



---

# Los problemas de Kekeya

---

Trabajo Fin de Máster  
Máster en Matemáticas Avanzadas

Mikel Flórez Amatriain

Trabajo dirigido por  
Teresa Luque Martínez

Madrid, 29 de julio de 2020



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Summary</b>	<b>vi</b>
<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>Glosario</b>	<b>xi</b>
<b>1. Introducción a los problemas de Makeya</b>	<b>1</b>
1.1. La conjetura de Makeya . . . . .	1
1.2. La conjetura maximal de Makeya . . . . .	3
1.3. La conjetura maximal de Makeya implica la conjetura de Makeya . . . . .	12
1.4. Problemas de Nikodym . . . . .	15
<b>2. Resultados conocidos</b>	<b>29</b>
2.1. Caso $n = 2$ . . . . .	29
2.2. Resultados parciales para $n \geq 3$ . . . . .	34
2.2.1. Bourgain, 1991 . . . . .	39
2.2.2. Wolff, 1995 . . . . .	47
<b>3. Relación de los problemas de Makeya con otros problemas</b>	<b>65</b>
3.1. El problema de restricción . . . . .	65
3.2. Los multiplicadores de Bochner-Riesz . . . . .	70
<b>A. Resultados básicos</b>	<b>79</b>
A.1. Análisis general . . . . .	79
A.2. Análisis armónico . . . . .	81
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>



# Resumen

El objetivo de este trabajo es introducir los problemas de Makeya mediante dos conjeturas: la conjetura de Makeya y la conjetura maximal de Makeya. De esta manera, se pretende introducir algunas de las principales técnicas, herramientas y métodos de resolución de problemas del análisis armónico.

Para ello, se enuncian estas dos conjeturas junto con la conjetura maximal de Nikodym y se analiza la relación que hay entre todas ellas. Más precisamente, se prueba la equivalencia de las dos conjeturas maximales y se ve que estas son más fuertes que la conjetura de Makeya.

Una vez establecido el vínculo entre estos problemas, nos centramos en estudiar más en profundidad la conjetura maximal de Makeya y se probarán algunos resultados parciales conocidos sobre ella. Por ejemplo, se demostrará que cuando la dimensión es 2 la conjetura es cierta, y para dimensiones superiores se estudiarán algunos resultados parciales de la década de 1990. A pesar de que desde estos primeros resultados se han hecho más avances, a día de hoy, la conjetura maximal de Makeya sigue siendo un problema abierto.

Por último, se estudiará la relación de esta conjetura con otros problemas importantes y aún abiertos del análisis armónico, tales como la acotación de multiplicadores de Bochner-Riesz y la restricción de la transformada de Fourier a la esfera. El vínculo con tantos problemas ayuda a entender la importancia que han tomado los problemas de Makeya en los últimos años.

# Summary

The goal of this paper is to introduce Kakeya problems through two conjectures: the Kakeya conjecture and the Kakeya maximal conjecture. In this manner, it is expected to introduce some of the main techniques, tools and methods in problem solving of the harmonic analysis.

For that purpose, these two conjectures are formulated together with the Nikodym maximal conjecture and the existing relation between them is analyzed. More precisely, the equivalence between the two maximal conjectures will be showed and it will be seen that they are stronger than the Kakeya conjecture.

Once the bond between these problems is established, we will focus on a deep study of the Kakeya maximal conjecture, and some partial results of it will be proven. For example, it is shown that when the dimension is 2 the conjecture is true, and for higher dimensions some partial results from the 1990s are studied. Despite the progresses that had been made since these first results, to this day, the Kakeya maximal conjecture remains an open problem.

Lastly, it will be studied the relation of this conjecture with other important and still open problems of the Harmonic Analysis, such as the boundedness of Bochner-Riesz multipliers and the restriction of the Fourier transform into the sphere. The link with so many problems helps to understand the relevance that have taken the Kakeya problems in recent years.

# Introducción

Los problemas de Kakeya son una serie de problemas matemáticos pertenecientes a la rama del análisis armónico. Aunque existen muchas versiones, hoy en día hay dos cuestiones principales aún abiertas y que se están investigando activamente: la conjetura de Kakeya y la conjetura maximal de Kakeya. Estos son problemas importantes que tienen conexiones con otros muchos problemas tanto del análisis armónico como de otros campos de las matemáticas. Empecemos explicando la historia y motivación de estos problemas.

S. Kakeya fue un matemático japonés que en 1917 propuso el primer problema que lleva su nombre. Este trataba de encontrar el área mínima en el plano en el que poder rotar un segmento recto de longitud 1 por 360 grados. Por ejemplo, en un círculo en el plano de radio  $1/2$  podemos rotar un segmento de longitud 1. En este caso el área que obtenemos es  $\pi/4 = 0,785398\dots$ . Sin embargo, esto está lejos del valor más pequeño que se puede obtener.

Fue el matemático ruso A. S. Besicovitch quien dio con la solución de este problema. En 1919, demostró que para todo número  $\varepsilon > 0$ , existe un conjunto en el plano en el que se puede rotar por 360 grados un segmento unitario y que tiene un área menor que  $\varepsilon$ . De hecho, gracias a la construcción de estos conjuntos puede probarse que existen conjuntos compactos de medida nula que contienen un segmento unitario en cada dirección. En honor al matemático que resolvió el problema, a estos conjuntos se les llama conjuntos de Besicovitch.

El problema planteado por Kakeya puede parecer una simple curiosidad geométrica, pero lo cierto es que estos conjuntos pueden ser muy útiles. De hecho, la principal motivación de Besicovitch para construir estos conjuntos fue que le servían como contraejemplo en un problema relacionado con la integral de Riemann.

Es sencillo generalizar el concepto de conjunto de Besicovitch a dimensiones superiores, y se sabe que en cualquier dimensión  $n \geq 2$  existen conjuntos de medida nula que contienen un segmento unitario en cada dirección. Sin embargo, no se sabe con toda seguridad qué pequeños pueden llegar a ser estos conjuntos. Formalmente, para determinar el tamaño de estos conjuntos se usa la dimensión de Hausdorff (también se puede estudiar la dimensión de Minkowski). En  $\mathbb{R}^n$  la dimensión de Hausdorff de un conjunto puede ser cualquier número real entre 0 y  $n$ . Cuanto más grande sea la dimensión, más espacio ocupa el conjunto en  $\mathbb{R}^n$ , y entonces más grande será el conjunto. Como ejemplo, una línea recta en  $\mathbb{R}^n$  tiene siempre dimensión 1, y los conjuntos de medida de Lebesgue positiva siempre tienen dimensión  $n$ .

La conjetura de Kakeya busca determinar la dimensión de Hausdorff de un conjunto de Besicovitch en  $\mathbb{R}^n$ . Se sabe que en el plano, todos los conjuntos de Besicovitch tienen dimensión de Hausdorff 2. Se espera que en general, en  $\mathbb{R}^n$  estos conjuntos tengan dimensión  $n$ , y esto es precisamente lo que dice la conjetura de Kakeya.

También existe una formulación más fuerte que esta: la conjetura maximal de Kakeya. En esta conjetura, se busca una estimación de la función maximal de Kakeya. Los avances que se hacen en la conjetura maximal de Kakeya implican un avance similar en la conjetura de Kakeya; y si se cumple la maximal, entonces también se cumple la conjetura de Kakeya.

Una de las principales motivaciones para estudiar estos problemas es que están muy relacionados con otros problemas del análisis armónico y de otros campos en general. Por ejemplo, hay cuestiones abiertas en EDPs y en teoría de números relacionadas con los conjuntos de Besicovitch. Recordando la motivación de Besicovitch, la existencia de conjuntos de Besicovitch de dimensión menor que  $n$  daría contraejemplos de otros problemas importantes. Podríamos destacar dos problemas del análisis armónico: la conjetura de Bochner-Riesz y la conjetura de restricción de la transformada de Fourier sobre la esfera. Un contraejemplo de la conjetura de Kakeya, es decir, un ejemplo de un conjunto de Besicovitch en  $\mathbb{R}^n$  con dimensión menor que  $n$ , serviría para refutar estas dos últimas conjeturas.

Estos son problemas complicados, que hoy en día aun están abiertos y que se siguen estudiando. Se necesitan distintas técnicas y métodos para dar avances positivos en las conjeturas de Kakeya. En los últimos años, estos avances han conllevado un gran desarrollo técnico que ha enriquecido el análisis armónico. Esta última es otra buena razón para estudiar e investigar estos problemas. Vamos a resumir algunas de estas técnicas.

Lo primero en probarse en las dos conjeturas en la década de 1970, fue que eran ciertas en el plano. La conjetura de Kakeya la probó Davies [5], y la maximal Córdoba [4].

Los primeros resultados importantes en dimensiones superiores se dieron en la década de 1990. Fue muy importante el trabajo de Bourgain [2] quien demostró que los conjuntos de Besicovitch en  $\mathbb{R}^n$  debían tener dimensión mayor o igual que  $\frac{n+1}{2}$ . Para ello, Bourgain desarrolló el *método del arbusto*. Años más tarde, Wolff [28] mejoró el argumento de Bourgain, usando el *método del peine*, con el que consiguió aumentar el valor mínimo de la dimensión a  $\frac{n+2}{2}$ . Estos resultados se basan en argumentos geométricos y de combinatoria. A finales de la década, y gracias a combinar métodos de teoría aditiva de números (introducidos por Bourgain [3] en este contexto) junto con los anteriores argumentos, Katz y Tao [14] consiguieron demostrar que la dimensión tenía que ser mayor o igual que  $\frac{4n+3}{7}$  para  $n \geq 9$ .

Avances más recientes se han dado usando el método polinomial. En este contexto el método fue introducido por Dvir [7]. Los avances más recientes usando este método son de Hickman, Rogers y Zhang [13] para dimensiones  $n = 5$ ,  $n \geq 7$  y usando otros métodos de Katz y Zahal [16], [17] para  $n = 3, 4$ .

Una vez presentados los problemas de Kakeya, centrémonos en el contenido de



este trabajo. El objetivo del mismo es introducir los problemas de *Keakeya* mediante las dos conjeturas mencionadas previamente. De esta manera, se pretende estudiar algunas de las principales técnicas del análisis armónico. El trabajo se divide en tres capítulos, y al principio de cada uno resumiremos las referencias estudiadas para escribirlo.

