símplice, llamamos **baricentro** del símplice al punto  $b := \sum_i t_i v_i$  con  $t_i = \frac{1}{n+1}$ , es decir, el punto con todas sus coordenadas baricéntricas iguales.

La **subdivisión baricéntrica** de un símplice  $[v_0, \dots, v_n]$  es la descomposición de  $[v_0, \dots, v_n]$  en  $(n+1)!$   $n$ -símplices  $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$ , donde  $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ , de manera inductiva, es un  $(n-1)$ -símplice en la subdivisión baricéntrica de la cara  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ . Fijémonos en la figura de la observación siguiente.

**Observación 1.1.17.** La definición de manera inductiva implica que los vértices de los símlices de la subdivisión baricéntrica de  $[v_0, \dots, v_n]$  sean, exáctamente, los baricentros de todas



las caras  $k$ -dimensionales  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$  de  $[v_0, \dots, v_n]$ , con  $0 \leq k \leq n$ . El baricentro de  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$  tiene coordenadas baricéntricas  $t_i = \frac{1}{k+1}$  con  $i \in \{i_0, \dots, i_k\}$  y  $t_i = 0$ , en caso contrario.

**Definición 1.1.18.** El **diámetro** de un símlice  $\Delta$  compacto en  $\mathbb{R}^m$  respecto a la distancia euclídea,  $d$ , es la mayor de las distancias entre sus puntos. Es decir,  $diam(\Delta) = \max\{d(x_i, x_j) : x_i, x_j \in \Delta\}$ .

**Proposición 1.1.19.** El diámetro de cada símlice de la subdivisión baricéntrica de un símlice  $[v_0, \dots, v_n]$  es menor que  $\frac{n}{n+1}diam([v_0, \dots, v_n])$ .

*Demostración.* Primero vamos a simplificar un poco la situación.

- (i) Tomamos dos puntos  $v, w$  de  $[v_0, \dots, v_n]$ , donde  $w = \sum_i t_i v_i$  en coordenadas baricéntricas. Entonces,

$$\begin{aligned} \|v - w\| &= \left\| v - \sum_i t_i v_i \right\| = \left\| \sum_i t_i (v - v_i) \right\| \leq \sum_i t_i \|v - v_i\| \leq \\ &\leq \sum_i t_i \max\{\|v - v_i\|\} = \max\{\|v - v_i\|\}. \end{aligned}$$

Es decir,  $d(v, w) \leq \max\{d(v, v_i)\} \leq \max\{d(v_j, v_i)\}$ .

Por tanto, con esta primera simplificación, podemos decir que los diámetros de  $[v_0, \dots, v_n]$  y  $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$  son el máximo de las distancias entre sus vértices, respectivamente.

- (ii) Por otro lado, los vértices  $w_k$  son puntos de un cara de  $[v_0, \dots, v_n]$ . Entonces, utilizando inducción sobre el número de vértices (para  $n = 0$ , es trivial) y el hecho de que  $\frac{n-1}{n} \leq \frac{n}{n+1}$ , tenemos que la distancia entre dos vértices  $w_k$  cumple la cota que buscamos. Por tanto, con esta segunda simplificación, podemos decir que el diámetro de  $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$  es el máximo de las distancias entre el baricentro y uno de sus vértices.

(iii) Como en particular los  $w_k$  son puntos de  $[v_0, \dots, v_n]$ , por la primera simplificación solo nos quedaría probar que el máximo de las distancias entre  $b$  y los  $v_i$  es menor que  $\frac{n}{n+1} \text{diam}([v_0, \dots, v_n])$ .

Para esto, denotamos por  $b_i$  el baricentro de  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ , cuyas coordenadas son  $t_i = 0$  y  $t_j = \frac{1}{n}$ . Entonces podemos tomar  $b = \frac{1}{n}v_i + \frac{n}{n+1}b_i$ . Como sus coordenadas suman uno, tenemos que  $b$  está en la recta que une  $v_i$  con  $b_i$ , en particular, tenemos que  $d(b, v_i) = \frac{n}{n+1}d(b_i, v_i)$  y aplicando la primera reducción otra vez, tenemos que

$$d(b, v_i) = \frac{n}{n+1}d(b_i, v_i) \leq \frac{n}{n+1} \max\{d(v_j, v_i)\} = \frac{n}{n+1} \text{diam}([v_0, \dots, v_n]).$$

□

**Corolario 1.1.20.** *Iterando el proceso  $r$  veces podemos conseguir símlices de diámetro menor o igual que  $(\frac{n}{n+1})^r \text{diam}([v_0, \dots, v_n])$ .*

Por tanto, esto nos permitirá conseguir símlices tan pequeños como queramos.

### 1.1.2. Aproximación simplicial

El Teorema de Aproximación simplicial es la clave de la demostración del Teorema del Punto fijo de Lefschetz, y nos dice que cualquier aplicación continua entre complejos simpliciales es homótopa a una función que es lineal en los símlices de una subdivisión baricéntrica del dominio del complejo. La “aproximación simplicial” fue desarrollada por Brouwer y Alexander antes de 1920.

Este teorema es un claro ejemplo de que hay algunas ocasiones en las que la estructura que tienen los complejos simpliciales es muy útil.

Para comenzar, veamos qué es ser lineal en los símlices:

**Definición 1.1.21.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales abstractos, entonces  $f : K \rightarrow L$  se dice que es una **aplicación simplicial** si envía los vértices de cada cara de  $K$  a los vértices de una cara de  $L$ .

**Observación 1.1.22.** ■ Una aplicación simplicial  $f : K \rightarrow L$  induce una aplicación continua  $f : |K| \rightarrow |L|$  en sus realizaciones topológicas que es lineal en cada símlice:

*Demostración.* En coordenadas baricéntricas, podemos escribir cada punto de un símlice  $[v_0, \dots, v_n]$  como  $x = \sum_i t_i v_i$  con  $\sum_i t_i = 1, t_i \geq 0$ . Entonces, extendiendo la aplicación linealmente de la siguiente forma,

$$\sum_i t_i v_i \mapsto \sum_i t_i f(v_i).$$

obtenemos la aplicación inducida que buscábamos.  $\square$

A partir de ahora consideramos los complejos simpliciales con su estructura topológica.

**Teorema 1.1.23. (Aproximación simplicial)** *Dado  $K$  un complejo simplicial finito, y  $L$  un complejo simplicial arbitrario. Entonces, cualquier función  $f : K \rightarrow L$  es homótopa a una aplicación simplicial  $g : K \rightarrow L$  respecto a una subdivisión baricéntrica iterada de  $K$  tal que para cualquier símlice  $\sigma$  de la subdivisión baricéntrica,  $f(\sigma) \subset St\ g(\sigma)$ .*

Es decir, el teorema nos dice que cualquier aplicación continua entre dos espacios topológicos que tienen alguna estructura de complejo simplicial, se puede aproximar por una función homótopa y que es simplicial en un nivel de la subdivisión baricéntrica. Necesitamos definir lo que es la estrella de un símlice:

**Definición 1.1.24.** Llamamos **estrella** de un símlice  $\sigma$  de un complejo simplicial  $K$  al subcomplejo definido como la unión de todos los símlices en  $K$  que contienen a  $\sigma$ . Lo denotamos por  $St(\sigma)$ .

Llamamos **estrella abierta** de  $\sigma$  a la unión de los interiores de los símlices que contienen a  $\sigma$ . Lo denotamos por  $st(\sigma)$ .

Damos un lema previo necesario para la demostración del teorema:

**Lema 1.1.25.** *Sean  $v_0, \dots, v_n$  los vértices de un complejo simplicial  $K$ . Entonces la intersección  $st(v_0) \cap \dots \cap st(v_n)$  es vacía a no ser de que  $v_0, \dots, v_n$  sean vértices de un símlice  $\sigma$  de  $K$ , ya que en ese caso,  $st(v_0) \cap \dots \cap st(v_n) = st(\sigma)$ .*

*Demostración.*  $st(v_0) \cap \dots \cap st(v_n)$  es la unión de los interiores de todos los símlices  $\tau$  cuyo conjunto de vértices contiene a  $\{v_0, \dots, v_n\}$ . Entonces, si  $st(v_0) \cap \dots \cap st(v_n)$  es no vacío, cada uno de los  $\tau$  contiene un mismo símlice  $\sigma$  con vértices  $v_0, \dots, v_n$ . Por tanto,  $st(v_0) \cap \dots \cap st(v_n) = st(\sigma)$ .  $\square$

Comencemos, finalmente, con la demostración del teorema:

*Demostración.* Tomemos en  $K$  la métrica inducida por la métrica euclídea en el correspondiente  $\mathbb{R}^m$ . Tomamos el recubrimiento por abiertos de  $K$ , dado por  $\{f^{-1}(st \ \omega) \mid \omega \text{ vértice de } L\}$  y denotamos por  $\epsilon$  el número de Lebesgue del recubrimiento. Recordamos que el número de Lebesgue de un recubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto es un número  $\epsilon > 0$  tal que cualquier conjunto cuyo diámetro sea menor que  $\epsilon$  cae en algún abierto del recubrimiento.

Utilizando la subdivisión baricéntrica iterada, podemos suponer que el diámetro de la subdivisión baricéntrica de  $K$  es menor que  $\frac{\epsilon}{2}$ . Por tanto, para cada vértice  $v$  de  $K$ , la estrella  $St(v)$  tiene diámetro menor que  $\epsilon$  (este vértice puede ser vértice de distintos símlices).

Entonces, por la definición de número de Lebesgue, resulta que existe un vértice de  $L$ ,  $w$ , tal que  $St(v) \subset f^{-1}(st(w))$ . Por tanto,  $f(St(v)) \subset st(w)$ .

Entonces, definimos como  $g : K^0 \rightarrow L^0$ , la función que lleva cada  $v \in K^0$  al correspondiente  $w \in L^0$ . De esta manera, tenemos que  $f(St(v)) \subset st(g(v))$  para cada  $v \in K^0$ .

Ahora queremos ver que esta  $g$  se extiende a una aplicación simplicial. Primero, veamos como extender  $g$  a un símlice  $[v_0, \dots, v_n]$  de  $K$ . Lo haremos por inducción sobre el  $k$ -esqueleto del símlice. Para  $k = 0$  es trivial ya que se reduce a la aplicación  $g : K^0 \rightarrow L^0$ .

Ahora, suponemos que tenemos un aplicación simplicial  $g : K^{k-1} \rightarrow L^{k-1}$ . Entonces, dado un punto interior  $x \in K^k$ , existe un único  $k$ -símlice  $\Delta$  que lo contiene. Entonces  $x$  cae en la estrella abierta de cualquiera de los vértices de  $\Delta$  en  $L^k$ , por tanto,  $f(x)$  cae en  $f(st(v_i))$  para todo  $v_i$  vértice de  $\Delta$ , y por la inclusión vista arriba,  $f(x) \subset st(g(v_i))$  para todo  $v_i$  vértice de  $\Delta$ .

Entonces, tenemos que  $\cap_{v_i \in \Delta} st(g(v_i)) \neq \emptyset$ , y por el lema anterior, tenemos que  $[g(v_{i_0}), \dots, g(v_{i_k})]$  es un símlice en  $L^k$ . Por tanto, como una aplicación lineal entre símlices en coordenadas baricéntricas esta determinada por la imagen de sus vértices, podemos extender la función  $g$  de manera lineal a todo el  $k$ -símlice  $\Delta$ .

Una vez extendida la función al símlice  $[v_0, \dots, v_n]$ , observamos que  $g(x)$  cae en  $[g(v_0), \dots, g(v_n)]$  y que  $f(x)$  cae en  $st([g(v_0), \dots, g(v_n)])$ . Entonces, ambas caen en el mismo símlice de  $L$ . Por tanto, podemos definir la homotopía

$H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  como:  $(1 - t)f(x) + tg(x)$ , entre  $f$  y  $g$ . La continuidad viene de la continuidad en cada s3mplice  $[v_0, \dots, v_n]$ .

Finalmente,  $f(x)$  cae en  $st([g(v_0), \dots, g(v_n)])$  para todo  $x$  del s3mplice  $[v_0, \dots, v_n]$  de la subdivisi3n. Por tanto,  $f([v_0, \dots, v_n]) \subset St(g([v_0, \dots, v_n]))$ .  $\square$

### 1.1.3. Demostraci3n del teorema del punto fijo de Lefschetz

Para llevar a cabo la demostraci3n del teorema, a parte de las dos subsecciones que acabamos de desarrollar, utilizaremos las nociones y resultados desarrollados en el Ap3ndice A, as3 como el siguiente lema, p3ramente algebraico.

**Lema 1.1.26. (F3rmula de la traza de Hopf)** Sea  $(C_\bullet, d)$  un complejo de cadenas finito de grupos abelianos fin3tamente generados, es decir,

$$0 \rightarrow C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0,$$

Sea  $H_n := \ker d_n / \text{Im } d_{n+1}$ . Entonces, dada una aplicaci3n entre complejos de cadenas  $f_\# : (C_\bullet, d) \rightarrow (C_\bullet, d)$ , tenemos que:

$$\sum_n (-1)^n \text{tr}(f_* : H_n \rightarrow H_n) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(f_\# : C_n \rightarrow C_n),$$

donde  $f_*$  es la aplicaci3n que induce  $f_\#$  en los grupos de homolog3a.

Para la demostraci3n de este lema, probaremos primero otro lema, que es tambi3n p3ramente algebraico y exclusivamente necesario para esta demostraci3n.

**Lema 1.1.27.** Si  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  es una sucesi3n exacta corta de grupos abelianos fin3tamente generados, y sean  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  endomorfismos de  $A, B$  y  $C$ , respectivamente, que hacen conmutativo el diagrama.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Entonces  $\text{tr}(\beta) = \text{tr}(\alpha) + \text{tr}(\gamma)$ .

*Demostraci3n.* Lo primero que haremos ser3 reducir la demostraci3n a grupos abelianos libres. Para ello, utilizamos el hecho de que tensorizar a la derecha por  $\mathbb{Q}$  preserva la exactitud de sucesiones exactas cortas [11].

Por tanto, obtenemos el diagrama inducido:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{f \otimes Id} & B \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{g \otimes Id} & C \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \alpha \otimes Id & & \downarrow \beta \otimes Id & & \downarrow \gamma \otimes Id & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f \otimes Id} & B \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{g \otimes Id} & C \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

con  $\alpha \otimes Id : A \otimes \mathbb{Q} \rightarrow A \otimes \mathbb{Q}$ ,  $\beta \otimes Id : B \otimes \mathbb{Q} \rightarrow B \otimes \mathbb{Q}$ ,  $\gamma \otimes Id : C \otimes \mathbb{Q} \rightarrow C \otimes \mathbb{Q}$ ,  $f \otimes Id : A \otimes \mathbb{Q} \rightarrow B \otimes \mathbb{Q}$ , y  $g \otimes Id : B \otimes \mathbb{Q} \rightarrow C \otimes \mathbb{Q}$  los  $\mathbb{Q}$ -homomorfismos inducidos.

Si tomamos bases de  $A/Torsion$ ,  $B/Torsion$  y  $C/Torsion$  sobre  $\mathbb{Z}$  que sean, respectivamente, base también de  $(A/Torsion) \otimes \mathbb{Q}$ ,  $(B/Torsion) \otimes \mathbb{Q}$  y  $(C/Torsion) \otimes \mathbb{Q}$  sobre  $\mathbb{Q}$ , como en la Observación A.2.3, tenemos que  $tr(\alpha) = tr(\alpha \otimes Id)$ ,  $tr(\beta) = tr(\beta \otimes Id)$  y  $tr(\gamma) = tr(\gamma \otimes Id)$ .

Y, como  $Torsion \otimes \mathbb{Q} = 0$ , podemos considerar el diagrama suponiendo libres los grupos abelianos  $A, B$  y  $C$ ,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

vamos a ver que la sucesión  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  se escinde y, después, que se cumple la aditividad de trazas. Como  $g$  es sobreyectiva y  $C \cong B/Im \alpha$ , dada una base  $\mathcal{B}$  de  $C$ , para cada  $x \in \mathcal{B}$ , existe un único  $y_x \in B \setminus f(A)$  tal que  $g(y_x) = x$ . Después extendemos el homomorfismo linealmente. Entonces, hemos construido una aplicación  $h : C \rightarrow B$  tal que  $g \circ h = \mathbb{1}_C$ , y por el lema de escisión, tenemos que  $B \cong A \oplus C$ . Entonces, eligiendo una base en  $A$  y en  $C$ ,  $tr(\beta) = tr(\beta|_A) + tr(\beta|_C) = tr(\alpha) + tr(\gamma)$ , utilizando el isomorfismo de escisión y el hecho de que la traza es invariante por un cambio de base como demostramos cuando definimos lo que es la traza.  $\square$

Comenzamos ahora con la demostración de la Fórmula de la traza de Hopf.