En el Capítulo 1, enunciaremos las dos conjeturas y definiremos los términos necesarios para entenderlas. Daremos algún resultado relacionado con estas, y demostraremos la relación que existe entre ellas, es decir, que la conjetura maximal de *Keakeya* implica la conjetura de *Keakeya*. También en el primer capítulo introducimos los problemas de *Nikodym*. Estos son otros problemas del análisis armónico, pero están muy relacionados con los de *Keakeya* y por ello los estudiamos aquí. Probaremos que las conjeturas maximales de *Keakeya* y *Nikodym* son equivalentes.

En el Capítulo 2, centrándonos más en la conjetura maximal de *Keakeya*, ya que es la más fuerte, veremos algunos resultados conocidos que hay sobre ella. Probaremos que es cierta en el plano, y los resultados de *Bourgain* y *Wolff* que hemos mencionado previamente. Estos son resultados importantes y pueden considerarse ya clásicos. Aunque, como ya hemos dicho, existen nuevos avances, estos son de una gran complejidad, que se escapan de la posibilidad de estar contenidos en este trabajo.

Por último, en el Capítulo 3 veremos la relación de los problemas de *Keakeya* con otros problemas del análisis armónico; en particular, con la acotación de los multiplicadores de *Bochner-Riesz* y la restricción de la transformada de *Fourier* a la esfera. Más precisamente, probaremos que la conjetura de *Bochner-Riesz* implica la conjetura de restricción y que esta última implica la conjetura maximal de *Keakeya*.

Finalmente, en el apéndice A se enuncian las principales herramientas y resultados, tanto generales como específicos del análisis armónico, que utilizaremos recurrentemente. Estos no los probaremos, pero daremos algunas referencias para ellos.

Además, resumimos la notación que vamos a utilizar al principio en el glosario, ya que utilizamos términos específicos de este campo.



# Glosario

Símbolo	Significado
$A \lesssim B$	$A \leq cB$ para cierta constante $c > 0$
$A \gtrsim B$	$A \geq cB$ para cierta constante $c > 0$
$A \approx B$	$A \lesssim B$ y $A \gtrsim B$
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^n$	Espacio Euclideo $n$ -dimensional
$A \subset B, A \subseteq B$	$A$ subconjunto de $B$
$ x $	$\sqrt{ x_1 ^2 + \dots +  x_n ^2}$ para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$\mathbb{S}^{n-1}$	La esfera unidad; $\{e \in \mathbb{R}^n :  e  = 1\}$
$B^n(x_0, r), B(x_0, r)$	La bola de $\mathbb{R}^n$ centrada en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ ; $\{x \in \mathbb{R}^n :  x - x_0  \leq r\}$
$\mathcal{L}^n, dx$	Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$
$\sigma^{n-1}, d\sigma^{n-1}$	Medida superficie en la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$
$\mathcal{H}^s(A)$	Medida de Hausdorff del conjunto $A$ para $s \geq 0$
$\alpha(n)$	$\mathcal{L}^n(B^n(0, 1))$
$\dim_H A$	Dimensión de Hausdorff del conjunto $A$
$T_e^\delta(a)$	Tubo centrado en $a \in \mathbb{R}^n$ , con dirección $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ , longitud 1 y radio $\delta > 0$
$\mathcal{K}_\delta f$	Función maximal de Kakeya de $f$ para $\delta > 0$
$\mathcal{N}_\delta f$	Función maximal de Nikodym de $f$ para $\delta > 0$
$\ f\ _{L^\infty(A)}$	La norma $L^\infty$ ; $\sup_{x \in A} \{ f(x) \}$
$\ f\ _{L^p(A)}$	La norma $L^p$ ; $(\int_A  f(x) ^p dx)^{1/p}$

---

$\chi_A$	Función característica del conjunto $A$ ; $\chi_A(x) = 1$ , si $x \in A$ y $\chi_A(x) = 0$ , si $x \notin A$
$\text{dist}(x, A)$	Distancia entre $x$ y $A$ ; $\inf\{ x - y  : y \in A\}$
$\text{diam}(A)$	Diámetro del conjunto $A$ ; $\sup\{ x - y  : x, y \in A\}$
$\#J$	Cardinal del conjunto $J$
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	Espacio de las funciones de Schwartz; $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n}  x^\alpha \partial^\beta f(x)  < \infty, \quad \forall \alpha, \beta\}$
$x = (\underline{x}, x_n)$	con $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$x = (x_1, \bar{x})$	con $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$ para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$\mathcal{F}(f), \widehat{f}$	Transformada de Fourier de la función $f$
$\mathcal{F}^{-1}(g), \check{g}$	Inversa de la transformada de Fourier de la función $g$
$f * g$	Convolución de $f$ y $g$ ; $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t - x) dx$
$\text{supp } f$	Soporte de $f$ ; $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$
$p'$	Conjugado de $p$ ; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, p' = p/(p - 1)$
$A^c$	Complementario del conjunto $A$ ; $\{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}$
$\theta(e, e')$	Ángulo entre $e$ y $e'$
$x \cdot y$	Producto escalar de $x, y \in \mathbb{R}^n$
$CA$	$\{Cx : x \in A\}$ para $A \subset \mathbb{R}^n, C > 0$
$a + A$	$\{a + x : x \in A\}$ para $A \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$

# Capítulo 1

## Introducción a los problemas de Kakeya

En este primer capítulo vamos a introducir los problemas de Kakeya, que hoy en día se resume en dos conjeturas todavía sin resolver. En la primera sección enunciamos la conjetura de Kakeya, y en la segunda sección veremos una segunda conjetura más fuerte, la conjetura maximal de Kakeya. Aquí daremos algún resultado relacionado con ésta. En la tercera sección del capítulo estudiaremos la relación entre estas dos conjeturas. Finalmente, en la última sección estudiaremos los problemas de Nikodym, que como se verá, están muy relacionados con los de Kakeya.

La referencia principal de este capítulo es el libro de Mattila [19]. En el capítulo 11 de este libro, introduce los conjuntos de Besicovitch, relacionados con la conjetura de Kakeya, y en el capítulo 21 estudia más en profundidad el problema de Kakeya. Para la sección 1.4, hemos seguido la prueba original de Tao [25] en el que se demuestra la equivalencia de las conjeturas maximales de Kakeya y Nikodym. También han sido muy útiles los trabajos [18] y [20] para facilitar la lectura y completar ciertas propiedades.

### 1.1. La conjetura de Kakeya

Antes de empezar con los problemas de Kakeya, vamos a explicar algo de notación que vamos a usar durante todo el trabajo. Denotaremos por  $\mathcal{L}^n(A)$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$  de un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ . La medida superficie de la esfera unidad  $\mathbb{S}^{n-1} = \{e \in \mathbb{R}^n : |e| = 1\}$  la escribimos como  $\sigma^{n-1}$ . Por otro lado,  $B^n(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}$  representa la bola cerrada de  $\mathbb{R}^n$  centrada en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y con radio  $r > 0$ . Normalmente, si no existe confusión sobre la dimensión, escribiremos simplemente  $B(x_0, r)$ . Por último,  $\text{diam}(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$  representa el diámetro del conjunto  $A$ .

En esta primera sección vamos a enunciar la primera conjetura de Kakeya. Para entender esta conjetura necesitamos definir dos conceptos: la dimensión de Hausdorff de un conjunto y los conjuntos de Besicovitch. Por ello, empezamos definiendo la

medida de Hausdorff.

**Definición 1.1.1.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $s \in \mathbb{R}$  con  $s \geq 0$ . Definimos la *medida de Hausdorff* del conjunto  $A$  para  $s$ , denotado por  $\mathcal{H}^s(A)$ , como

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A),$$

donde

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) 2^{-s} \text{diam}(E_j)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \text{diam}(E_j) < \delta \right\}$$

está definido para todo  $0 < \delta \leq \infty$ . Aquí, si  $s$  es un número entero, tomamos  $\alpha(s) = \mathcal{L}^s(B^s(0,1))$ ; y si  $s$  no es un número entero, tomamos  $\alpha(s) = 2^s$ .

Ahora, usando la medida de Hausdorff podemos definir la dimensión de Hausdorff de un conjunto.

**Definición 1.1.2.** Definimos la *dimensión de Hausdorff* de  $A \subset \mathbb{R}^n$  como

$$\dim_H A = \inf \{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Usando esta definición puede resultar difícil calcular la dimensión de Hausdorff de ciertos conjuntos, y por ello, nos será muy útil la siguiente caracterización.

**Proposición 1.1.3.** Se cumple la siguiente igualdad para la dimensión de Hausdorff de un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\dim_H A = \inf \left\{ s : \forall \varepsilon > 0, \exists E_1, E_2, \dots, E_j, \dots \subset \mathbb{R}^n \right. \\ \left. \text{tal que } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam}(E_j)^s < \varepsilon \right\}.$$

En la siguiente definición veremos cuales son los conjuntos de Besicovitch.

**Definición 1.1.4.** Decimos que un conjunto compacto de Borel en  $\mathbb{R}^n$  es un *conjunto de Besicovitch* (a veces también se le llama *conjunto de Kakeya*), si tiene medida de Lebesgue nula y si contiene un segmento de longitud 1 en cada dirección. Es decir, un conjunto de Borel  $B$  es de Besicovitch en  $\mathbb{R}^n$  si  $\mathcal{L}^n(B) = 0$  y si cumple

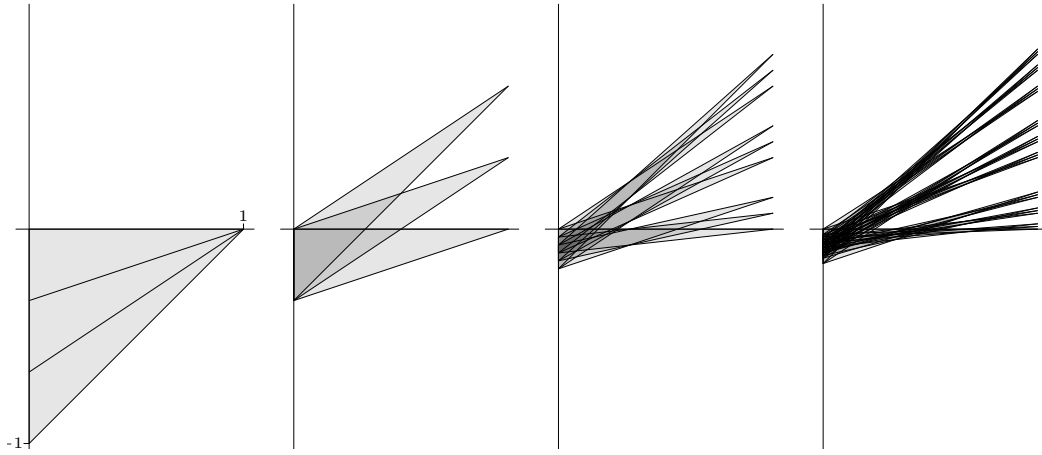
$$\forall e \in \mathbb{S}^{n-1}, \exists b \in \mathbb{R}^n : \{b + te : 0 < t < 1\} \subset B.$$

No es obvio que existan conjuntos de Besicovitch, y pueden resultar contraintuitivos. Fue el matemático Besicovitch el primero en demostrar la existencia de estos conjuntos. Puede probarse que existen para toda  $n \geq 2$ . Lo que nos dice la conjetura de Kakeya es que estos conjuntos, a pesar de tener medida nula, no van a ser muy "pequeños". Más precisamente, la conjetura propone que siempre van a tener dimensión de Hausdorff  $n$  (la máxima posible para conjuntos de  $\mathbb{R}^n$ ).

**Conjetura 1.** (Conjetura de Kakeya) Todo conjunto de Besicovitch en  $\mathbb{R}^n$  tiene dimensión de Hausdorff  $n$ .

En la figura 1.1, vemos parte de un proceso para construir un conjunto de Besicovitch en  $\mathbb{R}^2$ . Nuestro objetivo no es describir esto, pero como puede verse, gracias a la superposición de los triángulos, podemos reducir el área tanto como queramos. Aquí todos los conjuntos tienen medida positiva, pero se puede pasar al límite para obtener un conjunto de Besicovitch. Sin embargo, este conjunto tendrá dimensión de Hausdorff 2, como veremos más adelante.

Figura 1.1: Construcción de un conjunto en  $\mathbb{R}^2$  con área arbitrariamente pequeña, que puede usarse para construir un conjunto de Besicovitch.



## 1.2. La conjetura maximal de Kakeya

En esta sección vamos a presentar una conjetura más fuerte que la de Kakeya: la conjetura maximal de Kakeya. En ella se da una acotación para la función maximal de Kakeya. Vamos a empezar esta sección definiendo esta función y luego estudiaremos algunas de sus primeras acotaciones que nos servirán como motivación para enunciar la conjetura. Luego daremos algunos resultados relacionados con esta conjetura, que nos ayudarán a estudiarla más en profundidad en los próximos capítulos.

Primero, explicamos la notación que vamos a usar durante el resto del trabajo. Denotamos por  $T_e^\delta(a)$  el tubo centrado en  $a \in \mathbb{R}^n$ , con dirección  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ , longitud 1 y radio  $\delta > 0$ . A este tipo de tubos los llamaremos  $\delta$ -tubos. Explícitamente,

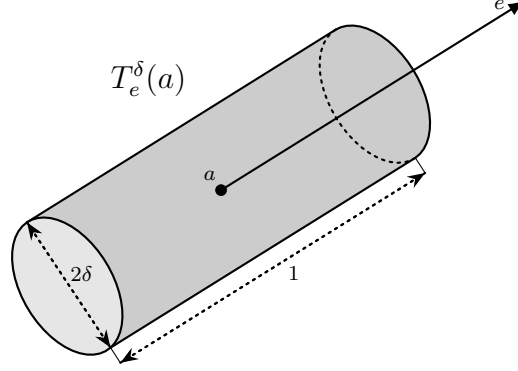
$$T_e^\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |(x - a) \cdot e| \leq 1/2, |x - a - ((x - a) \cdot e)e| \leq \delta\}.$$

Como la longitud del tubo es 1, su volumen será

$$\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a)) = \mathcal{L}^{n-1}(\delta B(0, 1)) = \mathcal{L}^{n-1}(B(0, 1))\delta^{n-1} = \alpha(n-1)\delta^{n-1}. \quad (1.1)$$

En la siguiente figura 1.2 vemos un  $\delta$ -tubo genérico en  $\mathbb{R}^3$ .

Figura 1.2: Un  $\delta$ -tubo genérico en  $\mathbb{R}^3$ .



Una notación muy útil que usaremos durante todo el trabajo es  $a \lesssim b$ , que denota  $a \leq Cb$  para cierta constante  $C > 0$ . La constante  $C$  puede depender de algún parámetro; por ejemplo, muchas veces va a depender de la dimensión  $n$ . Normalmente, si por el contexto queda claro de que parámetros depende  $C$ , no los escribiremos. Análogamente,  $a \gtrsim b$  significa  $a \geq Cb$  para cierta constante  $C > 0$ ; y por último, si  $a \lesssim b$  y  $a \gtrsim b$ , entonces escribiremos  $a \approx b$ . Entonces, utilizando esta notación, podemos escribir  $\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a)) \approx \delta^{n-1}$ , donde la constante depende de  $n$ .

Ahora, pasamos a definir la función maximal de Kakeya.

**Definición 1.2.1.** Definimos la *función maximal de Kakeya* de una función  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  para  $\delta > 0$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\delta f : \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow [0, \infty] \\ e &\longmapsto \mathcal{K}_\delta f(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} |f(x)| \, dx. \end{aligned}$$

Antes de empezar a ver alguna propiedad sencilla de esta función, tenemos que hacer una pequeña observación sobre la notación. Cuando escribimos  $dx$  en la integral, siempre nos vamos a referir a que integramos respecto a la medida de Lebesgue de la dimensión en la que estamos. Así, en la anterior definición, la integral la hacemos respecto de la medida de Lebesgue  $n$ -dimensional. Cuando escribimos  $d\sigma^{n-1}(e)$ , significa que integramos respecto a la medida superficie de  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

En la siguiente proposición vemos algunas estimaciones de la función maximal de Kakeya.

**Proposición 1.2.2.** Sean  $0 < \delta < 1$  y  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces, se cumple

- (i)  $\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ .
- (ii)  $\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \leq \alpha(n-1)^{-1} \delta^{-(n-1)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ .



Además, si  $1 \leq q \leq \infty$  y  $1 \leq p < \infty$  no se puede cumplir la desigualdad

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C(n, p, q) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.2)$$

para todo  $\delta \in (0, 1)$  y toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $C(n, p, q)$  independiente de  $\delta$ .

*Demostración.* Primero vamos a demostrar las dos primera desigualdades, y luego vamos a ver por qué no puede cumplirse la última.

(i) Por la Definición 1.2.1 de  $\mathcal{K}_\delta$  y de la norma  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , para  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} &= \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \left\{ \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} |f(x)| dx \right\} \\ &\leq \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \left\{ \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} dx \right\} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

(ii) Procediendo igual que antes, y teniendo en cuenta (1.1),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} &= \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \left\{ \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} |f(x)| dx \right\} \\ &\leq \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \left\{ \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \right\} \\ &= \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \left\{ \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \right\} = \frac{\delta^{-(n-1)}}{\alpha(n-1)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que no se puede cumplir la desigualdad (1.2). Esto se deduce de la existencia de conjuntos de Besicovitch. Sea  $B \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de Besicovitch compacto y sea

$$f = \chi_{B_\delta}, \quad \text{donde } B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, B) < \delta\}.$$

Aquí  $\text{dist}(x, B) = \inf\{|x - y| : y \in B\}$  representa la distancia entre  $x$  y el conjunto  $B$ . Entonces, como para cada  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$  va a existir un tubo  $T_e^\delta(a) \subset B_\delta$ , se tiene que  $\mathcal{K}_\delta f(e) = 1$ . En consecuencia,

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} = \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\mathcal{K}_\delta f(e)|^q d\sigma^{n-1}(e) \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\sigma^{n-1}(e) \right)^{\frac{1}{q}} = \alpha(n-1)^{\frac{1}{q}}.$$

Pero  $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{L}^n(B_\delta)^{1/p} \rightarrow 0$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ , porque  $\mathcal{L}^n(B) = 0$ . Esto prueba que no existen desigualdades como (1.2).  $\square$

En esta demostración hemos visto una primera relación entre los conjuntos de Besicovitch y la función maximal de Kakeya. Precisamente, la existencia de un conjunto de Besicovitch nos ha dado un contraejemplo para una acotación de la función maximal.

Entonces, no podemos dar acotaciones como (1.2) que no dependen de  $\delta$ . En consecuencia, nuestro objetivo es buscar constantes con el orden de  $\delta$  más bajo posible que cumplan la desigualdad. En este sentido, la desigualdad óptima será de la forma

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C(n, p, \varepsilon) \delta^{-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.3)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \delta < 1$  y  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Sin embargo, veamos que esto no va a ser posible para  $p < n$ . Tomamos  $f = \chi_{B(0, \delta)}$ . Como para todo  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $B(0, \delta) \subset T_e^\delta(0)$ , se tiene

$$\mathcal{K}_\delta f(e) = \frac{\mathcal{L}^n(B(0, \delta))}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(0))} = \frac{\alpha(n)\delta^n}{\alpha(n-1)\delta^{n-1}} = \frac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)}\delta \approx \delta.$$

Por lo tanto,

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} = \frac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)}\delta\alpha(n-1)^{1/p} \approx \delta.$$

Pero

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{L}^n(B(0, \delta))^{1/p} = (\alpha(n)\delta^n)^{1/p} \approx \delta^{n/p}.$$

Entonces, si  $p < n$ , o equivalentemente si  $n/p > 1$ , existirá  $\varepsilon > 0$  tal que  $n/p - \varepsilon > 1$ . Entonces, para  $0 < \delta < 1$ , se tiene

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \approx \delta > \delta^{n/p - \varepsilon} \approx \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.4)$$

Como vemos, las constantes solo dependen de  $n$  y  $p$ , por lo que no puede cumplirse (1.3).

Entonces, si  $p < n$  no vamos a poder buscar estimaciones como (1.3). Ahora nos preguntamos, ¿qué pasa en el caso límite  $p = n$ ? La conjetura maximal de Kakeya responde a esta pregunta, diciendo que en este caso la estimación sí que se da.