*Demostración.* Dado el complejo de cadenas finito

$$0 \rightarrow C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0,$$

obtenemos los siguientes diagramas para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker d_n & \hookrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_n} & \operatorname{Im} d_n & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \\
0 & \longrightarrow & \ker d_n & \hookrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_n} & \operatorname{Im} d_n & \longrightarrow & 0 \\
& & & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} d_{n+1} & \hookrightarrow & \ker d_n & \longrightarrow & H_n & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_* & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} d_{n+1} & \hookrightarrow & \ker d_n & \longrightarrow & H_n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Entonces, utilizando el lema anterior,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(f_{\#}|_{C_n}) &= \operatorname{tr}(f_{\#}|_{\ker d_n}) + \operatorname{tr}(f_{\#}|_{\operatorname{Im} d_n}) \\
\operatorname{tr}(f_{\#}|_{\ker d_n}) &= \operatorname{tr}(f_{\#}|_{\operatorname{Im} d_{n+1}}) + \operatorname{tr}(f_*|_{H_n}).
\end{aligned}$$

y, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\sum_n (-1)^n \operatorname{tr}(f_*|_{H_n}) &= \sum_n (-1)^n (\operatorname{tr}(f_{\#}|_{\ker d_n}) - \operatorname{tr}(f_{\#}|_{\operatorname{Im} d_{n+1}})) = \\
&= \sum_n (-1)^n (\operatorname{tr}(f_{\#}|_{C_n}) - \operatorname{tr}(f_{\#}|_{\operatorname{Im} d_n}) - \operatorname{tr}(f_{\#}|_{\operatorname{Im} d_{n+1}})) = \\
&= \sum_n (-1)^n (\operatorname{tr}(f_{\#}|_{C_n}) - \operatorname{tr}(f_{\#}|_{\operatorname{Im} d_0})) = \sum_n (-1)^n (\operatorname{tr}(f_{\#}|_{C_n})).
\end{aligned}$$

□

Nosotros aplicaremos el lema de la siguiente manera en nuestra demostración:

**Corolario 1.1.28.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y denotamos por  $K^i$  su  $i$ -esqueleto. Tomamos el siguiente complejo de cadenas, con  $d$  su correspondiente operador borde.*

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(K^{n+1}, K^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \rightarrow \cdots$$

Por el Teorema A.2.3, sabemos que la homología de este complejo, que se llama homología celular coincide con la homología singular. Entonces,

$$\tau(f) = \sum_n (-1)^n \operatorname{tr}(f_{\#} : H_n(K^n, K^{n-1}) \rightarrow H_n(K^n, K^{n-1})).$$

Podemos ya comenzar con la demostración del Teorema del Punto fijo de Lefschetz.

*Demostración.* Sea  $X$  un complejo simplicial finito. Haremos la prueba por reducción al absurdo. Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación sin puntos fijos. Tomamos  $d$  una métrica en  $X$ . Como  $f$  no tiene puntos fijos, tenemos que  $d(f(x), x) > 0$  para cada  $x \in X$ . Como  $X$  es compacto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $d(f(x), x) > \epsilon$  para todo  $x \in X$ .

Tomamos entonces una subdivisión baricéntrica  $L$  de  $X$  tal que el diámetro de cada símplice sea menos que  $\frac{\epsilon}{2}$ . Utilizando el Teorema de Aproximación simplicial, tenemos que existe una subdivisión baricéntrica  $K$  de  $L$  y una aplicación simplicial  $g : K \rightarrow L$  homótopa a  $f$  tal que  $f(\sigma) \subset \text{st } g(\sigma)$ , para cada símplice  $\sigma$  de  $K$ . Veamos que  $\sigma \cap g(\sigma) = \emptyset$ . Para ello, sea  $x \in \sigma$ . Por un lado, tenemos que  $d(f(x), x) > \epsilon$ . Por otro, como hemos argumentado en la demostración del Teorema de Aproximación simplicial, tenemos que  $f(\sigma)$  y  $g(\sigma)$  están en el mismo símplice, en particular,  $f(x)$  y  $g(\sigma)$ ; y como  $K$  es una subdivisión de  $L$ , tenemos que  $d(f(x), g(\sigma)) < \frac{\epsilon}{2}$ . Por tanto, para cada  $x \in \sigma$ ,  $\{x\} \cap g(\sigma) = \emptyset$ , es decir,  $\sigma \cap g(\sigma) = \emptyset$  para cada símplice de la subdivisión  $K$ .

Como  $f$  y  $g$  son homótopas, inducen la misma aplicación en homología singular y, por tanto, sus correspondientes números de Lefschetz son iguales. Entonces, nos quedaría probar que la  $\text{tr}(g) = 0$ . Como  $g$  es una aplicación simplicial, tenemos que lleva el  $n$ -esqueleto  $K^n$  de  $K$ , al  $n$ -esqueleto  $L^n$  de  $L$ . Encima, como  $K$  es una subdivisión de  $L$ , tenemos que  $L^n \subset K^n$  para cada  $n$ . Por tanto,  $g(K^n) \subset K^n$  para cada  $n$ . Entonces,  $g$  induce una aplicación del complejo de cadenas simplicial  $\{H_n(K^n, K^{n-1}), d_n\}$ , siendo  $d_n$  la aplicación borde usual, a él mismo.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{n+1}(K^{n+1}, K^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow g_* & & \downarrow g_* & & \downarrow g_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{n+1}(K^{n+1}, K^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Además, como hemos visto que  $g(\sigma) \cap \sigma = \emptyset$ , tenemos que los vértices de cada símplice de  $K$  no van a ellos mismos, por lo que la matriz asociada a  $g_* : H_n(K^n, K^{n-1}) \rightarrow H_n(K^n, K^{n-1})$  tiene la diagonal con todo ceros, y por tanto,  $\text{tr}(g_* : H_n(K^n, K^{n-1})) = 0$  para toda  $n$ .

Entonces, por el Lema 1.1.26 tenemos que

$$\tau(g) := \sum_n (-1)^n \text{tr}(g_*|_{H_n(X)}) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(g_*|_{H_n(K^n, K^{n-1})}),$$

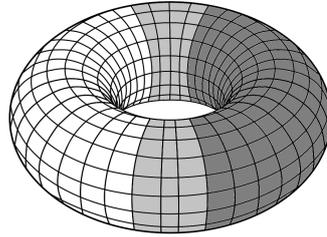
y por tanto, podemos concluir que  $\tau(f) = \tau(g) = 0$ .

□

Finalizamos esta sección dando un ejemplo.

**Ejemplo 1.1.29.** Consideremos  $M$  una superficie orientable cerrada de género 1 como la de la figura y  $f : M \rightarrow M$  la rotación de  $180^\circ$  alrededor de un eje que pasa por el agujero central de  $M$  sin tocar a  $M$ . Entonces, es claro que  $f$  no tiene puntos fijos. Entonces, por el teorema del punto fijo de Lefschetz,  $\tau(f) = 0$ . Comprobémoslo. Para calcular los grupos de homología utilizaremos el teorema de Mayer Vietoris que podemos encontrar en [9]. Tomaremos la homología singular con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ .

Por tanto, si tomamos los abiertos  $U$  y  $V$  que sean como en la figura (el abierto  $U$  está pintado en blanco y el  $V$  en gris oscuro; la intersección de ambos está pintada en gris claro), tenemos que  $U \cong \mathbb{S}^1$ ,  $V \cong \mathbb{S}^1$



Entonces, el teorema de Mayer Vietoris nos da la siguiente sucesión exacta larga:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & H_{k-1}(U) \oplus H_{k-1}(V) & \longleftarrow & H_{k-1}(U \cap V) & \longleftarrow & \cdots \\ & & \xrightarrow{d_*} & & & & \\ \cdots & \longleftarrow & H_k(M) & \longleftarrow & H_k(U) \oplus H_k(V) & \longleftarrow & H_k(U \cap V) & \longleftarrow & \cdots \\ & & \xrightarrow{d_*} & & & & & & \\ \cdots & \longleftarrow & H_{k+1}(M) & \longleftarrow & H_{k+1}(U) \oplus H_{k+1}(V) & \longleftarrow & \cdots & & \end{array}$$

donde las inclusiones  $U \cap V \xrightarrow{i} U$ ,  $U \cap V \xrightarrow{j} V$  inducen en homología las aplicaciones  $H_k(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_k(U)$ ,  $H_k(U \cap V) \xrightarrow{j_*} H_k(V)$ , respectivamente.

Por tanto, la aplicación  $(i_*, j_*) : H_k(U \cap V) \rightarrow H_k(U) \oplus H_k(V)$  está definida por:

$$(i_*, j_*)[\sigma] = (i_*[\sigma], j_*[\sigma]) = ([i \circ \sigma], [j \circ \sigma])$$

Entonces, haciendo uso de esta sucesión exacta larga, se puede calcular que  $H_k(M) = 0$  si  $k > 2$ ,  $H_2(M) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(M) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  y  $H_0(M) = \mathbb{Z}$ . Además, tenemos que:

$tr(f_*|_{H_0(M)}) = 1$ ,  $tr(f_*|_{H_k(M)}) = 0$ , para  $k > 2$ ,  $tr(f_*|_{H_2(M)}) = 1$  y  $tr(f_*|_{H_1(M)}) = 2$ , ya que  $f_* : H_1(M) \rightarrow H_1(M)$  está definida por  $[\alpha] \mapsto [\alpha]$  y  $[\beta] \mapsto [2\beta]$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los generadores del grupo de homología. Finalmente, concluimos que  $\tau(f) = 0$ .

## 1.2. Teorema del punto fijo de Lefschetz para variedades diferenciables compactas

Considerar las variedades diferenciables compactas es bastante natural, ya que toda variedad compacta es homotópicamente equivalente a un complejo simplicial finito.

El objetivo de este capítulo será probar el Teorema del Punto fijo de Lefschetz para variedades diferenciables compactas y definir el número de Lefschetz para cualquier aplicación diferenciable de una variedad diferenciable compacta en sí misma cuyos puntos fijos son aislados, a partir de éstos. Me he basado en [2].

### 1.2.1. Teorema del Punto fijo de Lefschetz

**Definición 1.2.1.** Sean  $M$  una variedad diferenciable y sean  $S_1, S_2$  dos subvariedades con  $\dim S_1 + \dim S_2 = \dim M$ . Diremos que  $S_1$  y  $S_2$  **intersecan transversálmente** si para cada  $p \in S_1 \cap S_2$ , tenemos  $T_p M = T_p S_1 \oplus T_p S_2$ .

Sea  $M$  una variedad compacta orientada de dimensión  $n$ , y sean  $S_1, S_2$  dos subvariedades orientadas compactas de  $M$  que intersecan transversálmente. Entonces, para cada  $p \in S_1 \cap S_2$ , definimos:

$$\epsilon_p = \begin{cases} +1 & \text{si } T_p S_1 \oplus T_p S_2 \text{ está orientado como } T_p M \\ -1 & \text{si } T_p S_1 \oplus T_p S_2 \text{ no está orientado como } T_p M \end{cases}$$

**Definición 1.2.2.** En las condiciones anteriores, definiremos el **número de intersección** de  $S_1$  con  $S_2$  como:

$$S_1 \cdot S_2 := \sum_{p \in S_1 \cap S_2} \epsilon_p.$$

Nosotros utilizaremos el número de intersección para estudiar los puntos fijos de  $f : M \rightarrow M$ . Dada una variedad compacta  $M$  y una aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow M$ , observamos que  $x$  es un punto fijo cuando  $(x, f(x)) \in M \times M$  está en la intersección de el grafo de  $f$  con la diagonal, que denotaremos por  $G_f$  y  $\Delta$ , respectivamente. Con esta idea y a partir de los puntos fijos, vamos a definir lo que también llamaremos número de Lefschetz, en este contexto.

**Definición 1.2.3.** Sea  $M$  una variedad diferenciable orientada y  $f : M \rightarrow M$  una aplicación diferenciable para la cual el grafo de  $f$  es transversal a la diagonal  $\Delta$ . Entonces, decimos que  $f$  es una **función de Lefschetz**.

**Proposición 1.2.4.** *Toda función  $f : M \rightarrow M$  de una variedad diferenciable  $M$  en sí misma es homótopa a una función de Lefschetz.*

*Demostración.* Primero, suponemos  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  y consideramos  $B$  una bola abierta de  $\mathbb{R}^k$ . Definimos

$$\begin{aligned} F : M \times B &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (s, x) &\mapsto f(x) + s. \end{aligned}$$

$F$  es una traslación y, por tanto, es una sumersión. En particular, es transversal a cualquier subvariedad  $Z \subset \mathbb{R}^k$ .

Ahora, tomamos una parametrización local  $\varphi$  alrededor de  $x \in M$  que lleve el 0 a  $x$ , y aplicamos lo anterior a  $g = \varphi^{-1} \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ , obteniendo la correspondiente  $G$ . Entonces, localmente, tomamos  $F := \varphi \circ G$ .

Entonces, tenemos una aplicación diferenciable  $F : M \times B \rightarrow M$  donde  $B \subset \mathbb{R}^n$  es la bola euclídea abierta de centro el origen y radio 1, con  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F_x : B \rightarrow M$  sumersión para cada  $x \in M$ . Definimos una aplicación  $G : M \times B \rightarrow M \times M$  como  $G(x, s) = (x, F(x, s))$ . Veamos que también será sumersión para cada  $x \in M$ . Suponemos que  $G(x, s) = (x, y)$  para algún  $y \in M$ . Entonces, está claro que  $G \upharpoonright_{M \times \{s\}}$  es un difeomorfismo sobre  $M \times \{y\}$ . Por tanto,  $d_{(x,s)}G : T_x M \times \{0\} \rightarrow T_x M \times \{0\}$  es un isomorfismo, es

decir,  $T_x M \times \{0\}$  está contenido en la imagen de  $d_{(x,s)}G$ . Por otro lado, como  $G \downarrow_{\{x\} \times B}$  es sumersión sobre  $\{x\} \times M$  (por serlo  $F_x$ ), entonces  $\{0\} \times T_y M$  está contenido, también, en la imagen de  $d_{(x,s)}G$ . Eso y el hecho de que  $d_{(x,s)}G$  es una aplicación lineal nos hace concluir que  $G$  es sumersión en  $M \times M$ . Y, por tanto,  $G$  es transversal a todo subconjunto de  $M \times M$ , en particular, a  $\Delta$ . Entonces, por el Teorema B.0.3, el conjunto de  $s \in B$  tal que la aplicación  $G_s : M \rightarrow M \times M$  definida por  $x \mapsto (x, F(x, s))$  es transversal a  $\Delta$  es residual. Tomo uno de esos  $s \in B$ . Por tanto, que  $G_s(x)$  es homótopa a  $f$  y es de Lefschetz.  $\square$

**Definición 1.2.5.** Sea  $M$  una variedad diferenciable orientada compacta y  $f : M \rightarrow M$  una aplicación diferenciable. Tomo  $\tilde{f}$  una aplicación homótopa a  $f$  que es de Lefschetz. Llamamos **número de Lefschetz** de  $f$  al número de intersección de la diagonal de  $M$  con el grafo de  $\tilde{f}$ , y lo denotaremos por  $\epsilon(f) := \Delta \cdot G_{\tilde{f}}$ .

**Observación 1.2.6.** El número de Lefschetz es un invariante homotópico, como hemos visto en la Proposición B.0.8, por serlo el número de intersección.

Ya podemos enunciar el Teorema del Punto fijo de Lefschetz para variedades diferenciables compactas.

**Teorema 1.2.7.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  una función diferenciable sobre una variedad compacta orientable. Entonces, si  $\epsilon(f) \neq 0$ , la función  $f$  tiene algún punto fijo.*

*Demostración.* Suponemos que  $f$  no tiene puntos fijos, entonces  $G_f$  y  $\Delta$  son conjuntos disjuntos, y por dimensión, trivialmente transversales, por tanto, el número de intersección de  $\Delta$  con  $G_f$  es 0. Es decir, el número de Lefschetz  $\Delta \cdot G_f = \epsilon(f) = 0$ .  $\square$

### 1.2.2. Número local de Lefschetz

El número local de Lefschetz nos va a permitir calcular directamente  $\tau(f)$  si  $f$  es una función con puntos fijos aislados, aunque no sea de Lefschetz. Supongamos que  $x$  es un punto fijo de  $f$  (ya que para los demás puntos la transversalidad del grafo de  $f$  con la diagonal es trivial). Entonces, el espacio tangente del grafo de  $f$  en  $T_x M \times T_x M$  es el grafo de la función  $d_x f : T_x M \rightarrow T_x M$ , y el espacio tangente de la diagonal  $\Delta$  es la diagonal

$\Delta_x$  de  $T_x M \times T_x M$ . Por tanto, el grafo de  $f$  es transversal a la diagonal  $\Delta$  en  $(x, x)$  si y solo si:

$$G_{d_x f} + \Delta_x = T_x M \times T_x M$$

Como  $G_{d_x f}$  y  $\Delta_x$  son subespacios vectoriales de  $T_x M \times T_x M$  con dimensión complementaria, tenemos que  $G_{d_x f} + \Delta_x = T_x M \times T_x M$  si y solo si  $G_{d_x f} \cap \Delta_x = \{0\}$ . Es decir, si y solo si  $d_x f$  no tiene puntos fijos no nulos, que es lo mismo que decir que  $d_x f$  no tiene el  $+1$  como autovalor.