**Conjetura 2.** (Conjetura maximal de Kakeya) Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \delta < 1$  y  $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$ . Entonces, se cumple

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^n(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{-\varepsilon} \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.5)$$

donde la constante puede depender de  $n$ ,  $p$  y  $\varepsilon$ .

Suponiendo cierta esta conjetura, podemos ver  $\mathcal{K}_\delta$  como un operador de  $L^n(\mathbb{R}^n)$  en  $L^n(\mathbb{S}^{n-1})$ . Más adelante, en la sección 2.2, veremos que podemos utilizar la teoría de interpolación de operadores para interpolar esta conjetura, que es una estimación de tipo fuerte  $(n, n)$  (ver Definición A.1.5), con la estimación fuerte  $(1, \infty)$  obtenida en la Proposición 1.2.2. Así, si suponemos cierta la conjetura maximal, podemos obtener que para  $1 \leq p \leq n$ , se cumple

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p} + 1 - \varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.6)$$

para todo  $\varepsilon > 0$  y todo  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Durante todo el trabajo vamos a buscar acotaciones como esta, y a partir de ahora, diremos que se tiene  $K(n, p, \varepsilon)$  si se cumple (1.6) para todo  $0 < \delta < 1$  y

toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Si además se cumple para todo  $\varepsilon > 0$ , escribiremos simplemente  $K(n, p)$ . Con esta notación, la conjetura maximal de *Keakeya* dice que se cumple  $K(n, n)$ .

Ahora vamos a ver algunas propiedades de la función maximal de *Keakeya* en relación con la conjetura maximal. Para ello, empezamos con unas sencillas observaciones que nos van a resultar muy útiles.

**Observación 1.2.3.** Por el supremo en la definición de la función maximal de *Keakeya*, tenemos que para todo  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ , va a existir un tubo  $T_e^\delta(a)$ , para cierto  $a \in \mathbb{R}^n$ , que cumpla

$$\mathcal{K}_\delta f(e) \leq \frac{2}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} |f(x)| dx \approx \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} |f(x)| dx.$$

Nos interesan acotaciones superiores, y esta estimación nos vale porque la constante no depende de  $\delta$ . Así, en alguna ocasión podremos olvidarnos del supremo.

**Observación 1.2.4.** Por la definición de la función maximal de *Keakeya*, podemos suponer que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Es decir, si probamos que una estimación se cumple para las funciones positivas, entonces se cumplirá para todas. Esto es porque, suponiendo que tenemos una cota para las positivas, se tiene

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} = \|\mathcal{K}_\delta(|f|)\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C\|(|f|)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Una propiedad más interesante e importante es poder dar una versión discreta de la conjetura maximal de *Keakeya*. Para ver esto, primero necesitamos una definición y un lema.

**Definición 1.2.5.** Decimos que  $\{e_1, \dots, e_m\} \in \mathbb{S}^{n-1}$  es un conjunto de  $\mathbb{S}^{n-1}$   $\delta$ -separado si  $|e_j - e_k| \geq \delta$  para  $j \neq k$ . Además, decimos que es *maximal* si para cualquier  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\exists k \in \{1, \dots, m\}$ , tal que  $|e - e_k| < \delta$ . Por último, decimos que  $T_1, \dots, T_m$  es un conjunto de  $\delta$ -tubos  $\delta$ -separados si  $T_k = T_{e_k}^\delta(a_k)$ , para  $k = 1, \dots, m$ , donde  $\{e_1, \dots, e_m\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$  es un conjunto  $\delta$ -separado y  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ .

**Lema 1.2.6.** Si  $e, e' \in \mathbb{S}^{n-1}$  cumplen  $|e - e'| \leq \delta$ , entonces,

$$\mathcal{K}_\delta f(e) \leq C(n)\mathcal{K}_\delta f(e').$$

*Demostración.* Como podemos recubrir  $T_e^\delta(a)$  con algunos tubos  $T_{e'}^\delta(a_j)$ , para  $j = 1, \dots, N$ , con  $N$  dependiendo solo de  $n$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\delta f(e) &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} |f| dx \leq \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{\bigcup_{j=1}^N T_{e'}^\delta(a_j)} |f| dx \\ &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \sum_{j=1}^N \int_{T_{e'}^\delta(a_j)} |f| dx \leq \sum_{j=1}^N \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_{e'}^\delta(a_j)} |f| dx \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sup_{a_j \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_{e'}^\delta(a_j))} \int_{T_{e'}^\delta(a_j)} |f| dx = \sum_{j=1}^N \mathcal{K}_\delta f(e') = N\mathcal{K}_\delta f(e'). \end{aligned}$$

□

Ahora, ya veamos como podemos ver el problema de Kakeya desde un punto de vista discreto.

**Proposición 1.2.7.** Sean  $1 < p < \infty$ ,  $q = p' = \frac{p}{p-1}$ ,  $0 < \delta < 1$  y  $0 < M < \infty$ . Si se cumple

$$\left\| \sum_{k=1}^m t_k \chi_{T_k} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq M \quad (1.7)$$

para todo conjunto  $T_1, \dots, T_m$  de  $\delta$ -tubos  $\delta$ -separados maximal y todo conjunto  $t_1, \dots, t_m$  de números positivos tales que

$$\delta^{n-1} \sum_{k=1}^m t_k^q \leq 1;$$

entonces,

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C(n, p) M \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

*Demostración.* Sean  $\{e_1, \dots, e_m\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto  $\delta$ -separado maximal de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Si  $e \in \mathbb{S}^{n-1} \cap B(e_k, \delta)$ , entonces por el Lema 1.2.6,  $\mathcal{K}_\delta f(e) \leq C(n) \mathcal{K}_\delta f(e_k)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}^p &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\mathcal{K}_\delta f(e)|^p d\sigma^{n-1}(e) \leq \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{S}^{n-1} \cap B(e_k, \delta)} (\mathcal{K}_\delta f(e))^p d\sigma^{n-1}(e) \\ &\leq \sum_{k=1}^m C(n)^p \mathcal{K}_\delta f(e_k)^p \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1} \cap B(e_k, \delta)) \\ &= C(n, p) \sum_{k=1}^m \mathcal{K}_\delta f(e_k)^p \delta^{n-1} \approx \sum_{k=1}^m \mathcal{K}_\delta f(e_k)^p \delta^{n-1}. \end{aligned}$$

Por la dualidad de  $l^p$  y  $l^q$ , para cualquier  $x_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^m x_k^p \right)^{1/p} = \max \left\{ \sum_{k=1}^m x_k y_k : y_k \geq 0, \sum_{k=1}^m y_k^q = 1 \right\}.$$

Aplicando esto a  $x_k = \delta^{(n-1)/p} \mathcal{K}_\delta f(e_k)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} &\lesssim \left( \sum_{k=1}^m (\delta^{(n-1)/p} \mathcal{K}_\delta f(e_k))^p \right)^{1/p} = \sum_{k=1}^m \delta^{(n-1)/p} \mathcal{K}_\delta f(e_k) y_k \\ &= \delta^{n-1} \sum_{k=1}^m t_k \mathcal{K}_\delta f(e_k) \end{aligned}$$

donde los  $y_k$  se toman entre todos los  $y_k \geq 0$  con  $\sum_{k=1}^m y_k^q = 1$  para que la suma  $\sum_{k=1}^m x_k y_k$  sea el máximo, y donde tomamos  $t_k = \delta^{(1-n)/q} y_k$ . Entonces, tenemos

$\delta^{n-1} \sum_{k=1}^m t_k^q = 1$ , con lo que estos  $t_k$  cumplen las hipótesis de la proposición. En consecuencia, para algunos  $a_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k = 1, \dots, m$ , existen unos  $\delta$ -tubos  $\delta$ -separados  $T_k = T_{e_k}^\delta(a_k)$  tales que

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{n-1} \sum_{k=1}^m t_k \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_k)} \int_{T_k} |f(x)| dx.$$

Ahora, primero usando  $\mathcal{L}^n(T_k) \approx \delta^{n-1}$ , y luego por la desigualdad de Hölder (ver Teorema A.1.2), tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} &\lesssim \sum_{k=1}^m t_k \int_{T_k} |f(x)| dx = \sum_{k=1}^m t_k \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{T_k}(x) |f(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^m t_k \chi_{T_k}(x) \right) |f(x)| dx \leq \left\| \sum_{k=1}^m t_k \chi_{T_k} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq M \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado (1.7). Repasando el proceso, vemos que las constantes solo dependen de  $p$  y  $n$ .  $\square$

Para acabar con esta sección, vamos a ver otra propiedad importante relacionada con la conjetura maximal de Kakeya. Esta propiedad nos va a facilitar muchos cálculos. La conjetura dice que la acotación se cumple para toda función de  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , pero como vamos a ver, es suficiente probar que se cumple para las funciones con soporte en la bola unidad  $B(0, 1)$ . Primero, necesitamos un lema.

**Lema 1.2.8.** *Sea  $\beta \in \mathbb{R}$  y supongamos que se tiene*

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C(n, p) \delta^{-\beta} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.8)$$

para toda función  $f$  con soporte en la bola  $B(0, 1)$ . Entonces se cumple (1.8) para toda función  $f$  con soporte en cualquier bola  $B(x_0, r)$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $r \geq 1$ .

*Demostración.* Sean  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \geq 1$  y  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $\text{supp } f \subset B(x_0, r)$ . Tenemos que ver que  $f$  cumple la desigualdad (1.8). Por la Definición 1.2.1,

$$\mathcal{K}_\delta f(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{r^n}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{\frac{1}{r}(T_e^\delta(a) - x_0)} |\tilde{f}(x)| dx,$$

donde hemos hecho el cambio de variable  $x = \frac{y - x_0}{r}$  en la integral (ver Teorema A.1.4), y hemos definido  $\tilde{f}(x) = f(rx + x_0)$ , que tiene soporte en  $B(0, 1)$ . Ahora, como el supremo lo tomamos entre todos los  $a \in \mathbb{R}^n$ , la traslación del tubo no va a afectar en el supremo, es decir, vamos a tener

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{\frac{1}{r}(T_e^\delta(a) - x_0)} |\tilde{f}(x)| dx = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \int_{\frac{1}{r}T_e^\delta(a)} |\tilde{f}(x)| dx.$$

Además, como  $r \geq 1$ , se cumple  $\frac{1}{r}T_e^\delta(a) \subseteq T_e^\delta(a)$ , por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\delta f(e) &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{r^n}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{\frac{1}{r}T_e^\delta(a)} |\tilde{f}(x)| \, dx \\ &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{r^n}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |\tilde{f}(x)| \, dx = r^n \mathcal{K}_\delta \tilde{f}(e). \end{aligned}$$

Entonces, calculando la norma  $L^p$ , usando la hipótesis (1.8), y deshaciendo el cambio de variable,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} &\leq r^n \|\mathcal{K}_\delta \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C(n, p) r^n \delta^{-\beta} \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= C(n, p) r^n \delta^{-\beta} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}|^p \, dx \right)^{1/p} = C(n, p) \delta^{-\beta} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dy \right)^{1/p} \\ &= C(n, p) \delta^{-\beta} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

con lo que se cumple el lema. □

Como ya anunciamos antes, se sigue el siguiente resultado.

**Proposición 1.2.9.** *Sea  $\beta > 0$  y supongamos que se tiene*

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C(n, p) \delta^{-\beta} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.9)$$

para toda función  $f$  con soporte en la bola  $B(0, 1)$ . Entonces se va a cumplir (1.9) para toda función  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Aquí, la constante  $C(n, p)$  puede cambiar, pero solo depende de  $n$  y  $p$ .

*Demostración.* Primero, por la Observación 1.2.4, podemos suponer que  $f$  es positiva. Ahora, vamos a recubrir  $\mathbb{R}^n$  con cubos de la forma

$$Q_{\bar{m}} = \prod_{j=1}^n [m_j, m_j + 1],$$

donde  $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ . Esto lo tomamos como una partición de  $\mathbb{R}^n$ , con lo que para una función  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , definimos  $f_{\bar{m}}(x) = f(x) \chi_{Q_{\bar{m}}}(x)$ . De esta manera,

$$f(x) = \sum_{\bar{m}} f_{\bar{m}}(x), \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Observamos que en esta expresión los puntos que cumplen la igualdad son los puntos interiores de los cubos. Si nos fijamos en los puntos de la frontera (que forman un conjunto de medida nula), en la parte derecha de la igualdad se suma varias veces el valor de  $f(x)$ , con lo que no se va a cumplir la igualdad. Sin embargo, el número de veces que se suma el valor será una constante que va a depender de  $n$ , ya que se sumará el número de veces que el punto  $x$  se interseque con un cubo. En resumen, en estos puntos tendremos  $C(n)f(x) = \sum_{\bar{m}} f_{\bar{m}}(x)$ , con  $C(n) \in \mathbb{N}$ . En cualquier

caso, como estos puntos forman un conjunto de medida nula, podemos tomar esta expresión como una igualdad en el espacio  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Fijamos  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Entonces, existe algún tubo  $T_e^\delta(a)$  tal que

$$\mathcal{K}_\delta f(e) \lesssim \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} f(x) dx = \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} \sum_{\bar{m}} f_{\bar{m}}(x) dx.$$

Por otro lado, existirá algún  $\bar{m}_0 \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $T_e^\delta(a) \cap Q_{\bar{m}_0} \neq \emptyset$ . Como  $T_e^\delta(a)$  tiene longitud 1, vemos que  $T_e^\delta(a) \cap Q_{\bar{m}} = \emptyset$ , para todos los cubos  $Q_{\bar{m}}$  no adyacentes a  $Q_{\bar{m}_0}$ . Más precisamente, esto significa que si para  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^n$  se cumple  $T_e^\delta(a) \cap Q_{\bar{m}} \neq \emptyset$ , entonces se tiene  $Q_{\bar{m}} \cap Q_{\bar{m}_0} \neq \emptyset$ .

Solo habrá un número finito de multi-índices  $\bar{m}$  que cumplan esta última propiedad para un  $Q_{\bar{m}_0}$  fijado, que de nuevo, este número será una constante que solo depende de  $n$ . Esto nos permite examinar solo un número finito de  $f_{\bar{m}}$ , y en consecuencia, tenemos que

$$\mathcal{K}_\delta f(e) \lesssim \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} \sum_{Q_{\bar{m}} \cap Q_{\bar{m}_0} \neq \emptyset} f_{\bar{m}}(x) dx \leq \sum_{Q_{\bar{m}} \cap Q_{\bar{m}_0} \neq \emptyset} \mathcal{K}_\delta f_{\bar{m}}(e).$$

Ahora aplicamos la desigualdad de Hölder y simplificamos:

$$\begin{aligned} \sum_{Q_{\bar{m}} \cap Q_{\bar{m}_0} \neq \emptyset} \mathcal{K}_\delta f_{\bar{m}}(e) &\leq \left( \sum_{Q_{\bar{m}} \cap Q_{\bar{m}_0} \neq \emptyset} 1^{p'} \right)^{1/p'} \left( \sum_{Q_{\bar{m}} \cap Q_{\bar{m}_0} \neq \emptyset} |\mathcal{K}_\delta f_{\bar{m}}(e)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq C(n) \|\mathcal{K}_\delta f_{\bar{m}}(e)\|_{l^p(\mathbb{Z}^n)}. \end{aligned}$$

Así hemos llegado a la desigualdad

$$\mathcal{K}_\delta f(e) \lesssim \|\mathcal{K}_\delta f_{\bar{m}}(e)\|_{l^p(\mathbb{Z}^n)}.$$

Elevándolo a  $p$  e integrando,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}^p &\lesssim \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\mathcal{K}_\delta f_{\bar{m}}(e)\|_{l^p(\mathbb{Z}^n)}^p d\sigma^{n-1}(e) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{\bar{m}} |\mathcal{K}_\delta f_{\bar{m}}(e)|^p d\sigma^{n-1}(e) = \sum_{\bar{m}} \|\mathcal{K}_\delta f_{\bar{m}}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}^p. \end{aligned}$$

Ahora, observamos que  $f_{\bar{m}}$  tiene soporte en  $Q_{\bar{m}}$ , y que  $Q_{\bar{m}} \subset B(x_0, r)$  para algún  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y alguna constante  $r \geq 1$ . Entonces, aplicamos el Lema 1.2.8, y obtenemos,

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}^p \lesssim \sum_{\bar{m}} \|\mathcal{K}_\delta f_{\bar{m}}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}^p \lesssim \sum_{\bar{m}} \delta^{-p\beta} \|f_{\bar{m}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \delta^{-p\beta} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p,$$

lo que demuestra la proposición.  $\square$

### 1.3. La conjetura maximal de Kakeya implica la conjetura de Kakeya

Previamente, hemos mencionado que las dos conjeturas de Kakeya están relacionadas. En esta sección vamos a ver que si se cumple la Conjetura maximal de Kakeya 2, entonces también se cumple la Conjetura de Kakeya 1. Por esta razón decimos que la conjetura maximal es más fuerte.

Primero, necesitamos el siguiente lema geométrico.

**Lema 1.3.1.** Sean  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$  e  $I_e$  un segmento de longitud 1, dirección  $e$  y centrado en  $a_e \in \mathbb{R}^n$ . Consideramos un conjunto finito de bolas  $B(x_j, r_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , tales que  $2^{-k} \leq r_j \leq 2^{-(k-1)}$ . Entonces, si  $\mathcal{H}^1(I_e \cap (\bigcup_j B_j)) \geq \alpha$ , se tiene

$$\mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap \bigcup_{j=1}^M B(x_j, 2r_j) \right) \geq \alpha \mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \right).$$

*Demostración.* Primero, consideramos el caso de una sola bola  $B$  centrada en  $x$  de radio  $2^{-k} \leq r \leq 2^{-(k-1)}$ . Vamos a tomar  $A$  el conjunto de los puntos del tubo  $T_e^{2^{-k}}(a_e)$  tales que proyectados ortogonalmente sobre  $I_e$  caen dentro de  $I_e \cap B$ , tal y como se muestra en la figura 1.3 de abajo. Sea  $y \in A$  y escribimos  $\tilde{y}$  la proyección ortogonal sobre  $I_e$  de  $y$ . Entonces, como el tubo tiene radio  $2^{-k}$  e  $\tilde{y} \in B$ ,

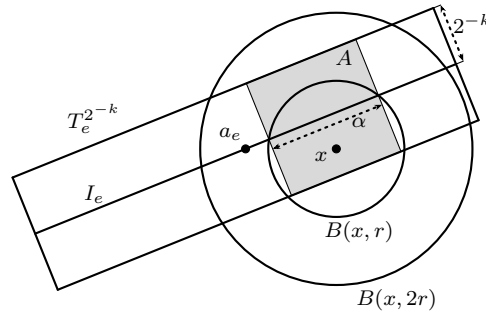
$$|y - x| \leq |y - \tilde{y}| + |\tilde{y} - x| \leq \frac{1}{2^k} + r \leq 2r.$$

Así vemos que  $A \subset T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap B(x, 2r)$ . Y como por hipótesis  $\mathcal{H}^1(I_e \cap B) \geq \alpha$ , la medida de  $A$  cumple  $\mathcal{L}^n(A) \geq \alpha \mathcal{L}^n(T_e^{2^{-k}}(a_e))$ . Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap B(x, 2r) \right) \geq \mathcal{L}^n(A) \geq \alpha \mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \right),$$

es decir, se tiene el resultado.

Figura 1.3: Situación del Lema 1.3.1 con una sola bola.





Supongamos ahora que tenemos  $B_1, \dots, B_m$  un conjunto finito de bolas, donde cada  $B_j$  cumple  $\mathcal{H}^1(I_e \cap B_j) \geq \alpha_j$ . Escribimos  $\tilde{B}_j = B(x_j, 2r_j)$ . Definimos como en el caso de una sola bola los conjuntos  $A_j \subset T_e^{2^{-k}}(a_e)$ , para cada  $j = 1, \dots, m$ . Como en el primer caso, tenemos que

$$A_j = \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap B_j \right) \subset \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap \tilde{B}_j \right),$$

y entonces,

$$\left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap \left( \bigcup_{j=1}^m A_j \right) \right) \subset \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap \left( \bigcup_{j=1}^m \tilde{B}_j \right) \right).$$

Por otro lado, por la hipótesis  $\mathcal{H}^1(I_e \cap (\bigcup_j B_j)) \geq \alpha$ , y se sigue que

$$\mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap \left( \bigcup_{j=1}^m A_j \right) \right) \geq \alpha \mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \right).$$

Por último, teniendo en cuenta estas dos últimas expresiones, se sigue directamente el resultado, es decir, se tiene

$$\mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap \left( \bigcup_{j=1}^m \tilde{B}_j \right) \right) \geq \mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap \left( \bigcup_{j=1}^m A_j \right) \right) \geq \alpha \mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \right).$$

□

Con esto, ya podemos demostrar la implicación que nos interesa.