Es por eso que podemos dar estas definiciones equivalentes:

**Lema 1.2.8.**    ■  $f : M \rightarrow M$  es una **función Lefschetz** si  $d_x f$  no tiene el  $+1$  como autovalor.

- $f : M \rightarrow M$  es una **función Lefschetz** si  $d_x f$  no tiene puntos fijos no nulos, para cualquier  $x \in M$ .

A los puntos fijos  $x \in M$  que cumplen esta condición les llamamos **puntos fijos de Lefschetz**. Entonces, se dice que  $f : M \rightarrow M$  es una **función Lefschetz** si todos sus puntos fijos son de Lefschetz.

**Observación 1.2.9.** Si  $M$  variedad diferenciable compacta y  $f : M \rightarrow M$  de Lefschetz, entonces  $f$  tiene un número finito de puntos fijos.

*Demostración.* Sea  $x_0$  un punto fijo de Lefschetz, es decir, tenemos que  $f(x_0) = x_0$ , y que  $d_{x_0} f(v) \neq v$ . Definimos la función  $g := f - Id$ . Se tiene que  $g(x_0) = 0$  y consideramos  $d_{x_0} g : T_{x_0} M \rightarrow T_0 M$ . Entonces,  $d_{x_0} g = d_{x_0} f - Id$  es distinto de 0, por no ser  $+1$  un autovalor de  $d_{x_0} f$ . Por el teorema de la función inversa, tenemos que  $g$  es un difeomorfismo local alrededor de  $x_0$ . Si dentro del entorno donde  $g$  es difeomorfismo hubiera otro punto fijo  $x_1$ , tendríamos que  $g(x_1) = 0$ ; lo que contradice la biyectividad de  $g$  en dicho entorno. Por tanto, tenemos que los puntos fijos de las aplicaciones de Lefschetz son puntos aislados.

Tomamos la unión de estos entornos abiertos. Como  $M$  es compacta, todo recubrimiento tiene un subrecubrimiento finito de abiertos. Entonces, como esta unión de abiertos está en  $M$  tendrá que ser finita:  $\square$

Entonces, por cómo se define el número de Lefschetz y por el hecho de que las aplicaciones de Lefschetz en variedades compactas tienen un número

finito de puntos fijos, tenemos la siguiente suma finita.

$$\epsilon(f) := \Delta \cdot G_f = \sum_{x \in \Delta \cap G_f} \epsilon_x = \sum_{f(x)=x} \epsilon_x(f),$$

donde llamaremos a  $\epsilon_x(f)$  el **número local de Lefschetz** de  $f$  en el punto fijo  $x$ .

Veamos una manera de calcular estos valores:

**Proposición 1.2.10.** *El número local  $\epsilon_x(f)$  en un punto fijo  $x$  de Lefschetz es  $+1$  si el isomorfismo  $d_x f - Id$  preserva la orientación en  $T_x(M)$ , y  $-1$ , si la invierte. Es decir,  $\epsilon_x(f)$  es igual al signo del determinante de  $d_x f - Id$ .*

*Demostración.* Tomamos  $\beta = \{v_1, \dots, v_k\}$  una base orientada positivamente de  $T_x(M)$ . Entonces,  $\{(v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k)\}$  y  $\{(v_1, d_x f(v_1)), \dots, (v_k, d_x f(v_k))\}$  son bases orientadas positivamente de  $T_{(x,x)}(\Delta)$  y  $T_{(x,x)}(G_f)$ , respectivamente. Por lo que  $\epsilon_x(f)$  es igual a  $+1$  si la base

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k), (v_1, d_x f(v_1)), \dots, (v_k, d_x f(v_k))\}$$

está orientada positivamente en  $M \times M$ , y a  $-1$ , en caso contrario. Como podemos hacer combinaciones lineales en la base sin alterar su orientación, tenemos que la siguiente base está orientada de la misma manera:

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k), (0, (d_x f - Id)(v_1)), \dots, (0, (d_x f - Id)(v_k))\}$$

Como  $d_x f - Id = d_x g$  es un isomorfismo, el signo de orientación de

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k), (0, (d_x f - Id)(v_1)), \dots, (0, (d_x f - Id)(v_k))\}$$

es igual al de

$$\begin{aligned} & \{(v_1, 0), \dots, (v_k, 0), (0, (d_x f - Id)(v_1)), \dots, (0, (d_x f - Id)(v_k))\} = \\ & = \{\beta \times \{0\}, \{0\} \times (d_x f - Id)(\beta)\}. \end{aligned}$$

El signo de orientación de esta última base sobre  $T_x M \times T_x M$  es, por definición,  $sign(\beta) \cdot sign((d_x f - Id)(\beta))$  en  $T_x M$ . Como  $sign(\beta) = +1$ , concluimos que  $\epsilon_x(f) = sign((d_x f - Id)(\beta))$ .  $\square$

Entonces, dada una aplicación de Lefschetz de una variedad diferenciable en sí misma,

$$\epsilon(f) = \sum_{f(x)=x} \text{sign}(d_x f - Id)$$

donde  $\epsilon_x(f) = \text{sign}(d_x f - Id)$  para cada  $x$  punto fijo de Lefschetz de la aplicación  $f$ .

Veamos que para cualquier aplicación  $f$  con un número finito de puntos fijos aislados, podemos definir un número local de Lefschetz igual al que ya conocemos para los puntos fijos de Lefschetz, y calcular el número de Lefschetz de  $f$  a partir de éstos. Comenzaremos con la siguiente proposición, cuyo objetivo es probar que bajo pequeñas perturbaciones, los puntos fijos de una aplicación  $f : M \rightarrow M$ , con  $M$  variedad diferenciable se convierten en puntos fijos de Lefschetz. Si  $f$  tienes los puntos fijos aislados, necesitamos hacer estas pequeñas perturbaciones de manera local.

**Proposición 1.2.11.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $f : M \rightarrow M$  una aplicación diferenciable y sea  $x$  un punto fijo aislado de  $f$ . Sea  $U$  un entorno abierto de  $x$ , que no contiene más puntos fijos. Entonces, existe una homotopía  $f_t$  de  $f$  tal que  $f_1$  solo tiene puntos fijos de Lefschetz en  $U$ , y cada  $f_t$  es igual a  $f$  fuera de un subconjunto compacto de  $U$ .*

*Demostración.* Primero, suponemos que  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ , con  $U$  abierto en  $\mathbb{R}^k$  tal que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  deja fijo el origen pero ningún otro punto. Tomamos  $\rho : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$  una función diferenciable que vale 1 en un entorno  $V$  del origen y vale 0 fuera de un compacto  $K \subset U$ . Ahora buscamos la homotopía:

Tomamos  $f_t(x) = f(x) + t\rho(x)a$  con  $a \in \mathbb{R}^k$  y vemos que debe cumplir  $|a|$  para que cumpla lo que buscamos. Para ello, como  $f$  no tiene puntos fijos en el conjunto compacto  $K \setminus V$ , existe un  $c > 0$  tal que  $|f(x) - x| > c$  en  $K \setminus V$ . Por tanto, tomando  $|a| < \frac{c}{2}$ , tenemos que

$$|f_t(x) - x| \geq |f(x) - x| - t\rho(x)|a| > \frac{c}{2},$$

en  $K \setminus V$ . Por otro lado, fuera de  $K$  y dentro de  $U$ , tenemos que  $f_t(x) = f(x) \neq x$ .

Ahora, por el teorema de Sard-Brown que podemos encontrar en [8], sabemos que podemos tomar un  $a \in \mathbb{R}^k$  que sea valor regular de la aplicación  $x \mapsto f(x) - x$ , y que esté tan cerca del origen como queramos cumpliendo

$|a| < \frac{\epsilon}{2}$ . Entonces, sea  $x_0$  un punto fijo de  $f_1$ , por lo argumentado arriba, necesariamente  $x_0 \in V$ , y, por tanto,  $f_1(x) = f(x) + a$  cerca de  $x_0$ . En consecuencia, obtenemos que  $d_{x_0}f_1 = d_{x_0}f$ , por lo que  $x_0$  es un punto fijo de Lefschetz si y solo si  $d_{x_0}f_1$  no tiene puntos fijos no nulos, es decir, si  $d_{x_0}f$  no tiene puntos fijos no nulos.

Tenemos que  $f_1(x_0) = x_0$ , es decir,  $f(x_0) - x_0 = a$ , y como hemos dicho arriba,  $a$  es un valor regular de la aplicación  $f(x) - x$ , por lo que  $d_{x_0}f(x) - x \neq 0$  para  $x$  no nulo. Por tanto,  $x_0$  es un punto fijo de Lefschetz de  $f_1$ .

Hemos probado la proposición para  $\mathbb{R}^k$ . Ahora vamos a hacerlo para  $M$ . Tomamos una parametrización local  $\varphi$  alrededor de  $x \in M$  que lleve el 0 a  $x$ , y aplicamos la proposición a  $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Entonces, ahora dado  $x_0$  un punto fijo de Lefschetz para  $g_t$ , tenemos que  $f_t = \varphi \circ g_t \circ \varphi^{-1}$ , y por tanto,  $d_{\varphi(x_0)}f_t = d_{f(\varphi(x_0))}\varphi \circ d_{x_0}g_t \circ d_{\varphi(x_0)}\varphi^{-1}$ . Concluimos, entonces que por ser  $\varphi$  una parametrización,  $d_{\varphi(x_0)}f_t$  tiene un punto fijo no nulo si y solo si  $d_{x_0}g_t$  lo tiene.  $\square$

Una vez vista esta proposición vamos a buscar una manera de definir el número local de Lefschetz para puntos fijos que no tienen porqué ser de Lefschetz. Para ello, volvemos a considerar  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  y suponemos que  $x$  es un punto fijo aislado. Entonces, tomando  $B$  un bola centrada en  $x$  y tal que  $f$  no tiene más puntos fijos en  $B$ , entonces la aplicación  $F : \partial B \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$  definida por  $z \mapsto \frac{f(z)-z}{|f(z)-z|}$  es una aplicación diferenciable.

**Definición 1.2.12.** En las condiciones anteriores, llamamos al grado (definido en el Apéndice B, Observación B.0.6) de la aplicación  $F$  el **número local de Lefschetz** de  $f$  en  $x$ , que denotaremos por  $\epsilon_x(f)$ .

**Observación 1.2.13.** Da igual la  $B$  que tomemos. Si tomamos  $B'$  otra bola de radio menor, entonces  $F$  está definida en todo  $\overline{B - B'}$ . Observemos que  $\overline{B - B'}$  tiene como frontera  $\partial B \cup \partial B'$ , con la orientación natural y la orientación opuesta, respectivamente. Como  $\deg_{\partial(\overline{B - B'})}F$  es cero, los grados de  $F$  en  $\partial(B)$  y  $\partial(B')$  tienen que ser iguales.

El hecho de que llamemos número local de Lefschetz a este grado y que lo denotemos por  $\epsilon_x(f)$  tiene sentido gracias a la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.14.** *Sea  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  una aplicación continua. Entonces las definiciones de número local de Lefschetz coinciden en los puntos fijos de Lefschetz.*

*Demostración.* Sea  $x$  un punto fijo de Lefschetz, entonces utilizando la expansión de Taylor, por un lado, tenemos que  $f(z) = f(x) + (z-x)d_x f(z) + \delta(z-x) = x + (z-x)d_x f + \delta(z-x)$ , donde  $\frac{\delta(z-x)}{|z-x|} \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow x$ . Por otro lado, como la aplicación  $d_x f - I$  es un isomorfismo, la imagen de la bola unidad con centro  $x$  bajo esta aplicación contiene alguna bola cerrada de radio  $c > 0$ . Como es lineal,  $|(d_x f - I)z| > c|z|$  para todo  $z \in \mathbb{R}^k$ . Además, como  $\frac{\delta(z-x)}{|z-x|} \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow x$ , podemos tomar una bola  $B$  de centro  $x$  y de radio suficientemente pequeño para que

$$\frac{\delta(z-x)}{|z-x|} < \frac{c}{2}, \text{ en } B.$$

Definimos la homotopía  $f_t(z) = x + (z-x)d_x f + t\delta(z-x)$ . A partir de ésta, como

$$\begin{aligned} |f_t(z) - z| &= |x + (z-x)d_x f + t\delta(z-x) - z| \geq \\ |x + (z-x)d_x f - z| - |t\delta(z-x)| &= |(z-x)(d_x f - I)| - |t\delta(z-x)| > |z-x|\frac{c}{2}, \end{aligned}$$

tenemos que la homotopía

$$\begin{aligned} F : \partial B \times I &\rightarrow \mathbb{S}^{k-1} \\ (z, t) &\mapsto \frac{f_t(z) - z}{|f_t(z) - z|} \end{aligned}$$

está bien definida. Y, por definición,  $\epsilon_x(f) = \deg_x(F_1)$ . Como el grado es invariante por homotopía admisible, tenemos que  $\deg_x(F_1) = \deg_x(F_0)$ . Es decir, nos falta probar que  $\deg_x(F_0) = \epsilon_x(f)$ . Para esto, necesitamos un lema puramente algebraico que no probaremos, que está propuesto como ejercicio en [2].

**Lema 1.2.15.** *Sea  $E : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  un isomorfismo lineal que preserva la orientación. Entonces, existe una homotopía  $E_t$  tal que:*

- (i)  $E_0 = E$ ,
- (ii)  $E_1$  es la aplicación identidad, y
- (iii)  $E_t$  isomorfismo lineal para toda  $t \in I$ .

*En caso de que  $E$  invierta la orientación, obtenemos una homotopía  $E_t$  que cumple (i), (iii) pero, en este caso,  $E_1(x_1, \dots, x_k) = (-x_1, x_2, \dots, x_k)$ .*

Aplicamos este lema a  $E = d_x f - I$ , y obtenemos una homotopía

$$H_t(z) := \frac{E_t(z)}{|E_t(z)|},$$

tal que

$$H_0(z) = \frac{E_0(z)}{|E_0(z)|} = \frac{F_0(z)}{|F_0(z)|} = \frac{(d_x f - I)(z - x)}{|(d_x f - I)(z - x)|}, \quad H_1(z) = \frac{E_1(z)}{|E_1(z)|},$$

donde  $E_1$  es la identidad o la aplicación reflexión dependiendo de si preserva o invierte la orientación. En ambos casos, tenemos que  $|E_1(z)| = |z| = r$ , donde  $r$  es el radio de  $B$ .

Por lo tanto, si  $d_x f - I$  preserva la orientación,  $F_0$  es homótopa al difeomorfismo  $z \mapsto \frac{z}{r}$ , y por tanto,  $\deg(F_0) = 1$ . En caso de que  $d_x f - I$  invierta la orientación,  $F_0$  es homótopa al mismo difeomorfismo compuesto con la reflexión, por lo que  $\deg(F_0) = -1$ .

□

Una vez probado que ambas definiciones coinciden, vamos a ver que, de hecho, el número local de un punto fijo aislado coincide con la suma de los números locales de Lefschetz de los puntos fijos de Lefschetz en los que éste se escinde de acuerdo a la Proposición 1.2.11.

**Proposición 1.2.16.** *Sea  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  una aplicación diferenciable tal que  $x$  es un punto fijo aislado, y sea  $B$  una bola cerrada de centro  $x$  que no contiene a ningún otro punto fijo de  $f$ . Entonces, eligiendo una aplicación  $f_1$  que es igual a  $f$  fuera de un compacto  $K \subset \text{int}(B)$  y que solo tiene puntos fijos de Lefschetz en  $B$ . Entonces,*

$$\epsilon_x(f) = \sum_{f_1(z)=z} \epsilon_z(f_1),$$

para todo  $z \in B$ .

*Demostración.* Por cómo hemos definido el número de Lefschetz en un punto aislado, tenemos que  $\epsilon_x(f)$  es el grado de la aplicación:

$$F : \partial B \times I \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$$

$$(z, t) \mapsto \frac{f(z) - z}{|f(z) - z|}$$

Por cómo está definida  $f_1$ , en  $\partial B$ ,  $F = F_1 := \frac{f_1(z) - z}{|f_1(z) - z|}$ , por tanto,  $\deg(F_1) = \deg(F)$ .

Por otro lado, tenemos que  $f_1$  solo tiene puntos fijos de Lefschetz en  $B$ , es decir,  $f_1$  es una aplicación de Lefschetz en  $B$  y, por tanto, tiene un número finito de puntos fijos de Lefschetz. Sean estos  $z_1, \dots, z_m$ , tomamos bolas  $B_i$  con centro  $z_i$  disjuntas entre sí y disjuntas a  $\partial B$ . Entonces,  $F_1$  se puede extender a una función

$$G : \partial B' \times I \rightarrow \mathbb{S}^{k-1},$$

con

$$B' = B \setminus \bigcup_{i=1}^m \text{int}(B_i); \quad \partial B' = \partial B \cup \left( \bigcup_{i=1}^m \partial B_i^- \right),$$

donde  $\partial B_i^-$  indica que  $\partial B_i$  están orientadas en sentido opuesto a  $\partial B$ . Por tanto,  $\deg(G)$  en  $\partial B'$  es igual a  $\deg(F_1)$  en  $\partial B$  menos la suma de  $\deg(G)$  en cada  $\partial B_i$ , respectivamente. Además, por cómo hemos definido el grado, es claro que  $\deg(G) = 0$  en  $\partial B'$ . Por tanto,  $0 = \epsilon_x(f_1) - \sum_{i=1}^m \epsilon_{z_i}(f_1)$  y como hemos dicho antes que  $\epsilon_x(f_1) = \epsilon_x(f)$  en  $\partial B$ , concluimos el resultado.  $\square$

Acabamos este capítulo, extendiendo la definición del número local de Lefschetz a aplicaciones con puntos fijos aislados de variedades diferenciables. Para ello, dada  $f : M \rightarrow M$  aplicación diferenciable con  $M$  variedad diferenciable compacta y  $x \in M$  punto fijo aislado. Utilizamos el hecho de ser variedad diferenciable para tomar un difeomorfismo local  $\varphi$  en un abierto de  $x$ , con  $\varphi(0) = x$ . Entonces, la aplicación  $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$  está definida en el espacio euclídeo.

**Definición 1.2.17.** Dada una aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow M$  con  $x \in M$  punto fijo aislado, definimos el **número local de Lefschetz** en  $x$ , como  $\epsilon_x(f) := \epsilon_0(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)$ , donde  $\varphi$  es un difeomorfismo local del espacio euclídeo en un abierto de  $x$ , con  $\varphi(0) = x$ .

Nos faltaría ver que este número está bien definido. Para ello, veamos:

- (i) La definición no depende de la parametrización en los puntos de Lefschetz.

*Demostración.* Si  $x$  es un punto fijo de Lefschetz, por definición  $\epsilon_x(f)$  es  $+1$  si  $d_x f - I$  preserva la orientación de  $x$ , y  $-1$  si la invierte.

Por otro lado,

$$d_0(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi) - I = (d_0\varphi^{-1} \circ d_x f \circ d_0\varphi) - I = d_0\varphi^{-1} \circ (d_x f - I) \circ d_0\varphi,$$

por lo que  $d_0(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi) - I$  preserva la orientación en  $0$  si y solo si  $d_x f - I$  preserva la orientación en  $x$ , y  $d_0(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi) - I$  es un isomorfismo si  $d_x f - I$  lo es. Por tanto,  $0$  es un punto fijo de Lefschetz de  $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$  y  $\epsilon_0(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi) = \epsilon_x(f)$ .  $\square$

- (ii) La definición no depende de la parametrización en un punto fijo aislado.

*Demostración.* Tomamos dos difeomorfismos locales  $\varphi$  y  $\varphi'$  en un abierto de  $x$  con  $\varphi(0) = \varphi'(0) = x$ . Elegimos una aplicación  $f_1 : M \rightarrow M$  que vale lo mismo que  $f$  fuera de un abierto  $U$  que está contenido en las imágenes de ambos difeomorfismos, que contiene a  $x$ , y que solo tiene puntos fijos de Lefschetz. Entonces, utilizando la Proposición 1.2.16, tenemos que el número local de Lefschetz de  $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$  en  $0$  es igual a la suma de los números locales de Lefschetz de  $\varphi^{-1} \circ f_1 \circ \varphi$  en  $\varphi^{-1}(U)$ . Por tanto, utilizando (i), tenemos que :

$$\epsilon_0(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi) = \sum_{f_1(z)=z} \epsilon_z(f_1),$$

Repetiendo lo mismo para  $\varphi'$  obtenemos el mismo resultado, y por tanto,  $\epsilon_x(f)$  está bien definido.  $\square$

### 1.3. Igualdad del número de Lefschetz

Esta sección tratará de demostrar que los números de Lefschetz definidos en las dos secciones anteriores para una aplicación continua  $f : M \rightarrow M$  con  $M$  variedad diferenciable compacta y orientada coinciden. Es conocido que una variedad diferenciable compacta admite una estructura de complejo simplicial.

**Teorema 1.3.1.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable compacta y orientable,  $f : M \rightarrow M$  continua. Entonces  $\tau(f) = G_f \cdot \Delta$ , donde  $\tau(f)$  está introducido en la Definición 1.1.6 y  $G_f \cdot \Delta$  en la Definición 1.2.5.*

### 1.3.1. Teorema de De Rham, Dualidad de Poincaré y formas de Thom

Primero, trataremos de relacionar la cohomología de De Rham con la homología singular mediante el teorema de De Rham. Después, la dualidad de Poincaré nos permitirá dar una relación entre los grupos de cohomología de De Rham de órdenes complementarios. Finalizaremos, asociando a cada clase de homología una clase de cohomología, introduciendo, así, las formas de Thom, necesarias para demostrar lo que queremos. Los detalles y demostraciones de esta sección se encuentran en [9].

Dada  $M$  una variedad diferenciable orientada, y  $\omega \in \Omega^n(M)$ , definimos el **soporte** de  $\omega$   $supp(\omega) = \{x \in M : \omega(x) \neq 0\}$ . Denotaremos por  $\Omega_C^n(M)$  las  $n$ -formas de  $M$  con soporte compacto. Entonces, dada  $\omega \in \Omega_C^n(M)$ , si su soporte está en una carta positiva  $(U, (x_1, \dots, x_n))$ , escribiendo  $\omega$  en coordenadas, es decir,  $\omega = f dx_1 \dots dx_n$ , podemos definir:

$$\int_U \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n$$

Como el soporte de  $\omega$  es compacto, se puede recubrir con un número finito de cartas y por tanto, podemos definir:

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} \omega_i,$$

donde el soporte de  $\omega_i$  está en una carta positiva  $U_i$ .

Gracias al Teorema de Stokes, se puede ver que la siguiente aplicación bilineal está bien definida. (Ver detalles en [9]):

$$\begin{aligned} \int : H_{DR}^k(M) \times H_k^{sm}(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ ([\omega], [\sigma]) &\mapsto \langle [\omega], [\sigma] \rangle = \int_{\sigma} \omega \end{aligned}$$

Todo es válido si tomamos  $H_k(M, \mathbb{R})$  en vez de  $H_k^{sm}(M, \mathbb{R})$  ya que existe un isomorfismo entre ambos grupos. Lo mismo ocurre con los grupos de cohomología. Finalmente, antes de enunciar el teorema de De Rham daremos una definición necesaria:

**Definición 1.3.2.** Dados dos espacios vectoriales  $V, W$  sobre  $\mathbb{R}$  y sea  $\varphi : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación bilineal. Entonces decimos que  $\varphi$  es un **pairing**

perfecto si la aplicación

$$\begin{aligned} V &\rightarrow W^* \\ v &\mapsto \varphi(v, -) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

**Teorema 1.3.3. (De Rham)** *Sea  $M$  una variedad diferenciable orientada. La aplicación bilineal*

$$\begin{aligned} \int &: H_{DR}^k(M) \times H_k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ ([\omega], [\sigma]) &\mapsto \langle [\omega], [\sigma] \rangle = \int_{\sigma} \omega \end{aligned}$$

es una pairing perfecto y, en particular,  $H_{DR}^k(M) \cong H_k(M, \mathbb{R})^*$  para todo  $k$ .

Para la dualidad de Poincaré nos restringiremos a una variedad diferenciable orientada  $M$  sin borde de dimensión  $n$ . Consideramos, ahora, la aplicación bilineal:

$$\int_M : \Omega^k(M) \times \Omega_c^{n-k}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\omega, \eta) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

Esta aplicación induce la siguiente aplicación bilineal en sus grupos de cohomología:

$$\begin{aligned} \int_M &: H_{DR}^k(M) \times H_c^{n-k}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ ([\omega], [\eta]) &\mapsto \langle [\omega], [\eta] \rangle = \int_M \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

**Teorema 1.3.4. (Dualidad de Poincaré)** *Sea  $M$  una variedad diferenciable orientada sin borde. La aplicación bilineal*

$$\begin{aligned} \int_M &: H_{DR}^k(M) \times H_c^{n-k}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ ([\omega], [\eta]) &\mapsto \langle [\omega], [\eta] \rangle = \int_M \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

es un pairing perfecto y, en particular,  $H_{DR}^{n-k}(M) \cong H_{DR}^k(M)^*$  para todo  $k$ .

Recordemos que  $H_c^k(M, \mathbb{R}) = H^k(M, \mathbb{R})$  cuando  $M$  es compacta.

Por tanto, dada una variedad  $M$  orientable, compacta y de dimensión  $n$ , por la Dualidad de Poincaré y el Teorema de De Rham tenemos los siguientes isomorfismos:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_k(M, \mathbb{R}) \cong H_{DR}^k(M)^*, [\sigma] \mapsto \left( [\omega] \mapsto \langle [\omega], [\sigma] \rangle = \int_{\sigma} \omega \right) \\ H_{DR}^{n-k}(M) \cong H_{DR}^k(M)^*, [\eta] \mapsto \left( [\omega] \mapsto \langle [\omega], [\eta] \rangle = \int_M \omega \wedge \eta \right) \end{array}}$$

Por tanto, obtenemos el siguiente isomorfismo:

$$H_k(M, \mathbb{R}) \cong H_{DR}^{n-k}(M) \quad (1.1)$$

es decir, a cada clase de homología  $[\sigma] \in H_k(M, \mathbb{R})$ , le asociamos un clase de cohomología que denotaremos por  $[\mathcal{V}_{\sigma}] \in H_{DR}^{n-k}(M)$  tal que  $\langle [\omega], [\sigma] \rangle = \langle [\omega], [\mathcal{V}_{\sigma}] \rangle$ , para cualquier  $[\omega] \in H_{DR}^{n-k}(M)$ . Es decir,  $\int_{\sigma} \omega = \int_M \omega \wedge \mathcal{V}_{\sigma}$ , para cualquier forma cerrada  $\omega \in \Omega^{n-k}(M)$ .

En la demostración del teorema vamos a necesitar ver el número de intersección  $\Delta \cdot G_f$  en términos cohomológicos. Vamos a necesitar representantes de clases de cohomología de subvariedades. Estas son las formas de Thom. Vamos a construirla (Ver detalles en [9]). Recordemos, primero, que:

**Definición 1.3.5.** Dadas dos variedades diferenciables  $S \subset M$ , un **entorno tubular** de  $S$  en  $M$  es un fibrado vectorial normal  $\pi : E \rightarrow S$ , junto con una extensión de  $i : S \hookrightarrow M$  a un isomorfismo  $\hat{i} : V \rightarrow U_{i(S)}$ , donde  $V$  es un entorno de la base en  $E$  y  $U_{i(S)}$  es un abierto en  $M$  que contiene a  $S$ .

Dada una subvariedad compacta orientable  $S \subset M$  de dimensión  $k$ . Sea  $U$  un entorno tubular de  $S$  en  $M$  que es unión de abiertos coordinados  $U_i$ , donde podemos suponer que  $S$  tiene coordenadas  $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ . Tomemos la función test  $\rho : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow [0, \infty)$ ; positiva, de soporte compacto en la bola unidad y con integral total uno. Entonces  $\mathcal{V}_i^{\epsilon} := \epsilon^{-k} \rho\left(\frac{x_{k+1}, \dots, x_n}{\epsilon}\right) dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega(U_i)$  tiene soporte compacto en  $U_i$  y es cerrada. Utilizando particiones de la unidad pegamos estas  $n - k$ -formas obteniendo así una  $n - k$ -forma  $\mathcal{V}_S^{\epsilon}$  que tiene soporte compacto en  $U$  y cerrada. Esta  $n - k$ -forma es la **forma de Thom**.

Se puede comprobar que  $[\mathcal{V}_S^{\epsilon}]$  es la clase de cohomología asociada a  $[S]$ , por el isomorfismo (1.1). (Ver detalles en [9], pág. 120)

La siguiente proposición será esencial para demostrar la igualdad.

**Proposición 1.3.6.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable compacta de dimensión  $n$ , y sean  $S_1, S_2$  dos subvariedades compactas de dimensión complementaria,  $k$  y  $n - k$ , respectivamente, y transversas a  $M$ . Además, sean  $[\mathcal{V}_{S_1}] = \Psi([S_1]) \in H_{DR}^{n-k}(M)$ ,  $[\mathcal{V}_{S_2}] = \Psi([S_2]) \in H_{DR}^k(M)$  sus clases de cohomología asociadas. Entonces,*

$$\langle [S_1], [S_2] \rangle = \int_M \mathcal{V}_{S_1} \wedge \mathcal{V}_{S_2} = S_1 \cdot S_2,$$

donde  $S_1 \cdot S_2$  es el número de intersección introducido en la Definición 1.2.2 y  $\Psi$  es el isomorfismo 1.1.

### 1.3.2. Demostración del Teorema

Según la proposición anterior, nos quedaría ver que

$$\int_M \mathcal{V}_{G_f} \wedge \mathcal{V}_\Delta = \tau(f)$$

Primero, veamos que la fórmula de Künneth, demostrada en [4], nos permite trabajar en el anillo de cohomología de una variedad producto  $M \times N$  a partir de los anillos de cohomología de  $M$  y  $N$ .

**Observación 1.3.7.** Dada  $M$  variedad diferenciable, recordemos que el producto cup  $\hat{\cup} : H^k(M) \times H^l(M) \rightarrow H^{k+l}(M)$  hace de  $H^*(M)$  un anillo; el anillo de cohomología de  $M$ . A partir de esto, dada otra variedad diferenciable  $N$ , definimos el producto cross como el homomorfismo de anillos:

$$\begin{aligned} \times : H^*(M) \otimes_R H^*(N) &\rightarrow H^*(M \times N); \\ \omega \times \tau &\mapsto \pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau \end{aligned}$$

donde  $\pi_1 : M \times N \rightarrow M, \pi_2 : M \times N \rightarrow N$  son las proyecciones naturales, y estamos considerando la cohomología de De Rham.

**Teorema 1.3.8. (Fórmula de Künneth para variedades diferenciables compactas)** *Dadas dos variedades diferenciables compactas  $M$  y  $N$ ,*

$$\begin{aligned} H^*(M) \otimes H^*(N) &\mapsto H^*(M \times N) \\ \omega \otimes \tau &\mapsto \pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \tau \end{aligned}$$

*es un isomorfismo de anillos.*

Ahora, aplicamos este resultado a nuestro caso particular. Comenzamos considerando  $M$  variedad compacta orientable y  $f : M \rightarrow M$  una aplicación diferenciable, donde tomamos  $\{\omega_i\}$  base de  $H^*(M)$  y  $\{\tau_i\}$  su base dual asociada mediante la dualidad de Poincaré. Ahora, considerando las proyecciones  $\pi_1, \pi_2 : M \times M \rightarrow M$ , tenemos por la fórmula de Künneth que  $\{\pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j\}$  es base de  $H^*(M \times M)$ . Entonces,

$$\mathcal{V}_{G_f} = \sum_{i,j} c_{i,j} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j$$

En primer lugar, tenemos que calcular quiénes son estos  $c_{i,j}$ .