**Teorema 1.3.2.** *Supongamos que  $1 < p < \infty$ ,  $\beta > 0$  y  $n - p\beta > 0$ . Si para todo  $\delta > 0$  y toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  se cumple*

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C(n, p, \beta) \delta^{-\beta} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}; \quad (1.10)$$

*entonces, la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Besicovitch en  $\mathbb{R}^n$  es al menos  $n - p\beta$ .*

*En particular, si se cumple  $K(n, p)$  para algún  $p$  con  $1 < p < \infty$ , entonces la dimensión de Hausdorff de cada conjunto de Besicovitch en  $\mathbb{R}^n$  es  $n$ .*

*En conclusión, la conjetura maximal de Kakeya implica la conjetura de Kakeya.*

*Demostración.* Las dos últimas conclusiones son inmediatas, ya que si se cumple  $K(n, p)$  para algún  $p$ , por el primer resultado la dimensión de Hausdorff de un conjunto de Besicovitch será al menos  $n - p\varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ , y por lo tanto, será al menos  $n$ . Por otro lado, si se cumple la conjetura de Kakeya, tenemos que se tiene  $K(n, n)$ , así que, por lo dicho, la dimensión de Hausdorff de los conjuntos

de Besicovitch será al menos  $n$ , y entonces tenemos que se cumple la conjetura de Kakeya.

En resumen, solo tenemos que probar la primera afirmación. Es decir, sea  $B$  un conjunto de Besicovitch y probemos que  $\dim_H(B) \geq n - p\beta$ .

Sean  $0 < \alpha < n - p\beta$  y  $B_j = B(x_j, r_j)$ , para  $j = 1, 2, \dots$  bolas tales que  $0 < r_j < 1$  y  $B \subset \bigcup_j B_j$ . Por la caracterización para la dimensión de Hausdorff que hemos visto en la Proposición 1.1.3, es suficiente probar que  $\sum_j r_j^\alpha \gtrsim 1$ .

Para  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ , sea  $I_e \in B$  un segmento unitario paralelo a  $e$ . Para  $k = 1, 2, \dots$  definimos los conjuntos disjuntos

$$J_k = \{j : 2^{-k} \leq r_j < 2^{1-k}\},$$

y

$$S_k = \left\{ e \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathcal{H}^1 \left( I_e \cap \bigcup_{j \in J_k} B_j \right) \geq \frac{1}{2k^2} \right\}.$$

Primero, veamos que  $\bigcup_k S_k = \mathbb{S}^{n-1}$ . La inclusión  $\bigcup_k S_k \subset \mathbb{S}^{n-1}$  es obvia. Para la otra, supongamos que no es cierto. Entonces, existe algún  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$  tal que

$$\mathcal{H}^1 \left( I_e \cap \bigcup_{j \in J_k} B_j \right) < \frac{1}{2k^2}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , y en consecuencia,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^1 \left( I_e \cap \bigcup_{j \in J_k} B_j \right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} < 1.$$

Pero esto es imposible, porque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^1 \left( I_e \cap \bigcup_{j \in J_k} B_j \right) = \mathcal{H}^1 \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \left( I_e \cap \bigcup_{j \in J_k} B_j \right) \right) \geq \mathcal{H}^1(I_e) \geq 1.$$

Así, hemos probado que  $\bigcup_k S_k = \mathbb{S}^{n-1}$ .

Ahora, sea  $F_k = \bigcup_{j \in J_k} B(x_j, 2r_j)$ . Si  $e \in S_k$ , entonces tomando  $a_e$  el punto intermedio de  $I_e$ , tenemos por el Lema 1.3.1,

$$\mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap F_k \right) \geq \frac{1}{2k^2} \mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \right).$$

Por lo tanto, para  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,

$$\mathcal{K}_{2^{-k}} \chi_{F_k}(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a) \cap F_k \right)}{\mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a) \right)} \geq \frac{\mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \cap F_k \right)}{\mathcal{L}^n \left( T_e^{2^{-k}}(a_e) \right)} \geq \frac{1}{2k^2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_{2^{-k}}\chi_{F_k}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}^p &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\mathcal{K}_{2^{-k}}\chi_{F_k}(e)|^p d\sigma^{n-1}(e) \\ &\geq \int_{S_k} |\mathcal{K}_{2^{-k}}\chi_{F_k}(e)|^p d\sigma^{n-1}(e) \geq \left(\frac{1}{2k^2}\right)^p \sigma^{n-1}(S_k). \end{aligned}$$

Ahora, esto último, junto con la hipótesis (1.10) tomando  $\delta = 2^{-k}$ , implica

$$\begin{aligned} \sigma^{n-1}(S_k) &\leq 2^p k^{2p} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\mathcal{K}_{2^{-k}}\chi_{F_k}(e)|^p d\sigma^{n-1}(e) \\ &\leq 2^p k^{2p} C(n, p, \beta)^p 2^{k\beta p} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{F_k}|^p dx = 2^p k^{2p} C(n, p, \beta)^p 2^{k\beta p} \mathcal{L}^n(F_k). \end{aligned}$$

Pero,  $\mathcal{L}^n(F_k) \leq \alpha(n)2^{(2^{-k})n} \#J_k$ , donde  $\#J_k$  denota el cardinal del conjunto  $J_k$ , y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sigma^{n-1}(S_k) &\leq C(n, p, \beta)^p 2^{p+2} \alpha(n) k^{2p} 2^{k\beta p} 2^{-kn} \#J_k \approx k^{2p} 2^{k\beta p} 2^{-kn} \#J_k \\ &= k^{2p} 2^{-k(n-\beta p)} \#J_k \leq C 2^{-k(n-\beta p)} \#J_k \leq C 2^{-k\alpha} \#J_k. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_j^\alpha \geq \sum_{k=1}^{\infty} \#J_k 2^{-k\alpha} \gtrsim \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{n-1}(S_k) \geq \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \approx 1,$$

tal y como queríamos probar.  $\square$

Este teorema es muy importante, no solo porque relaciona directamente las dos conjeturas; sino también, porque según el teorema, todo avance que se haga para la conjetura maximal de *Keakeya* va a tener un avance en la conjetura de *Keakeya*. Más precisamente, si conseguimos una mejor acotación para la estimación de la función maximal de *Keakeya*, esto va a implicar que la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de *Besicovitch* sea mayor. Por esto mismo, a partir de ahora nos vamos a centrar en la conjetura maximal de *Keakeya*.

## 1.4. Problemas de *Nikodym*

Para acabar con el primer capítulo, vamos a estudiar los problemas de *Nikodym*. En este caso también vamos a tener una conjetura de *Nikodym* y una conjetura maximal de *Nikodym*, que van a estar relacionadas del mismo modo que las de *Keakeya*, es decir, la conjetura maximal de *Nikodym* implica la conjetura de *Nikodym*. El motivo de estudiar estas conjeturas aquí, es que están muy relacionadas con las de *Keakeya*. De hecho, vamos a ver que las conjeturas maximales son equivalentes. Por este motivo, no es de extrañar que históricamente se hayan dado avances parecidos en estos dos problemas, antes incluso de probarse que están tan relacionados.

Para los problemas de *Nikodym* vamos a seguir un proceso parecido al de los problemas de *Keakeya*. Así, empezamos definiendo los conjuntos de *Nikodym*.

**Definición 1.4.1.** Decimos que  $N \subset \mathbb{R}^n$  es un *conjunto de Nikodym* si  $\mathcal{L}^n(N) = 0$  y para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  existe una línea  $L$  que atraviesa  $x$  y tal que  $L \cap N$  contiene un segmento unitario de línea.

La primera conjetura de Nikodym es análoga a la de Kakeya, pero para los conjuntos de Nikodym.

**Conjetura 3.** (Conjetura de Nikodym) Todo conjunto de Nikodym en  $\mathbb{R}^n$  tiene dimensión de Hausdorff  $n$ .

Ahora, para enunciar la conjetura maximal de Nikodym necesitamos definir la función maximal relacionada con ella.

**Definición 1.4.2.** Definimos la *función maximal de Nikodym* asociada a la función  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\delta f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0, \infty] \\ x &\longmapsto \mathcal{N}_\delta f(x) = \sup_{x \in T} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T)} \int_T |f(x)| \, dx \end{aligned}$$

donde el supremo se toma sobre todos los  $\delta$ -tubos  $T = T_e^\delta(a)$  que contienen a  $x$ .

De nuevo, la conjetura maximal de Nikodym es igual a la de Kakeya, pero para la función maximal de Nikodym.

**Conjetura 4.** (Conjetura maximal de Nikodym) Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \delta < 1$  y  $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$ . Entonces, se cumple

$$\|\mathcal{N}_\delta f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \lesssim \delta^{-\varepsilon} \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)},$$

donde la constante puede depender de  $n$  y  $\varepsilon$ .

Nuestro objetivo ahora es ver que las conjeturas maximales de Kakeya y Nikodym son equivalentes. Esto lo demostró Tao en [25]. Para ello, vamos a necesitar varios lemas y resultados previos.

Primero, de la misma manera que con la función maximal de Kakeya, para  $1 \leq p \leq n$  vamos a buscar estimaciones de la forma

$$\|\mathcal{N}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p} + 1 - \varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.11)$$

Si se cumple esta estimación para todo  $0 < \delta < 1$  y toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , vamos a decir que se cumple  $N(n, p, \varepsilon)$ . Por lo tanto, la conjetura maximal de Nikodym dice que se cumple  $N(n, n, \varepsilon)$  para todo  $\varepsilon > 0$ .

Antes de ver la relación entre las dos conjeturas maximales, observamos que al igual que hemos hecho en el caso de Kakeya (Observación 1.2.4 y Lema 1.2.9), para demostrar estimaciones de la función maximal de Nikodym es suficiente demostrarlo para las funciones  $f$  que son positivas y tienen soporte en la bola  $B(0, 1)$ .