**Lema 1.3.9.** *Sea  $f^* \omega_i = \sum_r f^{r,i} \omega_r$  (donde  $\deg \omega_i = \deg \omega_r$ ). Entonces*

$$\mathcal{V}_{G_f} = \sum_{i,j} (-1)^{\deg \omega_i} f^{i,j} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j.$$

*Demostración.* Observamos que dada una forma cerrada  $\eta \in \Omega^*(M)$ , tenemos que:

$$\int_{G_f} \eta = \int_{M \times M} \eta \wedge \mathcal{V}_{G_f} = \sum_{i,j} c_{i,j} \int_{M \times M} \eta \wedge \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j$$

Aplicando esto a la forma cerrada  $\pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{G_f} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l &= \int_{M \times M} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l \wedge \mathcal{V}_{G_f} = \\ &= \sum_{i,j} c_{i,j} \int_{M \times M} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l \wedge \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j = \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{\deg \omega_i (\deg \omega_l + \deg \tau_k)} c_{i,j} \int_{M \times M} \pi_1^* (\omega_k \wedge \tau_k) \wedge \pi_2^* (\omega_l \wedge \tau_j) = \\ &= (-1)^{\deg \omega_k (\deg \omega_l + \deg \tau_k)} c_{k,l} \int_{M \times M} (\omega_k \wedge \tau_k) \times (\omega_l \wedge \tau_l) = \\ &= (-1)^{\deg \omega_k (\deg \omega_l + \deg \tau_k)} c_{k,l} \int_M \omega_k \wedge \tau_k \int_M \omega_l \wedge \tau_l = \\ &= (-1)^{\deg \omega_k (\deg \omega_l + \deg \tau_k)} c_{k,l}. \end{aligned}$$

Por otro lado, considerando la aplicación inclusión

$$\begin{aligned} i : M &\hookrightarrow M \times M \\ p &\longmapsto (p, f(p)), \end{aligned}$$

y la misma integral, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{G_f} \pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l &= \int_M i^* (\pi_1^* \tau_k \wedge \pi_2^* \omega_l) = \int_M \tau_k \wedge f^* \omega_l = \\ &= \sum_r f^{r,l} \int_M \tau_k \wedge \omega_r = (-1)^{\deg \omega_k \deg \tau_k} f^{k,l} \end{aligned}$$

Igualando ambas tenemos que:

$$(-1)^{\deg \omega_k (\deg \omega_l + \deg \tau_k)} c_{k,l} = (-1)^{\deg \omega_k \deg \tau_k} f^{k,l}$$

Por tanto,  $c_{k,l} = (-1)^{-\deg \omega_k \deg \omega_l} f^{k,l} = (-1)^{\deg \omega_k} f^{k,l}$  y, así:

$$\mathcal{V}_{G_f} = \sum_{i,j} (-1)^{\deg \omega_i} f^{i,j} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j$$

□

**Corolario 1.3.10.** *Si  $f$  es la aplicación identidad,*

$$\mathcal{V}_\Delta = \sum_{i,j} (-1)^{\deg \omega_i} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j.$$

**Observación 1.3.11.** Por cuestiones de interés vamos a ver que

$$\mathcal{V}_\Delta = \sum_{i,j} (-1)^{\deg \omega_i} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j = (-1)^n \sum_{i,j} (-1)^{\deg \omega_i} \pi_2^* \omega_i \wedge \pi_1^* \tau_j.$$

*Demostración.* En coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ , es claro que  $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = (-1)^{n^2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$  y como  $(-1)^n = (-1)^{n^2}$ , queda demostrada la igualdad. □

**Teorema 1.3.12.** *Sea  $M$  un variedad diferenciable compacta,  $f : M \rightarrow M$  una aplicación continua, entonces:*

$$\int_M \mathcal{V}_{G_f} \wedge \mathcal{V}_\Delta = \tau(f).$$

*Demostración.* Por comodidad denotaremos

$$m := \deg \omega_i + \deg \omega_k + \dim M + \deg \tau_k (\deg \omega_k + \deg \tau_j) + \deg \tau_j \deg \omega_k$$

$$\begin{aligned}
& \int_M \mathcal{V}_{G_f} \wedge \mathcal{V}_\Delta = \\
&= \sum_{i,j,k} (-1)^{\deg \omega_i + \deg \omega_k + \dim M} f^{i,j} \int_{M \times M} \pi_1^* \omega_i \wedge \pi_2^* \tau_j \wedge \pi_2^* \omega_k \wedge \pi_1^* \tau_k = \\
&= \sum_{i,j,k} (-1)^m f^{i,j} \int_{M \times M} \pi_1^*(\omega_i \wedge \tau_k) \wedge \pi_2^*(\omega_k \wedge \tau_j) = \\
&= \sum_{i,j,k} (-1)^m f^{i,j} \delta_{ik} \delta_{kj} = \sum_i (-1)^{\dim M + \deg \tau_i} f^{i,i} = \\
&= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} f^{i,i} = \sum_q (-1)^q \text{tr}(f^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M)) = \tau(f).
\end{aligned}$$

□

## 1.4. Corolarios

Terminamos este capítulo, dando algunos resultados inmediatos del Teorema del Punto fijo de Lefschetz:

### 1.4.1. Característica de Euler-Poincaré

**Definición 1.4.1.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Definimos la **característica de Euler** de  $K$  como la suma del número de símlices de dimensión par menos la suma del número de símlices de dimensión impar. Es decir,

$$\chi(K) = \sum_n (-1)^n \text{rank } C_n^{\text{simp}}(K),$$

donde denotamos por  $C_n^{\text{simp}}(K)$  el grupo abeliano libre formado por los  $n$ -símlices de  $K$ .

**Corolario 1.4.2.** *Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Entonces,*

$$\chi(K) = \tau(\text{Id}).$$

*Demostración.* Por un lado, tenemos que

$$\text{rank } H_n(K) = \text{tr}(\text{Id}_{|H_n(K)}).$$

Por otro lado, como  $H_n(K) = H_n^{simp}(K)$  (esto se puede encontrar en [4]),

$$\text{rank } H_n(K) = \text{rank } H_n^{simp}(K).$$

Finalmente, utilizando la Fórmula de la traza de Hopf,

$$\tau(Id) = \sum_n (-1)^n \text{rank } H_n^{simp}(K) = \sum_n (-1)^n \text{rank } C_n^{simp}(K) = \chi(K).$$

□

### 1.4.2. Teorema del punto fijo de Brower

**Teorema 1.4.3. (Punto fijo de Brower)** *Toda aplicación  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  tiene un punto fijo.*

*Demostración.* Ocurre porque  $\mathbb{D}^n$  es contractible, luego  $H_k(\mathbb{D}^n, \mathbb{Z}) = 0$ , si  $k \neq 0$  y  $H_0(\mathbb{D}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . Además, toda  $f$  es homótopa a la identidad por ser  $\mathbb{D}^n$  contractible. En particular, podemos considerar la homotopía

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tx$$

Por tanto,  $\tau(f) = 1$  y concluimos que la aplicación tiene un punto fijo. □

## Capítulo 2

# Función Zeta y Conjeturas de Weil

En este capítulo, me he basado en las notas de Eduard Looijenga [5] y en las de Mircea Mustata [6]. Comenzaremos hablando de la función Zeta de Riemann, motivando así las conjeturas de Weil.

### 2.1. Funcion Zeta de Riemann.

La función Zeta de Riemann, nombrada así en honor a Bernhard Riemann, es una función de gran interés ya que está relacionada con la distribución de los números primos.

**Definición 2.1.1.** La **función Zeta de Riemann** está definida por la siguiente serie:

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esta serie es convergente para  $\operatorname{Re}(z) > 1$  y analítica en esta región.

**Observación 2.1.2.** Riemann observó que podía extender la función Zeta por continuación analítica a una función meromorfa en todo el plano complejo con un polo en  $z = 1$ . En particular, se puede demostrar la siguiente ecuación funcional:

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z),$$

donde  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds$  es la función Gamma. De esta manera, extendemos la función Zeta a todo el plano complejo menos  $z = 1$ .

**Observación 2.1.3.** En el año 1749, Euler demostró que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{(1 - p^{-z})}.$$

*Demostración.* Asumimos que la suma converge. Vamos a utilizar el hecho de que cada  $n \in \mathbb{N}$  tiene una descomposición única en factores primos.

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots,$$

entonces

$$\frac{1}{2^z} \zeta(z) = \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{6^z} + \dots$$

Restando ambas, obtenemos

$$\left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \zeta(z) = 1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \dots$$

Repetimos el proceso, multiplicando ahora por  $\frac{1}{3^z}$ , y obtenemos

$$\left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \left(1 - \frac{1}{3^z}\right) \zeta(z) = 1 + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \dots$$

Entonces, continuando el proceso indefinidamente, obtenemos lo que queríamos, es decir,

$$\left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \left(1 - \frac{1}{3^z}\right) \left(1 - \frac{1}{5^z}\right) \left(1 - \frac{1}{7^z}\right) \dots \zeta(z) = 1,$$

en caso de que suma  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$  converja.  $\square$

Gracias a la equivalencia de la Observación 2.1.3 podemos ver que la función Zeta de Riemann no tiene ceros en la región  $Re(z) > 1$ . La **hipótesis de Riemann** es una conjetura que propuso Bernhard Riemann en el año 1859 que dice que la función Zeta tiene sus ceros o bien en los enteros negativos que sean pares o en los números complejos con parte real igual a  $\frac{1}{2}$ . Este problema sigue estando abierto a día de hoy.

## 2.2. Función Zeta global de un anillo finítamente generado

En primer lugar, vamos a extender el concepto de función zeta anterior a anillos finítamente generados. Recordemos que un anillo  $R$  finítamente generado es un  $\mathbb{Z}$ -álgebra finítamente generado. Es decir,  $R \cong \frac{\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]}{I}$ , donde  $I \subset \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  es un ideal.

**Lema 2.2.1.** *Sea  $R$  un anillo finítamente generado y  $\mathfrak{m} \subset R$  un ideal maximal. Entonces,  $R/\mathfrak{m}$  es un cuerpo finito.*

*Demostración.* El hecho de que éste cociente sea un cuerpo es elemental, por tanto, demostraremos que es finito. Como  $R$  un anillo finítamente generado, es decir, un  $\mathbb{Z}$ -álgebra, entonces,  $R/\mathfrak{m}$  también lo es. Consideramos la aplicación natural  $\mathbb{Z} \rightarrow R/\mathfrak{m}$ , donde obtenemos que el kernel tiene que ser un ideal maximal de  $\mathbb{Z}$ . Es decir, el kernel es un ideal  $(p)$ , con  $p$  primo. Por tanto,  $R/\mathfrak{m}$  es isomorfo a  $\mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]/I$ , donde  $I$  es un ideal de  $\mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$ . Como  $\mathbb{F}_p[x_j]$  es un  $\mathbb{Z}$ -álgebra para  $j \in \{1, \dots, n\}$ , podemos considerar la aplicación  $\mathbb{F}_p[x_j] \rightarrow R/\mathfrak{m}$ . Como antes, el kernel es un ideal maximal de  $\mathbb{F}_p[x_j]$ , es decir, debe de estar generado por un polinomio irreducible  $f_j \in \mathbb{F}_p[x_j]$  de grado  $d_j$ , y por tanto,  $\{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, 0 \leq \alpha_j < d_j, \alpha_i \geq 0, i \in \{1, \dots, n\}\} \subset R/\mathfrak{m}$ . Ahora, consideramos el conjunto de monomios  $\{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, 0 \leq \alpha_j < d_j, j \in \{1, \dots, n\}\}$ , y la proyección  $\mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n] \rightarrow R/\mathfrak{m}$ . Es claro que la imagen de este conjunto por la proyección genera  $R/\mathfrak{m}$  como  $\mathbb{F}_p$ -espacio vectorial. Por tanto,  $R/\mathfrak{m}$  es finito.  $\square$

El hecho de que los números primos generen los ideales maximales en  $\mathbb{Z}$  junto con la expresión de la función Zeta como en la Observación 2.1.3 nos llevan a la siguiente definición.

**Definición 2.2.2.** Sea  $R$  un anillo finítamente generado. Definimos la **función Zeta** de  $R$  como:

$$\zeta(R; z) := \prod_{\mathfrak{m} \subset R} \frac{1}{1 - |R/\mathfrak{m}|^{-z}},$$

donde  $\mathfrak{m}$  barre los ideales maximales de  $R$ .

**Observación 2.2.3.** En el caso  $R = \mathbb{Z}$ , obtenemos la función Zeta de Riemann original.

**Observación 2.2.4.** Podemos agrupar los factores según la característica del cuerpo  $R/\mathfrak{m}$ .

Traslademos esta definición al lenguaje de esquemas. Comenzamos tomando un esquema afín  $X = \text{Spec}(R)$ , con  $R$  como antes. Por definición, los puntos de  $X$  se corresponden con los ideales primos de  $R$ . Tomamos en  $X$  la topología de Zarisky, donde un punto  $\{x_p\}$  es cerrado si su ideal  $(p)$  correspondiente en  $R$  es maximal. Denotamos el conjunto de puntos cerrados de  $X$  por  $\overline{X}$ , y tomamos en este conjunto la topología discreta.

El cuerpo residual  $k(x_p)$  es, por definición, el espacio cociente  $R/(p)$ . Entonces, la **función Zeta de Weil** de  $X$  es, formalmente,:

$$\zeta(R; z) = \zeta(X; z) = \prod_{x \in \overline{X}} \frac{1}{1 - |k(x)|^{-z}},$$

**Observación 2.2.5.** Esta definición se puede generalizar a esquemas de tipo finito sobre  $\mathbb{Z}$ , por ser unión disjunta de un número finito de subesquemas afines. Podemos agrupar los factores según la característica del cuerpo residual (como decimos en la Observación 2.2.4). Tomamos la descomposición de  $X = \sqcup_{p \text{ primo}} X_{\mathbb{F}_p}$ , donde  $X_{\mathbb{F}_p}$  es la fibra de  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  en un primo  $p \in \text{Spec}(\mathbb{Z})$  y es un esquema afín de tipo finito sobre  $\mathbb{F}_p$ . De esta manera, obtenemos que  $\overline{X} = \sqcup_{p \text{ primo}} \overline{X}_{\mathbb{F}_p}$ . Además, para  $x \in \overline{X}_{\mathbb{F}_p}$ ,  $k(x)$  es una extensión finita de  $\mathbb{F}_p$ .

Gracias a esta observación, obtenemos la siguiente definición.

**Definición 2.2.6.** Sea  $X$  un esquema de tipo finito sobre  $\mathbb{Z}$ . Entonces, la función **Zeta de Hasse-Weil** de  $X$  es:

$$\zeta(X; z) := \prod_{p \text{ primo}} \zeta(X_{\mathbb{F}_p}; z),$$

donde cada uno de los factores  $\zeta(X_{\mathbb{F}_p}; z) := \prod_{x \in \overline{X}_{\mathbb{F}_p}} (1 - |\mathbb{F}_p(x)|^{-z})^{-1}$  se llama **función Zeta local**.

**Observación 2.2.7.** Cada uno de los factores de  $\zeta(X_{\mathbb{F}_p}; z)$  tiene la forma  $(1 - p^{-kz})^{-1}$ , donde  $k \in \mathbb{N}$ . Por tanto, realmente,  $\zeta(X_{\mathbb{F}_p}; z)$  es una función de  $p^{-z}$ . Definimos así:

$$Z(X_{\mathbb{F}_p}, t) := \prod_{x \in \overline{X}_{\mathbb{F}_p}} (1 - t^{[\mathbb{F}_p(x):\mathbb{F}_p]})^{-1},$$

donde  $\zeta(X_{\mathbb{F}_p}, z) = Z(X_{\mathbb{F}_p}, p^{-z})$ .

### 2.2.1. Función Zeta para un esquema sobre un cuerpo finito.

Ahora, a partir de estas funciones locales, busquemos definir la función Zeta para esquemas sobre cuerpos finitos. Para ello, consideramos un esquema  $X$  de tipo finito sobre  $\mathbb{F}_q$ , con  $q = p^r$  y  $p$  primo.

**Definición 2.2.8.** Sea  $X$  un esquema de tipo finito sobre  $\mathbb{F}_q$ , sea  $\overline{X}$  el conjunto de puntos cerrados de  $X$ . Entonces, la función **Zeta de Weil** de  $X$  es:

$$Z(X; t) = \prod_{x \in \overline{X}} \frac{1}{1 - t^{[\mathbb{F}_q(x) : \mathbb{F}_q]}}.$$

### 2.2.2. Soluciones sobre cuerpos finitos

Sean  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_d]$  y sea  $\overline{\mathbb{F}_q}$  la clausura algebraica de  $\mathbb{F}_q$ , entonces las soluciones  $a \in (\overline{\mathbb{F}_q})^d$  para estos polinomios, son, en realidad, las soluciones  $a \in (\mathbb{F}_{q^n})^d$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lema 2.2.9.** Sean  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_d]$  y sea

$$R := \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_d] / (f_1, \dots, f_m).$$

Entonces, dado un  $n \in \mathbb{N}$ , hay una correspondencia biyectiva entre las soluciones  $a \in (\mathbb{F}_{q^n})^d$  de  $f_i(a) = 0$ , con  $i \in \{1, \dots, m\}$  y los  $\mathbb{F}_q$ -homomorfismos  $\varphi : R \rightarrow \mathbb{F}_{q^n}$ .

*Demostración.* Sea  $a = (a_1, \dots, a_d) \in (\mathbb{F}_{q^n})^d$ , tal que  $f_i(a) = 0$  para  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Consideramos la aplicación  $\varphi : \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_d] \rightarrow \mathbb{F}_{q^n}$  que evalúa cada polinomio de  $\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_d]$  en  $a$ . Observemos que  $\varphi$  es un  $\mathbb{F}_q$ -homomorfismo cuyo kernel es el ideal  $(f_1, \dots, f_m)$ . Por tanto, la aplicación que buscábamos es el  $\mathbb{F}_q$ -homomorfismo que induce  $\varphi$  en el anillo cociente  $R$ .