Como vamos a ver, durante los siguientes lemas vamos a utilizar repetidamente la siguiente notación para puntos de  $\mathbb{R}^n$ :  $x = (\underline{x}, x_n)$ , donde  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ .

Ahora, vamos a ver los lemas que vamos a usar para demostrar la equivalencia de las conjeturas maximales. Los dos primeros se van a utilizar para demostrar el sentido Nikodym implica Kakeya. El primero es una propiedad geométrica relativa a los tubos.

**Lema 1.4.3.** *Sea  $|x| \approx 1$ . Si  $T$  es un  $\delta$ -tubo con dirección  $e_x = \frac{x}{|x|}$ , entonces existe una constante  $C$  que solo depende de  $n$  y un tubo  $T'$  con longitud  $C\delta^{-1}$  y radio  $C\delta$  que contiene al punto  $x/\delta$  y tal que  $T \cap B(0, 1) \subset T'$ .*

*Demostración.* Tomamos  $|x| \approx 1$  para que  $|x|$  esté acotada, lejos del 0 y del  $\infty$ . Entonces, podemos suponer que  $1/2 < |x| < 2$ . Fijamos un  $x$  en esta corona circular y sea  $\phi_1$  la rotación que lleva  $e_x$  a  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ . Con esto queremos aprovechar la invariancia rotacional del problema para facilitar la notación.

Sea  $T$  un  $\delta$ -tubo con dirección  $e_x$  cuya intersección con  $B(0, 1)$  sea no vacía. Entonces,  $\phi_1(T)$  será un tubo vertical, y  $\phi_1(T) \cap B(0, 1)$  estará contenido en la intersección de la bola unidad con un cilindro de dirección  $e_n$  y radio  $\delta$ . Denotamos esta intersección como  $S(\underline{r}, 0)$ , donde  $\underline{r} = (r_1, \dots, r_{n-1})$  es el punto del eje principal del cilindro y del tubo  $\phi_1(T)$  ( que es paralelo a  $e_n$ ), que se interseca con el hiperplano  $\{r_n = 0\}$ . Es decir, si escribimos  $a = (a_1, \dots, a_n) = (\underline{a}, a_n)$  como el centro de  $\phi_1(T)$ , entonces  $\underline{r} = \underline{a}$ . Ahora, observamos que  $a \in B(0, 3/2)$ . Si no,  $\phi_1(T)$  no podría intersectarse con  $B(0, 1)$ . De hecho, como  $\phi_1(T)$  tiene dirección  $e_n$ , si escribimos  $a = (\underline{a}, a_n)$ , necesariamente  $\underline{a} \in B^{n-1}(0, 1 + \delta)$ , porque si no, de nuevo no se intersectaría con  $B(0, 1)$ . Teniendo en cuenta esto, tenemos la inclusión

$$\phi_1(T) \cap B(0, 1) \subset S(\underline{a}, 0) = \{|z| \leq 1 : \underline{z} - \underline{a} \in B^{n-1}(0, \delta)\}.$$

El objetivo ahora es encontrar una constante  $C$  y un tubo  $T'$  de las medidas que se piden en el enunciado del lema, con  $\frac{\phi_1(x)}{\delta} \in T'$  y que contiene a  $S(\underline{r}, 0)$ , y así habremos terminado. Aquí, la geometría clave es que si la intersección  $S(\underline{r}, 0)$  está lejos del origen, entonces el ángulo necesario para orientar  $T'$  respecto de  $e_n$  será mayor, y necesitaremos una constante  $C$  más grande.

De nuevo, vamos a aprovechar la invarianza rotacional del problema para facilitar las cuentas. Definimos  $\phi_2$  como la rotación que deja fijo el eje  $e_n$  y lleva  $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$  a  $\frac{\underline{a}'}{|\underline{a}'|}$ , donde  $\underline{a}' = (\sqrt{|\underline{a}|^2 + a_n^2}, 0, \dots, 0, a_n)$ . De esta manera,  $\phi_2$  rota el tubo  $\phi_1(T)$  de forma que su eje principal (el paralelo a  $e_n$ ) va a intersectarse con el primer eje principal de  $\mathbb{R}^n$ , el paralelo a  $e_1$ . En otras palabras, si denotamos  $\underline{a}' = (\underline{a}', a_n)$ , que va a ser el centro del tubo  $\phi_2(\phi_1(T))$ , entonces  $(\underline{a}', 0)$  va a estar en el primer eje principal de  $\mathbb{R}^n$ . Además,  $\phi_2(\phi_1(T))$  va a mantenerse paralelo a  $e_n$ , es decir va a seguir siendo un tubo vertical. De esta manera, simplificamos el problema buscando el tubo  $T'$  que contiene al  $\delta$ -tubo rotado  $(\phi_2 \circ \phi_1)(T)$ .

Primero, elegimos la orientación  $e$  de  $T'$  mediante la línea que conecta  $(\phi_2 \circ \phi_1)(x/\delta) = \phi_2(0, \dots, 0, |x|/\delta) = (0, \dots, 0, |x|/\delta)$  (observar que  $|\phi_1(x)| = |x|$ ) y  $(\underline{a}', 0)$ .

Así,

$$e = \frac{(\underline{a}', 0) - (0, \dots, 0, |x|/\delta)}{|(\underline{a}', 0) - (0, \dots, 0, |x|/\delta)|} = \frac{(a'_1, 0, \dots, 0, -|x|/\delta)}{|(a'_1, 0, \dots, 0, -|x|/\delta)|},$$

donde  $a'_1 = \sqrt{|a|^2 + a_n^2}$ . Por otro lado, queremos elegir el centro de  $T'$  para que sea cercano a  $\phi_2(\phi_1(x/\delta))$ . Para ello, definimos el centro como el punto  $b = (b, b_n)$  donde  $\underline{b} \in B^{n-1}(0, \delta)$  y  $0 < b_n \leq |x|/\delta \approx 1/\delta$ . Todo lo que necesitamos es la constante  $C$  para asegurarnos que

$$\phi_2(S(\underline{a}, 0)) = S(\underline{a}', 0) = \{|z| \leq 1 : z - \underline{a}' \in B^{n-1}(0, \delta)\}$$

esté contenido en  $T'$

Recordamos que podemos escribir  $T'$  como

$$T' = \{y \in \mathbb{R}^n : |(y - b) \cdot e| \leq C/(2\delta), |y - b - ((y - b) \cdot e)e| \leq C\delta\}. \quad (1.12)$$

Observamos que otra forma de ver la segunda condición en esta definición es que el valor absoluto de la proyección ortogonal del punto  $(y - b)$  sobre el plano  $e^\perp$  sea menor que  $C\delta$ , donde  $e^\perp$  es el hiperplano que pasa por el origen y tiene  $e$  como vector normal. Vamos a elegir una base  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}\}$  para el subespacio  $e^\perp$ . Primero, elegimos  $\zeta_1$  un vector que esté en el plano  $\pi(e_1, e_n)$ , el generado por  $e_1$  y  $e_n$ . Precisamente, como  $e$  está en este plano, vamos a tomar  $\zeta_1$  perpendicular a  $e$ . Ahora, podemos elegir  $\zeta_2 = e_2, \dots, \zeta_{n-1} = e_{n-1}$ . Recordamos que el objetivo es ver que  $S(\underline{a}', 0) \subset T'$ . Para ello, por la definición (1.12) de  $T'$ , vamos a ver que si  $z \in S(\underline{a}', 0)$ , entonces se tiene  $|(z - b) \cdot e| \lesssim 1/\delta$  (la primera condición en (1.12)) y  $|(z - b) \cdot \zeta_j| \lesssim \delta$  para  $j = 1, \dots, n-1$  (la segunda condición en (1.12)).

Primero, para  $j = 2, \dots, n-1$ , por un lado, tenemos que  $a'_j = 0$  y  $z - \underline{a}' \in B^{n-1}(0, \delta)$  por lo que  $|z_j| \leq \delta$ . Por otro lado, como  $\underline{b} \in B^{n-1}(0, \delta)$ ,  $|b_j| \leq \delta$ . Entonces, si  $z \in S(\underline{a}', 0)$ , tenemos,

$$|(z - b) \cdot \zeta_j| = |(z - b) \cdot e_j| \leq |z_j| + |b_j| \leq 2\delta \approx \delta.$$

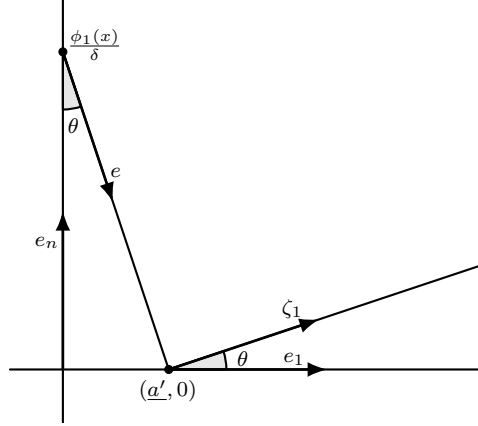
Ahora, sea  $\theta$  el ángulo en el plano  $\pi(e_1, e_n)$  entre  $e_1$  y  $\zeta_1$ . Como  $e_1$  y  $e_n$ , y  $e$  y  $\zeta_1$  son ortogonales, este ángulo será el mismo que entre  $e$  y  $e_n$ . En la figura 1.4 de abajo podemos ver la situación. En consecuencia, vamos a tener un triángulo recto (formado por los vértices  $(0, \dots, 0, |x|/\delta)$ ,  $(\underline{a}', 0)$  y el origen) con catetos de longitud  $|\phi_1(x)|/\delta$  y  $a'_1$ . Entonces, se cumple

$$\sin^2 \theta = \frac{(a'_1)^2}{(a'_1)^2 + (\delta^{-1}|\phi_1(x)|)^2} = \frac{(a'_1)^2 \delta^2}{\delta^2(a'_1)^2 + |\phi_1(x)|^2} \leq \frac{(a'_1)^2 \delta^2}{|\phi_1(x)|^2} \lesssim \delta^2$$

porque  $|a'_1| \lesssim 1$  y  $|\phi_1(x)| = |x| \approx 1$ . En consecuencia,  $\theta \approx |e_1 - \zeta_1| \lesssim \delta$ .