Por otro lado, si tenemos un  $\mathbb{F}_q$ -homomorfismo  $\varphi : R \rightarrow \mathbb{F}_{q^n}$  y tomamos  $a := (\varphi(\overline{x}_1), \dots, \varphi(\overline{x}_d))$ , obtenemos que  $a \in (\mathbb{F}_{q^n})^d$  y que dado  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $f_i(a) = f_i(\varphi(\overline{x}_1), \dots, \varphi(\overline{x}_d)) = \varphi(f_i(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_d)) = \varphi(0) = 0$ .  $\square$

**Definición 2.2.10.** Sea  $X$  un esquema de tipo finito sobre  $\mathbb{F}_q$ . Entonces, definimos como  $\mathbb{F}_{q^n}$ -**punto** de  $X$  a un punto  $x \in \overline{X}$  junto con un  $\mathbb{F}_q$ -homomorfismo de cuerpos  $\alpha : \mathbb{F}_q(x) \rightarrow \mathbb{F}_{q^n}$ . Denotamos el conjunto de  $\mathbb{F}_{q^n}$ -puntos de  $X$  como  $X(\mathbb{F}_{q^n})$ .

**Lema 2.2.11.** *Sea  $X = \text{Spec}(R)$ , con  $R$  como en el Lema 2.2.9. Entonces,  $X(\mathbb{F}_{q^n})$  coincide con el conjunto de  $\mathbb{F}_q$ -homomorfismos  $R \rightarrow \mathbb{F}_{q^n}$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in \overline{X}$  y  $\alpha : \mathbb{F}_q(x) \rightarrow \mathbb{F}_{q^n}$  un  $\mathbb{F}_{q^n}$ -punto, sea  $\mathfrak{m}$  el ideal correspondiente a  $x$  en  $R$ , tenemos  $\alpha : R/\mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{F}_{q^n}$ . El  $\mathbb{F}_q$ -homomorfismo que buscamos es la composición de  $\alpha$  con la proyección canónica  $R \rightarrow R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_q(x)$ .

Sea  $\sigma : R \rightarrow \mathbb{F}_{q^n}$  un  $\mathbb{F}_q$ -homomorfismo. El cuerpo finito  $\mathbb{F}_{q^n}$  tiene como único ideal maximal el  $(0)$ . Por tanto, el kernel de esta aplicación es un ideal maximal de  $R$ . Por tanto, esto induce un  $\mathbb{F}_q$ -homomorfismo  $R/\mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{F}_{q^n}$ , y como cada maximal de  $R$  se corresponde con un punto de  $\overline{X}$ , y  $R/\mathfrak{m}$  con el cuerpo residual  $\mathbb{F}_q(x)$ , habríamos terminado.  $\square$

Además, gracias al Lema 2.2.9, sabemos que  $X(\mathbb{F}_{q^n})$  se corresponde con el conjunto de soluciones  $a \in (\mathbb{F}_{q^n})^d$  del sistema de ecuaciones dado por  $f_1 = \dots = f_m = 0$ . Ahora, denotemos por  $X_r$  el conjunto de puntos  $x \in \overline{X}$  tal que  $[\mathbb{F}_q(x) : \mathbb{F}_q] = r$ . Esto nos permite dar la siguiente expresión:

$$Z(X; t) = \prod_{r=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-t^r} \right)^{|X_r|}.$$

Ahora, si  $x \in X_r$ , entonces  $\mathbb{F}_q(x)$  admite un  $\mathbb{F}_q$ -homomorfismo sobre  $\mathbb{F}_{q^n}$  si y solo si  $r|n$ . Ahora si  $r|n$ , el número de  $\mathbb{F}_q$ -homomorfismos  $\mathbb{F}_q(x) \rightarrow \mathbb{F}_{q^n}$  es  $r$ . Sea  $\alpha$  un homomorfismo de este tipo, entonces  $F\alpha, \dots, F^{r-1}\alpha$  son los otros  $r-1$ , donde  $F$  es el automorfismo de Frobenius (ver sección 2.2.3). Por tanto,  $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = \sum_{r|n} |X_r| r$ .

Gracias a esta expresión, obtenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.12.** *Sea  $X$  un esquema de tipo finito sobre  $\mathbb{F}_q$ , entonces tenemos que:*

$$Z(X, t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})| \frac{t^n}{n}\right).$$

*Demostración.* Por un lado, suponiendo que  $Z(X, t) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})| \frac{t^n}{n})$ , tenemos que

$$t \frac{d}{dt} \log Z(X, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})| t^n.$$

Por otro lado, utilizando el Lema 2.2.11, tenemos que

$$\begin{aligned}
t \frac{d}{dt} \log Z(X, t) &= \frac{t \frac{d}{dt} Z(X, t)}{Z(X, t)} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|X_r| r t^r}{(1-t^r)} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |X_r| r t^r (t^r)^n = \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |X_r| r (t^r)^n = \sum_{r=1}^{\infty} \left[ |X_r| r \sum_{n=1}^{\infty} (t^r)^n \right] = \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r|m} |X_r| r t^m = \sum_{m=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^m})| t^m.
\end{aligned}$$

□

**Ejemplos 2.2.13.**    ■  $Z(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d, t) = Z(\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_d], t) = \frac{1}{1 - q^d t}$ .  
 $\zeta(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^d, s) = \zeta(\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d], s) = \zeta(s - d)$ .

*Demostración.* Utilizando el Lema 2.2.11 tenemos que  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d(\mathbb{F}_q^n)$  es el conjunto de soluciones de los polinomios nulos en  $(\mathbb{F}_{q^n})^d$  que, evidentemente, es  $(\mathbb{F}_{q^n})^d$ . Por tanto,  $|\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d(\mathbb{F}_q^n)| = q^{nd}$ . Calculamos, entonces, su función zeta.

$$\begin{aligned}
Z(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d, t) &= Z(\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_d], t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{nd} \frac{t^n}{n}\right) = \\
&= \exp(-\log(1 - q^d t)) = \frac{1}{1 - q^d t}.
\end{aligned}$$

A partir de ésta,

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^d, s) &= \prod_{p \text{ primo}} \zeta(X_{\mathbb{F}_p}; s) = \prod_{p \text{ primo}} Z(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^d, p^{-s}) = \\
&= \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{d-s}} = \zeta(s - d).
\end{aligned}$$

□

■  $Z(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^d, s) = \prod_{k=0}^d Z(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^k, s) = \prod_{k=0}^d \frac{1}{1 - q^k t}$ .  
 $\zeta(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^d, s) = \prod_{k=0}^d \zeta(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^k, s) = \prod_{k=0}^d \zeta(s - k)$ .

*Demostración.* Se prueba inmediatamente, ya que  $\mathbb{P}^d$  es la unión disjunta de  $\mathbb{A}^0, \mathbb{A}^1, \dots, \mathbb{A}^d$ . □

**Observación 2.2.14.** En estos ejemplos, está claro que  $\zeta(X, -)$  tiene una extensión meromorfa en el plano complejo, gracias a la ecuación funcional de la función Zeta de Riemann. Por otro lado, la función  $Z(X, -)$  es una función racional. En general, no se ha demostrado que si  $X$  es un esquema de tipo finito sobre  $\mathbb{F}_q$ , entonces  $\zeta(X, -)$  tenga una extensión meromorfa en el plano complejo. No obstante, la racionalidad de  $Z(X, -)$  fue demostrada en el año 1960. Ésta es una de las conocidas conjeturas de Weil que enunciaremos a continuación.

### 2.2.3. Cuerpos finitos y automorfismo de Frobenius.

Recordemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{\mathbb{F}}_q$  tiene un único subcuerpo  $\mathbb{F}_{q^n}$  con  $q^n$  elementos;  $\overline{\mathbb{F}}_q = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{q^n}$ . El subcuerpo  $\mathbb{F}_{q^n} = \{x \in \overline{\mathbb{F}}_q : x^{q^n} = x\}$ .

Consideramos el endomorfismo de Frobenius

$$\begin{aligned} F : \overline{\mathbb{F}}_q &\rightarrow \overline{\mathbb{F}}_q \\ x &\mapsto x^q, \end{aligned}$$

y obtenemos que  $\mathbb{F}_{q^n} = \{x \in \overline{\mathbb{F}}_q : F^n(x) = x\}$ . Es decir,  $\mathbb{F}_{q^n} = \text{Fix}(F^n)$  en  $\overline{\mathbb{F}}_q$ .

**Observación 2.2.15.** Sea  $X$  un  $\mathbb{F}_q$ -esquema. Por definición, un elemento de  $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$  es  $x \in \overline{X}$  junto con un  $\mathbb{F}_q$ -homorfismo  $\alpha : \mathbb{F}_q(x) \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_q$ . Consideramos el automorfismo de Frobenius de  $\overline{\mathbb{F}}_q$  como una acción sobre  $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ ,

$$F(x, \alpha) := (x, F \circ \alpha)$$

Observamos que  $F^n(x, \alpha) = (x, \alpha)$  si y solo si la imagen de  $\alpha$  está en  $\mathbb{F}_{q^n}$ , es decir, si y solo si  $(x, \alpha)$  está en  $X(\mathbb{F}_{q^n})$ . Por tanto,  $X(\mathbb{F}_{q^n}) = \text{Fix}(F^n)$  en  $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ .

## 2.3. Conjeturas de Weil

Es algo muy natural preguntarse por el número de soluciones de un sistema de ecuaciones sobre un cuerpo finito. Por ello, gracias a la expresión de la función Zeta como en la Proposición 2.2.12, las llamadas conjeturas de Weil (relacionadas con esta función) nos dan información acerca del número de soluciones del sistema. De ahí su gran importancia.

Sea  $X$  una variedad proyectiva no singular de dimensión  $n$  definida sobre un cuerpo  $\mathbb{F}_q$ . Entonces, **las Conjeturas de Weil** son:

(i) **Racionalidad.**  $Z(X; t)$  es una función racional de  $t$ . De hecho,

$$Z(X; t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\dots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\dots P_{2n}(t)}$$

con  $P_0(t) = 1 - t$ ;  $P_{2n}(t) = 1 - q^n t$  y  $P_i(t)$  es un polinomio con coeficientes enteros para cada  $i \in \{1, \dots, 2n - 1\}$ .

(ii) **Ecuación funcional.** La función zeta satisface la siguiente ecuación:

$$Z\left(\frac{1}{q^n t}\right) = \pm q^{n\frac{\chi}{2}} t^\chi Z(t),$$

para cierto entero  $\chi$ .

(iii) **Betti numbers.** Asumiendo la anterior conjetura, llamamos  $i$ -ésimo número de Betti al grado del polinomio  $P_i(t)$  y lo denotamos por  $B_i(X)$ . Entonces,  $\chi(X) = \sum_i (-1)^i B_i$ . Además, si  $X$  es la reducción modulo  $p$  de una variedad compleja  $\tilde{X}$ , entonces, estos números son los números de Betti en el sentido topológico de  $\tilde{X}$ .

(iv) **Análogo de la hipótesis de Riemann.** Para  $i \in \{1, \dots, 2n - 1\}$ ,  $P_i(t) = \prod_{j=1}^{B_i(X)} (1 - \alpha_{ij} t)$ , donde  $\alpha_{ij}$  son enteros algebraicos de módulo  $q^{\frac{i}{2}}$ .

**Observación 2.3.1.** Recordemos que la hipótesis de Riemann dice que  $\zeta(X, s)$  tiene sus ceros no triviales en la recta  $Re(s) = \frac{1}{2}$ . En este caso, lo que nos dice el análogo de la hipótesis de Riemann es que  $|\alpha_{ij}| = q^{\frac{i}{2}}$ , con  $i \in \{1, \dots, 2n - 1\}$ . Es decir, que los ceros de la función Zeta de Weil están en  $|t| = q^{-\frac{i}{2}}$ . Como  $\zeta(X, s) = Z(X, q^{-s})$ , esto significa que  $\zeta(X, s)$  tiene sus ceros en  $Re(s) = \frac{i}{2}$  con  $i \in \{1, \dots, 2n - 1\}$ , justificando así el nombre de esta conjetura.

### 2.3.1. Racionalidad

Para explicar de dónde vino la idea de Weil, consideremos la siguiente situación.

**Definición 2.3.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $K$  de característica 0 con dimensión finita igual a  $d$ . Entonces, la **función Zeta** de una aplicación lineal  $F : V \rightarrow V$  está definida por

$$Z(F, t) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \text{tr}(F^n : V \rightarrow V) \frac{t^n}{n}\right).$$

**Observación 2.3.3.** Veamos que  $Z(F, t)$  es una función racional.

*Demostración.* La aplicación  $F$  no cambia si cambiamos el cuerpo  $K$  por su clausura algebraica  $\overline{K}$ . De esta manera, el polinomio característica  $\rho_F(t) = (1 - t\lambda_1)\dots(1 - t\lambda_d)$ , donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  son los autovalores de  $F$ . Como  $F$  es un operador lineal y  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita, existe una base de  $V$  tal que la matriz asociada a  $F$  es una matriz triangular superior con los autovalores en la diagonal. Por tanto, la matriz asociada a  $F^n$  es una matriz triangular superior con  $\lambda_1^n, \dots, \lambda_d^n$  en la diagonal. Por tanto,  $\text{tr}(F^n : V \rightarrow V) = \lambda_1^n + \dots + \lambda_d^n$ . Obtenemos, entonces, que

$$\begin{aligned} Z(F, t) &:= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \text{tr}(F^n : v \rightarrow V) \frac{t^n}{n}\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_1^n + \dots + \lambda_d^n) \frac{t^n}{n}\right) = \\ &= \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{1 - \lambda_i t}\right) = \frac{1}{\det(\text{Id}_V - Ft)}. \end{aligned}$$

□

Ésto llevó a la idea de que contar los puntos fijos de  $F^n$ , es decir, los puntos de  $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ , se podía transformar en un problema de álgebra lineal en el que contáramos trazas. Para esto, Weil se fijó en el Teorema del Punto fijo de Lefschetz. Él dijo que debía existir una topología algebraica para variedades algebraicas sobre cuerpos finitos. En particular, se trataba de encontrar un functor  $H_W^*$  contravariante de la categoría de este tipo de variedades en la categoría de álgebras graduadas sobre un cuerpo  $K$  que cumpliera la fórmula de Lefschetz. En particular, este cuerpo tenía que tener característica cero, para que el Teorema del Punto fijo de Lefschetz pudiera cumplirse. (Lefschetz utilizaba el functor cohomología de complejos simpliciales a grupos de cohomología).

Sea  $X$  una variedad completa y no singular (el análogo algebraico de una variedad compacta) sobre un cuerpo  $\mathbb{F}_q$ , entonces suponiendo que tenemos este functor contravariante tal que  $H_W^*(X) = \bigoplus H_W^i(X)$ , pedimos lo siguiente:

- (i)  $H_W^i(X)$  son espacios vectoriales finito dimensionales.
- (ii)  $H_W^i(X) = 0$ , para  $i < 0$  o  $i > 2\dim(X)$

(iii) (Fórmula de Lefschetz):

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = \sum_{i=0}^{2\dim(X)} (-1)^i \operatorname{tr}(F^{n*} |_{H_W^i(X)}),$$

donde  $H_W^i(X)$  es la cohomología que Weil propuso que habría que buscar, con coeficientes en un cuerpo de característica cero.

**Proposición 2.3.4.** *La función Zeta de Weil de una variedad completa y no singular de dimensión  $r$  sobre un cuerpo  $\mathbb{F}_q$  es racional.*

*Demostración.* El último paso de la cadena de igualdades viene de la demostración de la Observación 2.3.3.

$$\begin{aligned} Z(X, t) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})| \frac{t^n}{n}\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i \operatorname{tr}(F^{n*} |_{H_W^i(X)})\right) \frac{t^n}{n}\right) = \\ &= \prod_{i=0}^{2r} \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tr}(F^{n*} |_{H_W^i(X)}) \frac{t^n}{n}\right)^{(-1)^i} = \prod_{i=0}^{2r} (\det(\operatorname{Id}_{H_W^i(X)} - F^*t))^{(-1)^{i+1}}. \end{aligned}$$

□

### 2.3.2. Ecuación funcional

Para demostrar la ecuación funcional, supondremos que se cumple, además, lo siguiente.

Sea  $X$  una variedad sobre un cuerpo finito  $\mathbb{F}_q$  de dimensión  $r$ :

- (i) (Dualidad de Poincaré). Sea  $K$  el cuerpo de característica cero dónde tomamos los coeficientes de la cohomología de Weil. La aplicación bilineal

$$\int_X : H_W^k(X) \times H_W^{2r-k}(X) \rightarrow K$$

es un pairing perfecto y, en particular,  $H_W^{2r-k}(X) \cong H_W^k(X)^*$  para todo  $k$ . Además, sea  $F : X(\mathbb{F}_q) \rightarrow X(\mathbb{F}_q)$  el automorfismo de Frobenius y sean  $\omega \in H_W^k(X)$  y  $\tau \in H_W^{2r-k}(X)$ , entonces,

$$\int_X F^*(\omega) \wedge F^*(\tau) = q^r \int_X \omega \wedge \tau.$$

donde  $F^* : H_W^i(X(\mathbb{F}_q)) \rightarrow H_W^i(X(\mathbb{F}_q))$  es la aplicación inducida en cohomología de  $F$ .

Antes de demostrar la ecuación funcional, necesitamos un lema.

**Lema 2.3.5.** *Sea  $\varphi : V \times W \rightarrow K$  un pairing perfecto de espacios vectoriales de dimensión  $r$  sobre un cuerpo  $K$ . Supongamos que existen  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ ,  $f \in \text{End}_K(V)$  y  $g \in \text{End}_K(W)$ , tal que*

$$\varphi(f(v), g(w)) = \lambda\varphi(v, w),$$

para todo  $v \in V$  y  $w \in W$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \det(\text{Id} - tg|_W) &= \frac{(-1)^r \lambda^r t^r}{\det(f|_V)} \det(\text{Id} - \lambda^{-1} t^{-1} f|_V); \\ \det(g|_W) &= \frac{\lambda^r}{\det(f|_V)}. \end{aligned}$$

*Demostración.* En primer lugar, reemplazamos  $K$  por su clausura algebraica  $\overline{K}$ , es decir, podemos asumir que  $K$  es algebraicamente cerrado. Como  $f$  es lineal y  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita, existe una base  $\{e_i\}$  de  $V$  tal que la matriz asociada,  $(a_{ij})$ , a  $f$  es una matriz triangular superior con los autovalores en la diagonal. Sea  $\{e_i^*\}$  la base dual de  $W$  mediante la aplicación  $\varphi$ .

Veamos que  $g$  también es invertible. Si existe un  $w \in W$  tal que  $g(w) = 0$ , entonces  $0 = \varphi(f(v), g(w)) = \lambda\varphi(v, w)$  para toda  $v \in V$ . Por tanto,  $w = 0$ . Además, como  $\varphi(f(e_i), e_j^*) = \lambda\varphi(e_i, g^{-1}(e_j^*)) = 0$  para  $i > j$ , tenemos que  $\varphi(e_i, g^{-1}(e_j^*)) = 0$  para  $i > j$ . Entonces, la matriz de  $g^{-1}$ ,  $(b_{ij})$ , es una matriz triangular inferior.

Además,

$$a_{jj} = \varphi(f(e_j), e_j^*) = \lambda\varphi(e_j, g^{-1}(e_j^*)) = \lambda b_{jj}.$$

Entonces, en primer lugar, como

$$\det(f|_V) = \prod_{i=1}^r a_{ii},$$

obtenemos,

$$\det(g|_W) = \prod_{i=1}^r b_{ii}^{-1} = \frac{\lambda^r}{\prod_{i=1}^r a_{ii}}.$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} \det(Id - tg|_W) &= \det(g|_W) \det(g^{-1} - tId|_W) = \frac{\lambda^r}{\det(f|_V \prod_{j=1}^r (a_{jj} \lambda^{-1} - t))} = \\ &= \frac{(-1)^r \lambda^r t^r}{\det(f|_V)} \prod_{j=1}^r (1 - a_{jj} \lambda^{-1} t^{-1}) = \frac{(-1)^r \lambda^r t^r}{\det(f|_V)} \det(Id - \lambda^{-1} t^{-1} f|_V). \end{aligned}$$

□

Denotaremos por

$$P_i(t) := \det(Id_{H_W^i(X)} - F^*t)^{(-1)^{i+1}},$$

donde recordemos que

$$Z(X, t) = \prod_{i=0}^{2r} \det(Id_{H_W^i(X)} - F^*t)^{(-1)^{i+1}}.$$

Podemos, entonces, demostrar la ecuación funcional

*Demostración.* En primer lugar, gracias al lema tenemos que

$$P_{2r-i}(t) = \frac{(-1)^{\beta_i} q^{r\beta_i} t^{\beta_i}}{\det(F^*_{|H_W^i(X)})} P_i\left(\frac{1}{q^r t}\right).$$

Por otro lado, denotando por  $\beta_i := \dim(H_W^i(X))$  si suponemos que  $\alpha_1, \dots, \alpha_{\beta_i}$  son los autovalores de  $F^*_{|H_W^i(X)}$ , entonces tenemos que  $\frac{q^r}{\alpha_1}, \dots, \frac{q^r}{\alpha_{\beta_i}}$  son los autovalores de  $F^*_{|H_W^{2r-i}(X)}$ . Por tanto,

$$\prod_{i=0}^{2r} (\det(F^*_{|H_W^i(X)})^{(-1)^i}) = \prod_{i=0}^r [\det(F^*_{|H_W^i(X)}) \det(F^*_{|H_W^{2r-i}(X)})]^{(-1)^i} = \prod_{i=0}^r (q^{r\beta_i})^{(-1)^i} = q^{r\frac{\chi}{2}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} Z(X, \frac{1}{q^r t}) &= \prod_{i=0}^{2r} (P_i(\frac{1}{q^r t}))^{(-1)^{i+1}} = \prod_{i=0}^{2r} \left( \frac{\det(F^*_{|H_W^i(X)})}{(-1)^{\beta_i} q^{r\beta_i} t^{\beta_i}} \right)^{(-1)^{i+1}} \prod_{i=0}^{2r} (P_{2r-i}(t))^{(-1)^{i+1}} = \\ &= \frac{(-1)^{\chi} q^{r\chi} t^{\chi}}{q^{r\frac{\chi}{2}}} Z(X, t) = \pm q^{r\frac{\chi}{2}} t^{\chi} Z(X, t). \end{aligned}$$

□

## 2.4. Desarrollo histórico del las conjeturas de Weil

En el año 1974, Pierre Deligne demuestra, finalmente, las conjeturas de Weil, trabajo por el que obtiene la medalla Fields en el año 1978. Frans Oort escribe una nota [7] contando la historia de la conjetura demostrada por Deligne que paso a resumir. Las referencias históricas están al final del esta sección.

Carlo Friedrich Gauss publica su trabajo “Disquisitiones arithmeticae” en 1801, cuya version en inglés la encontraremos en [3]. En su artículo 358, determina la suma Gaussiana de orden 3, para un primo  $p = 3n + 1$ , y calculando al mismo tiempo el número de soluciones de todas las congruencias  $ax^3 - by^3 \equiv 1 \pmod{p}$ . Asimismo, en la última entrada de su Tagebuch [4] obtiene el número de soluciones de cualquier congruencia  $y^2 \equiv ax^4 - b \pmod{p}$ . Gauss calcula el número de puntos en estas curvas elípticas y obtiene como consecuencia la hipótesis de Riemann en este caso, una de las conjeturas de Weil, para los cuerpos de funciones definidas por esta ecuación sobre un cuerpo finito de  $p$  elementos, con  $p$  primo.

Más de un siglo después, Emil Artin propone en su Tesis Doctoral una definición de función Zeta para una curva algebraica sobre un cuerpo finito y la conjetura de la hipótesis de Riemann en este caso particular.

En el año 1931, F.K.Schmidt demuestra en [8] el teorema de Riemann-Roch para curvas de característica positiva. A partir de este resultado, prueba las conjeturas de la racionalidad y la ecuación funcional propuestas por Artin. Poco más tarde, entre 1934 y 1935, H. Hasse ofrece dos demostraciones diferentes para el análogo de la hipótesis de Riemann para curvas elípticas sobre un cuerpo finito en [6] y [7].

Finalmente, es Weil en 1948, quién también con dos demostraciones diferentes prueba sus conjeturas para curvas algebraicas sobre cuerpos finitos. También las demuestra en el caso de las variedades abelianas. En su trabajo [10] Weil deduce la hipótesis de Riemann de una desigualdad de Castelnuovo y Severi sobre las correspondencias en una curva. En [11] utiliza la representación L-ádica de Frobenius en las variedades abelianas, la cual inspiró las futuras aproximaciones cohomológicas.

Al año siguiente, en 1949 publica su artículo [9] donde propone las conje-

turas. No es hasta 1954 cuando el propio Weil describe cómo estas conjeturas son ciertas si obtenemos una cohomología adecuada. Por ello, la mayoría del trabajo de las conjeturas de Weil se centra en la búsqueda de una buena cohomología para variedades definidas sobre cuerpos de característica un primo, que de los números de Betti “correctos”. Además, esta teoría de cohomología debe tener sus coeficientes en un cuerpo de característica cero, para poder contar los puntos fijos de los morfismos como hemos visto en el Teorema del Punto Fijo de Lefschetz.

Es Bernard Dwork, en 1960, el primero en demostrar la racionalidad de la función Zeta utilizando métodos analíticos  $p$ -ádicos, en su trabajo [2]. A lo largo de ésta década, Alexander Grothendieck junto con Michael Artin y otros colaboradores demuestran la racionalidad, la ecuación funcional y la relación con los números de Betti utilizando propiedades de cohomología étale, en los Seminarios de Geometría Algebraica. Una cohomología desarrollada por Grothendieck y Artin exclusivamente para las conjeturas de Weil, mediante la publicación de los trabajos [5], [1], [12] y [13].

En 1968, Grothendieck trata de generalizarlas las conjeturas de Weil, presentando las llamadas conjeturas estándares en su trabajo [14]. Las conjeturas estándares sobre ciclos algebraicos describen entre otros las relaciones entre los ciclos algebraicos y las conjeturas de Weil. Una vez probado esto, el análogo de la hipótesis de Riemann se obtendría en consecuencia. Sin embargo, por el momento, muchas de ellas siguen abiertas.

Es en 1974, cuando finalmente el caso general del análogo de la hipótesis de Riemann es demostrado por Pierre Deligne, en su trabajo [15].



# Notas históricas

- [1] Artin, M. (1962). Grothendieck topologies. [Material del aula]. Harvard University, Dept. of Mathematics.
- [2] Dwork, B.M. (1960). On the rationality of the zeta function of an algebraic variety. Amer. J.Math 82, 631-648.
- [3] Gauss, C., Clarke, A. (1966). Disquisitiones arithmeticae. New Haven: Yale University Press.
- [4] Gauss, C., Wussing, H. (2009). Mathematisches Tagebuch. Frankfurt am Main: Deutsch.
- [5] Grothendieck, A. (1958). The cohomology theory of abstract algebraic varieties. Proc. Int. Cong. Math, Edinburg, 103-118”.
- [6] Hasse, H. (1934). Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Anh. Math. Sem. Hamburg 10, 325–348.
- [7] Hasse, H. (1936). Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik, I, II and III. Journ. reine angew. Math. (Revista) 175 , 55–62, 69–88 and 193–208.
- [8] Schmidt, F. (1931). Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik  $p$ , Math. Zeitschr. 33 (1931), 1–32 (Habilitationsschrift).
- [9] Weil, A. (1949). Numbers of solutions of equations in finite fields. Bulletin Of The American Mathematical Society, 55(5), 497-509.
- [10] Weil, A. (1948). Sur les courbes algebriques et les varietes qui s'en deduisent. Paris: Hermann.

- [11] Weil, A. (1948). Varietes abeliennes et courbes algebriques. Paris: Hermann.
- [12] Artin, M., Grothendieck, A., Verdier, J. (1972). Theorie des topos et cohomologie etale des schemas. Berlin: Springer-Verlag.
- [13] Secretariat mathematique. (1966). Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions. Seminaire Bourbaki 279. Paris.
- [14] Grothendieck, A. (1969), Standard Conjectures on Algebraic Cycles, Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), Oxford University Press, pp. 193–199, MR 0268189.
- [15] Deligne, P. (1974). La conjecture de Weil. 1. Publ. Math. IHES Bures-sur-Yvette 43, 273-307.

## Apéndice A

# Resultados previos para la demostración del Teorema del Punto Fijo de Lefschetz

Hemos separado este apéndice en dos partes. La primera se reserva para definir la homología relativa, mientras que en la segunda, definiremos qué es un complejo de cadenas celular. Estos dos apartados son necesarios para el Corolario 1.1.28, a su vez esencial para la demostración del Teorema del Punto fijo de Lefschetz. La referencia principal es [4].

### A.1. Grupos de homología relativa

Dado un espacio topológico  $X$  y un subespacio  $A$  de  $X$ , denotamos por

$$C_n(X, A) := C_n(X) / C_n(A),$$

donde  $C_n(X)$  es el grupo de cadenas singulares de dimensión  $n$  de  $X$  y  $C_n(A)$  es el grupo de cadenas singulares de  $A$ . La aplicación borde usual  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  cumple que  $\partial_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$ , por lo que induce una aplicación que llamaremos **operador borde cociente** y denotaremos igual;  $\partial_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ . La propiedad  $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$  se cumple ya que se cumple antes de pasar al cociente. Dejando variar  $n$ , entonces, tenemos un complejo de cadenas  $(C_\bullet(X, A), \partial_\bullet)$  y podemos tomar su homología que llamaremos **homología relativa** del par  $(X, A)$  y denotaremos por  $H_n(X, A)$ .

Nuestro objetivo es relacionar los grupos de homología de  $A$ ,  $X$  y el par  $(X, A)$  viendo que la sucesión exacta de complejos:

$$0 \rightarrow C_{\bullet}(A) \rightarrow C_{\bullet}(X) \rightarrow \frac{C_{\bullet}(X)}{C_{\bullet}(A)} \rightarrow 0$$

induce en homología la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \dots \rightarrow H_0(X, A) \rightarrow 0$$

Esto es consecuencia de un resultado general:

**Proposición A.1.1.** *Una sucesión exacta corta de complejos de cadenas*

$$0 \rightarrow (A_{\bullet}, \partial_A) \rightarrow (B_{\bullet}, \partial_B) \rightarrow (C_{\bullet}, \partial_C) \rightarrow 0,$$

es decir,

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & A_n & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1} \rightarrow \dots \\ & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\ \dots & \rightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} \rightarrow \dots \\ & & \downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j \\ \dots & \rightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

induce una sucesión exacta larga en los grupos de homología:

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \rightarrow \dots$$

*Demostración.* La prueba consistirá en dos partes. En la primera, vamos a definir una aplicación  $H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A)$  que nos permita obtener ese resultado. La llamaremos **aplicación de conexión**. En la segunda, comprobaremos que lo que obtenemos es una sucesión exacta larga.

Tomamos  $c \in C_n$  un ciclo, es decir,  $\partial(c) = 0$ . Como  $j$  es sobreyectiva, existe un  $b \in B_n$ , tal que  $c = j(b)$  y como  $j(\partial(b)) = \partial(j(b)) = \partial(c) = 0$ , se tiene que  $\partial(b) \in \ker j$ . Además, como  $\ker j = \text{Im } i$ , existe un  $a \in A_{n-1}$ , tal que  $\partial(b) = i(a)$ , que es único por ser  $i$  inyectiva. Finalmente, como  $i$  es inyectiva y

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\partial} & 0 \\ & \downarrow i & \\ b & \xrightarrow{\partial} & \partial(b) \xrightarrow{\partial} 0 \\ & \downarrow j & \downarrow j \\ c & \xrightarrow{\partial} & 0 \end{array}$$

$i(\partial(a)) = \partial(i(a)) = \partial(\partial(b)) = 0$ , tenemos que  $a$  es un ciclo. De esta manera, definimos  $\partial_* : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$  como  $[c] \mapsto [a]$ .

Veamos que la aplicación  $\partial_*$  está bien definida:

- (i) Como hemos dicho antes, por ser  $i$  inyectiva,  $a$  está unívocamente determinada por  $\partial(b)$ .
- (ii) Vemos que el  $b$  que tomamos no afecta a  $a$ . Si  $b'$  es otra elección, tenemos que  $j(b) = j(b') = c$ . Entonces,  $j(b' - b) = 0$ . Por tanto,  $b' - b$  está en  $\ker j = \text{Im } i$ . Es decir, existe un  $a'$  tal que  $i(a') = b' - b$ , entonces,  $b' = b + i(a')$ . Finalmente,  $\partial(b') = \partial(b) + \partial(i(a')) = i(a) + \partial(i(a')) = i(a + \partial(a'))$ , donde  $a + \partial(a')$  es homólogo a  $a$ .
- (iii) Vemos que el  $[a]$  no depende del elemento de la clase de  $c$  que tomemos. Sea  $c'$  tal que  $[c'] = [c]$ . Entonces, existe un  $c''$  tal que  $\partial(c'') = c' - c$ , es decir,  $c' = \partial(c'') + c$ . Encima, existe un  $b''$  tal que  $c'' = j(b'')$ , por lo que  $c' = \partial(c'') + c = \partial(j(b'')) + j(b) = j(\partial(b'')) + j(b) = j(\partial(b'') + b)$ , donde  $b + \partial(b'')$  es homólogo a  $b$ , como hemos visto no cambia  $a$ .

Veamos que encima  $\partial_*$  es un homomorfismo.

Sean  $[c_1], [c_2]$  y  $\partial_*([c_1]) = [a_1], \partial_*([c_2]) = [a_2]$ . Sean también  $i(a_1) = \partial(b_1)$  y  $i(a_2) = \partial(b_2)$ . Entonces, tenemos que :

$$\begin{aligned} i(a_1) + i(a_2) &= \partial(b_1) + \partial(b_2) = \partial(b_1 + b_2) \\ j(b_1) + j(b_2) &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

Por tanto,  $\partial_*([c_1] + [c_2]) = [a_1] + [a_2]$ .

Entonces, ya podemos probar que la sucesión

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \rightarrow \dots$$

es una sucesión exacta larga.

(i)  $Im\ i_* = ker\ j_*$

Dado  $[a] \in A_n$ , entonces,  $j_*(i_*[a]) = [j(i(a))] = [0]$ , por ser  $Im\ i = ker\ j$ . Entonces,  $Im\ i_* \subset ker\ j_*$ .

Por otro lado, dado  $[b] \in ker\ j_*$  con  $b$  ciclo de  $B_n$ . Como  $j_*[b] = [0]$ , tenemos que  $j(b)$  es un borde en  $C_n$ , por lo que existe un  $c' \in C_{n+1}$  tal que  $j(b) = \partial(c')$ . Como, encima  $j$  es sobreyectiva, existe un  $b' \in B_{n+1}$  tal que  $c' = j(b')$ , y por tanto,  $j(b) = \partial(j(b'))$ . Entonces,  $b - \partial(b') \in ker\ j = Im\ i$ , es decir, existe un  $a \in A_n$  tal que  $i(a) = b - \partial(b')$ . Además,  $i(\partial(a)) = \partial(b) - \partial(\partial(b')) = 0$  por ser  $\partial \circ \partial = 0$ , y ser  $b$  un ciclo. Entonces, por ser  $i$  inyectiva,  $a$  es un ciclo. Concluimos, entonces que como  $b$  y  $b - \partial(b')$  son elementos homólogos,  $[b] = [i(a)] = i_*[a]$ , y  $ker\ j_* \subset Im\ i_*$ .

(ii)  $Im\ j_* = ker\ \partial_*$

Sea  $[b] \in H_n(B)$ , por ser un ciclo, tenemos que  $\partial(b) = 0$ , y por tanto,  $\partial_*(j_*[b]) = 0$ . Es decir,  $Im\ j_* \subset ker\ \partial_*$ .

Por otro lado, dado  $[c] \in ker\ \partial_*$  y sean  $b \in B_n$  y  $a \in A_{n-1}$  elementos tales que  $j(b) = c$  y  $\partial(b) = i(a)$ . Entonces,  $0 = \partial_*[c] = [a]$ . Por lo que  $a$  es un borde. Por tanto, existe un  $a' \in A_n$  tal que  $\partial(a') = a$ . Así, tenemos que  $\partial(b) = i(a) = i(\partial(a'))$ , es decir,  $\partial(b - i(a')) = 0$ , por lo que  $b - i(a')$  es un ciclo en  $B_n$ . Entonces,  $j_*(b - i(a')) = [j(b) - j(i(a'))] = [j(b)] = [c]$ . Es decir,  $ker\ \partial_* \subset Im\ j_*$ .

(iii)  $Im\ \partial_* = ker\ i_*$

Sea  $[c] \in H_n(C)$  y sean  $b \in B_n$  y  $a \in A_{n-1}$  elementos tales que  $j(b) = c$  y  $\partial(b) = i(a)$ . Entonces, por definición  $\partial_*[c] = [a]$ , con lo que  $i_*(\partial_*[c]) = i_*[a] = [i(a)] = [\partial(b)] = 0$ , por ser  $b$  ciclo. Es decir,  $Im\ \partial_* \subset ker\ i_*$ . Por otro lado, dado  $[a] \in ker\ i_*$ , tenemos que  $i_*(a) = 0$ , con lo que tenemos que  $i(a)$  es un borde en  $B_n$ . Por tanto, existe un  $b \in B_n$  tal que  $i(a) = \partial(b)$ . Entonces, tenemos que  $\partial(j(b)) = j(\partial(b)) = j(i(a)) = 0$ , por lo que  $j(b)$  es un ciclo. Entonces, sea  $c = j(b)$ ,  $[a] = \partial_*[c]$ , y concluimos que  $ker\ i_* \subset Im\ \partial_*$ .

□

### A.1.1. Caso particular para la homología relativa

Ahora tomando  $A_n = C_n(A)$ ,  $B_n = C_n(X)$  y  $C_n = C_n(X, A)$ , tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(A) & \xrightarrow{\partial} & C_n(A) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(A) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\
 \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j \\
 \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

siendo  $i$  la aplicación inclusión y  $j$  la proyección. Por la definición del operador borde, es claro que el diagrama conmuta. Gracias al teorema anterior, concluimos que la sucesión

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \rightarrow \dots$$

es una sucesión exacta larga.

**Observación A.1.2.** Esta sucesión exacta larga nos muestra la idea de que los grupos de homología relativa  $H_n(X, A)$  miden la diferencia entre  $H_n(X)$  y  $H_n(A)$ . En particular, la exactitud implica que si  $H_n(X, A) = 0$  para todo  $n$ , entonces la inclusión  $A \hookrightarrow X$  induce isomorfismos  $H_n(A) \cong H_n(X)$  para todo  $n$ . Esto es consecuencia de la definición de sucesión exacta.

## A.2. Complejos de cadenas celulares

**Definición A.2.1.** Llamaremos **n-esqueleto** de un complejo simplicial  $X$ , y lo denotaremos por  $X^n$ , a la unión disjunta de los símlices de dimensión  $m \leq n$  de  $X$ .

**Lema A.2.2.** Sea  $X$  un complejo simplicial, entonces:

- (a)  $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$ , para  $k \neq n$  y es abeliano libre para  $k = n$  con una base con correspondencia uno a uno con los  $n$ -símlices de  $X$ .

(b)  $H_k(X^n) = 0$ , para  $k > n$ . En particular, si  $X$  es finito dimensional, entonces  $H_k(X) = 0$  para  $k > \dim(X)$ .

(c) La aplicación inclusión  $i : X^n \hookrightarrow X$  induce un isomorfismo  $i_* : H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$  si  $k < n$ .

Este lema nos permite definir un complejo de cadenas  $(H_\bullet(X^\bullet, X^{\bullet-1}), d_\bullet)$  como sigue. Utilizando las sucesiones exactas largas para los pares  $(X^{n+1}, X^n)$ ,  $(X^n, X^{n-1})$  y  $(X^{n-1}, X^{n-2})$  obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^{n+1}) \approx H_n(X) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^n) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & \partial_{n+1} \\
 & & & & & & \nearrow \\
 \dots & \longrightarrow & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow \dots \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & \partial_n \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

donde  $d_{n+1} = j_n \circ \partial_{n+1}$  y  $d_n = j_{n-1} \circ \partial_n$ , que como  $H_k(X^k, X^{k-1})$ , por el lema, es un grupo abeliano libre en correspondencia uno-uno con los  $k$ -símplices de  $X$ , que implica que  $j_k$  es inyectiva, y, por tanto, las aplicaciones  $d_{n+1}$  y  $d_n$  podrían interpretarse como aplicaciones borde. De hecho,  $d_n \circ d_{n+1} = j_{n-1} \circ \partial_n \circ j_n \circ \partial_{n+1} = 0$  ya que  $\partial_n \circ j_n = 0$  por ser consecutivas en la sucesión exacta diagonal. Por tanto, la fila horizontal forma un complejo de cadenas, que llamaremos **complejo de cadenas celular** de  $X$ . Los grupos de homología de este complejo de cadenas se llaman **grupos de homología celular**. Por el momento, los denotaremos por  $H_n^\Delta(X)$ .

**Teorema A.2.3.**  $H_n^\Delta(X) \cong H_n(X)$ , donde  $H_n(X)$  es el  $n$ -ésimo grupo de homología singular.

*Demostración.* Utilizando el diagrama anterior, observamos que como  $i_*$  sobreyectiva, por el primer teorema

$$H_n(X^n) / \ker i_* \cong H_n(X^{n+1}).$$

Además, como  $H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X)$  y  $\ker i_* = \text{Im } \partial_{n+1}$ , tenemos que

$$H_n(X) \cong H_n(X^n) / \text{Im } \partial_{n+1}.$$

Además, como  $j_n$  es inyectiva

$$H_n(X^n)/\text{Im } \partial_{n+1} \cong \text{Im } j_n/\text{Im } j_n(\partial_{n+1}).$$

También, tenemos que  $\text{Im } j_n = \ker \partial_n$ , por lo que

$$\text{Im } j_n/\text{Im } j_n(\partial_{n+1}) = \ker \partial_n/\text{Im } d_{n+1}.$$

Y para concluir, como  $j_n$  es inyectiva, tenemos que  $\ker \partial_n = \ker d_n$ . Es decir,

$$H_n(X) \cong H_n(X^{n+1}) \cong \ker d_n/\text{Im } d_{n+1} = H_n^\Delta(X).$$

□



## Apéndice B

# Transversalidad y Número de intersección

El objetivo de este apéndice es ver la base de la demostración de que el número de intersección es un invariante homotópico. Las referencias principales son [8] y [2]

**Definición B.0.1.** Una **aplicación**  $f : M \rightarrow N$  se dice que es **transversal** a una subvariedad  $L \subset N$  en  $x \in f^{-1}(L)$  si la imagen de  $T_x M$  por la diferencial de  $f$  es transversal a  $T_{f(x)} L$  en  $T_{f(x)} N$ , es decir si:

$$T_{f(x)} N = T_{f(x)} L + d_x f(T_x M).$$

Convenimos, además que  $f$  es transversal a  $L$  en todo punto  $x \notin f^{-1}(L)$ . Decimos que es **transversal a  $L$**  cuando es transversal para todo  $x \in M$ .

**Proposición B.0.2.** *Sea  $W$  una variedad con borde. Dada una aplicación diferenciable  $f : W \rightarrow N$  y  $L \subset N$  una tercera variedad tal que  $f$  es transversal a  $L$ . Entonces:*

(i)  $f^{-1}(L)$  es una variedad diferenciable con borde

$$\partial f^{-1}(L) = f^{-1}(L) \cap \partial W.$$

(ii)  $T_x(f^{-1}(L)) = (d_x f)^{-1} T_{f(x)} L$  para cada  $x \in f^{-1}(L)$ .

(iii)  $\text{codim}_x(W, f^{-1}(L)) = \text{codim}_{f(x)}(N, L)$  para cada  $x \in f^{-1}(L)$ .

**Teorema B.0.3. (*Densidad de la transversalidad*)** Sean  $B, M, L$  y  $N$  variedades diferenciables, con  $L \subset N$  (todas sin borde). Sea  $F : B \times M \rightarrow$

$N$  una aplicación diferenciable tal que  $F$  es transversal a  $L$ . Denotamos por  $B_L$  al conjunto de los puntos  $s \in B$  tales que  $F_s : M \rightarrow N$  es transversal a  $L$ . Entonces  $B_L$  es residual.

**Teorema B.0.4. (Teorema de Extensión)** Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable entre variedades. Suponemos que  $L$  es una subvariedad cerrada de  $N$ , y  $C$  un subconjunto cerrado de  $M$ . Sea  $f$  transversal a  $L$  en  $C$ . Entonces existe una función diferenciable  $g : M \rightarrow N$  homótopa a  $f$  que es transversal a  $L$  y es igual a  $f$  en un entorno de  $C$ .

**Definición B.0.5.** Sean  $M, N$  y  $L$  variedades diferenciables sin borde,  $M$  compacta y orientada,  $L$  subvariedad cerrada de  $N$ , ambas orientadas, y sea  $\dim M + \dim L = \dim N$ . Sea  $f : M \rightarrow N$  transversal a  $L$ . Se puede ver que  $f^{-1}(L)$  es un número finito de puntos. Entonces, para cada  $x \in f^{-1}(L)$ , definimos:

$$\epsilon_x := \begin{cases} +1 & \text{si } T_{f(x)}L + d_x f(T_x M) \text{ está orientado como } T_{f(x)}N \\ -1 & \text{si } T_{f(x)}L + d_x f(T_x M) \text{ no está orientado como } T_{f(x)}N \end{cases}$$

Definiremos el **número de intersección** de la aplicación  $f$  con  $L$  como la suma de los valores de  $\epsilon_x$ , con  $x \in f^{-1}(L)$ . Lo denotamos por  $f \cdot L$ .

**Observación B.0.6.** Dadas  $X$  e  $Y$  dos variedades diferenciables con la misma dimensión y  $X$  es compacta. Entonces una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es transversal a  $y \in Y$  si y solo si  $y$  es un valor regular de  $f$ . A la multiplicidad de intersección  $f \cdot \{y\}$  se le llama **grado** de  $f$ .

Ahora comencemos a probar que el número de intersección es un invariante homotópico.

**Proposición B.0.7.** Dada una variedad diferenciable compacta  $W$  tal que  $\partial W = X$ . Sea  $Y$  una variedad diferenciable y  $Z \subset Y$  una subvariedad cerrada tal que  $f : X \rightarrow Y$  es transversal a  $Z$  y se extiende a  $F : W \rightarrow Y$ . Entonces,  $f \cdot Z = 0$ .

*Demostración.* Por el Teorema B.0.4, podemos suponer que  $F$  es transversal a  $Z$  (por ser  $X$  un subconjunto cerrado de  $W$ ). Por tanto,  $F^{-1}(Z)$  es una 1-variedad orientada compacta con frontera  $\partial(F^{-1}(Z)) = f^{-1}(Z)$  (por ser todas las 1-variedades orientables, ser  $f^{-1}(Z)$  una variedad de dimensión 0, y por la Proposición B.0.2 que tenemos que  $\partial(F^{-1}(Z)) = F^{-1}(Z) \cap \partial W = F^{-1}(Z) \cap X = f^{-1}(Z)$ ). Por la clasificación de 1-variedades y el hecho de

ser compacta y con borde, tenemos que  $F^{-1}(Z)$  es difeomorfa a la unión disjunta de  $[0,1]$ 's y  $\mathbb{S}^1$ 's. Por tanto, su frontera consiste en un número par de puntos, orientados de manera opuesta dos a dos.  $\square$

Ahora ya podemos dar el resultado que buscábamos:

**Proposición B.0.8.** *El número de intersección es un invariante homotópico.*

*Demostración.* Sean  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones homótopas y transversales a  $Z$ , entonces tenemos una homotopía  $F : I \times X \rightarrow Y$ . También tenemos que  $\partial(I \times X) = (X_0) \cup (X_1)$  con orientación opuestas, por tanto,

$$\begin{aligned} \partial(F^{-1}(Z)) &= F^{-1}(Z) \cap \partial(I \times X) = (F^{-1}(Z) \cap (X_0)) \cup (F^{-1}(Z) \cap (X_1)) = \\ &= f_0^{-1}(Z) \cup f_1^{-1}(Z), \end{aligned}$$

con orientaciones opuestas. Además, sabemos, por la proposición anterior, que  $\partial F \cdot Z = 0$ . Por tanto, concluimos que  $f_0 \cdot Z = f_1 \cdot Z$ .  $\square$



# Bibliografía

- [1] Bott, R., Tu, L. W. (1982). Differential forms in algebraic topology. New York: Springer.
- [2] Guillemin, V., Pollack, A. (2014). Differential topology. Providence, R.I.: AMS Chelsea Pub.
- [3] Farmakis, I., Moskowitz, M. A. (2013). Fixed point theorems and their applications. Hackensack, NJ: World Scientific Publishing.
- [4] Hatcher, A. (2002). Algebraic topology. New York: Cambridge University Press.
- [5] Looijenga, E. (2000). Étale cohomology. [Material del aula].
- [6] Mustata, M. Zeta functions in algebraic geometry. [Material del aula].
- [7] Oort, F. (2014). The Weil conjectures. (Revista) Mathematisch Instituut. Universiteit Utrecht.
- [8] Outerelo, E., Ruiz Sancho, J. (1988). Topología diferencial. Madrid: Addison-Wesley.
- [9] Muñoz, V., González, A. Rojo, J.A. Geometry and Topology of Surfaces. [Material del aula]. Universidad Complutense, Madrid.
- [10] Vogt, I. (2010). The Lefschetz fixed point theorem. [Material del aula].
- [11] Section 10.11 (00CV): Tensor products—The Stacks project. (2020). Retrieved 10 July 2020, from <https://stacks.math.columbia.edu/tag/00CV>