Sea  $z \in S(\underline{a}', 0)$ . Por la definición de  $T'$  y teniendo en cuenta que por construcción necesitamos  $a' \in T'$ , entonces  $|(a' - b) \cdot \zeta_1| \lesssim \delta$ . Además, como  $z - \underline{a}' \in B^{n-1}(0, \delta)$ , se tiene  $|z_1 - a'_1| \leq \delta$ . Teniendo en cuenta todo esto, tenemos,

$$\begin{aligned} |(z - b) \cdot \zeta_1| &= |(z - a') \cdot \zeta_1 - (z - a') \cdot e_1 + (z - a') \cdot e_1 + (a' - b) \cdot \zeta_1| \\ &\leq |(z - a') \cdot (\zeta_1 - e_1)| + |(z - a') \cdot e_1| + |(a' - b) \cdot \zeta_1| \\ &\lesssim |z - a'| \delta + |z_1 - a'_1| + \delta \lesssim \delta. \end{aligned}$$

Figura 1.4: Ortogonalidad de  $e_1$  y  $e_n$ , y  $e$  y  $\zeta_1$ .


Por último, como  $b_n \lesssim 1/\delta$ , si  $z \in S(\underline{a}', 0)$ , entonces

$$\begin{aligned} |(z - b) \cdot e| &= \left| (z_1 - b_1, \dots, z_n - b_n) \cdot \frac{(a'_1, 0, \dots, 0, -|x|/\delta)}{|(a'_1, 0, \dots, 0, -|x|/\delta)|} \right| \\ &= \frac{1}{|(a'_1, 0, \dots, 0, -|x|/\delta)|} \left| (z_1 - b_1)a'_1 - (z_n - b_n)\frac{|x|}{\delta} \right| \\ &\lesssim \frac{1}{1/\delta} \left( |z_1 - b_1|a'_1 + \frac{1}{\delta}|z_n - b_n| \right) \lesssim 1/\delta. \end{aligned}$$

En consecuencia, existe alguna constante  $C$ , que solo depende de  $n$  tal que  $S(\underline{a}', 0) \subset T'$ .

Para acabar, desenredando las transformaciones vemos que dado un  $\delta$ -tubo con dirección  $e_x$  para un punto dado  $x$ , que se interseca con la bola unidad, podemos encontrar un tubo  $T'$  con longitud  $C\delta^{-1}$  y radio  $C\delta$  tal que

$$T \cap B(0, 1) \subset (\phi_1^{-1} \circ \phi_2^{-1})(T'),$$

con  $x/\delta \in (\phi_1^{-1} \circ \phi_2^{-1})(T')$  como se quería. Además,  $(\phi_1^{-1} \circ \phi_2^{-1})(T')$  sigue siendo un tubo con longitud  $C\delta^{-1}$  y radio  $C\delta$ , con lo que el lema queda demostrado.  $\square$

Ahora, vamos a utilizar el anterior lema para probar una estimación puntual que relaciona las funciones maximales de Kakeya y Nikodym.

**Lema 1.4.4.** *Escribimos  $f_\delta(x) = f(\frac{x}{\delta})$ . Entonces para todo  $|x| \approx 1$  y toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , tenemos la estimación*

$$\mathcal{K}_\delta f(e_x) \lesssim \delta^{-1} \mathcal{N}_{C\delta^2} f_\delta(x),$$

donde  $e_x = \frac{x}{|x|}$  y  $C$  es una constante que solo depende de  $n$ .

*Demostración.* Primero, podemos suponer que  $f$  es positiva y tiene soporte en la bola unidad.

Fijamos  $|x| \approx 1$ . Por la Definición 1.2.1 de  $\mathcal{K}_\delta$ ,

$$\mathcal{K}_\delta f(e_x) \approx \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\delta^{n-1}} \int_{T_{e_x}^\delta(a)} f(y) dy;$$

y por la Definición 1.4.2 de  $\mathcal{N}_\delta$ , como un  $C\delta^2$ -tubo  $\tilde{T}$  tiene medida  $\mathcal{L}^n(\tilde{T}) = \alpha(n-1)(C\delta^2)^{n-1} \approx \delta^{2(n-1)}$ ,

$$\delta^{-1} \mathcal{N}_{C\delta^2} f_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \sup_{x \in \tilde{T}} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\tilde{T})} \int_{\tilde{T}} f_\delta(y) dy \approx \sup_{x \in \tilde{T}} \frac{1}{\delta^{2n-1}} \int_{\tilde{T}} f\left(\frac{y}{\delta}\right) dy,$$

donde el supremo se toma entre los  $C\delta^2$ -tubos  $\tilde{T}$ . Haciendo el cambio de variable  $z = y/\delta$ , vemos que

$$\int_{\tilde{T}} f(y/\delta) dy = \delta^n \int_{T'} f(z) dz,$$

donde  $T'$  es un tubo de longitud  $\delta^{-1}$  y radio  $C\delta$  ( $T' = \frac{1}{\delta}\tilde{T}$ ). Además,  $x \in \tilde{T}$  si y solo si  $x/\delta \in T'$ . En consecuencia,

$$\delta^{-1} \mathcal{N}_{C\delta^2} f_\delta(x) \approx \sup_{\frac{x}{\delta} \in T'} \frac{1}{\delta^{n-1}} \int_{T'} f(z) dz.$$

Entonces, teniendo en cuenta estas estimaciones, vemos que para demostrar el resultado es suficiente mostrar que para todo  $\delta$ -tubo  $T$  con dirección  $e_x$ , existe un tubo  $T'$  de longitud  $1/\delta$  y radio  $C\delta$  con  $\frac{x}{\delta}$  en su interior y tal que

$$\int_T f(y) dy \lesssim \int_{T'} f(y) dy.$$

Como  $\text{supp } f \subset B(0, 1)$ , por el Lema 1.4.3, sabemos que existe un tubo  $T'$  que cumple  $(T \cap \text{supp } f) \subset T'$ , así que se cumplirá la desigualdad. De esta manera, tenemos

$$\mathcal{K}_\delta f(e_x) \approx \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\delta^{n-1}} \int_{T_{e_x}^\delta(a)} f(y) dy \leq \sup_{\frac{x}{\delta} \in T'} \frac{1}{\delta^{n-1}} \int_{T'} f(z) dz \approx \delta^{-1} \mathcal{N}_{C\delta^2} f_\delta(x)$$

con lo que queda demostrado el lema.  $\square$

Estos dos lemas anteriores se usan para demostrar que la conjetura maximal de Nikodym implica la conjetura maximal de Keakeya. A partir de ahora vamos a ver los lemas necesarios para demostrar la otra implicación, que será más complicada, y algunos de los lemas necesarios serán muy técnicos.

Como sabemos, para demostrar estimaciones de la función maximal, es suficiente probarlo para el caso en el que  $f$  tiene soporte en la bola  $B(0, 1)$ . Por eso, vamos a suponer siempre que  $\text{supp } f \subset B(0, 1)$ . Entonces, como los tubos  $T$  en la definición



del operador de Nikodym tienen longitud 1, si  $x \in T \setminus B(0, 2)$ , se cumple  $T \cap B(0, 1) = \emptyset$ . Por lo tanto,  $\mathcal{N}_\delta f(x) = 0$ . En consecuencia,  $\text{supp } \mathcal{N}_\delta f \subset B(0, 2)$ .

Como hemos dicho, es suficiente probar  $N(n, p, \varepsilon)$  para funciones con soporte en  $B(0, 1)$ , pero en los próximos tres lemas, vamos a ver que podemos reducir más esta condición.

**Lema 1.4.5.** *Sean  $f \in L^p(B(0, 1))$  y  $0 < \delta < 1$ . Supongamos que fijamos  $x_n$  en la función  $\mathcal{N}_\delta f$ , y que tenemos una estimación de tipo Nikodym en una dimensión menos para  $x_n = 0$ ; es decir, supongamos que se tiene*

$$\|\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, x_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.13)$$

con  $x_n = 0$ . Entonces, se cumple

$$\|\mathcal{N}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.14)$$

*Demostración.* Supongamos que se cumple la estimación (1.13), para todo  $|x_n| \leq 2$  (dejando fija la variable  $x_n$ ). Entonces, como  $\text{supp } \mathcal{N}_\delta f \subset B(0, 2)$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{B(0,2)} \mathcal{N}_\delta f(x)^p dx = \int_{-2}^2 \int_{B^{n-1}(0,2)} \mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, x_n)^p d\underline{x} dx_n \\ &= \int_{-2}^2 \|\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, x_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p dx_n \lesssim \int_{-2}^2 \delta^{-n+p-\varepsilon p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p dx_n \\ &\approx \delta^{-n+p-\varepsilon p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p. \end{aligned}$$

En consecuencia, si tenemos (1.13) para todo  $|x_n| \leq 2$ , entonces se tiene la estimación (1.14). Nuestro objetivo es reducir esto al caso  $x_n = 0$ . Suponemos que se cumple

$$\|\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Entonces para todo  $|a| \leq 2$ , por la Definición 1.4.2 de  $\mathcal{N}_\delta$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, a)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \sup_{(\underline{x}, a) \in T} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T)} \int_T f(y) dy \right)^p d\underline{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \sup_{(\underline{x}, a) \in T} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T)} \int_{T-(\underline{0}, a)} f(z + (\underline{0}, a)) dz \right)^p d\underline{x} \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variable  $z = y - (\underline{0}, a)$ . Sea  $f_a(z) = f(z + (\underline{0}, a))$ , y así, como  $f$  tiene soporte en  $B(0, 1)$  y  $|a| \leq 2$  se tiene que  $f_a$  tiene soporte en  $B(0, 3)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, a)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \sup_{(\underline{x}, a) \in T} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T)} \int_{T-(\underline{0}, a)} f_a(z) dz \right)^p d\underline{x} \\ &= \|\mathcal{N}_\delta f_a(\underline{x}, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p \lesssim \delta^{-n+p-\varepsilon p} \|f_a\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \\ &= \delta^{-n+p-\varepsilon p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p, \end{aligned}$$

lo que prueba el lema.  $\square$

En el siguiente lema, vamos a probar que es suficiente tomar funciones con soporte en  $\{0 < x_n \leq 1\}$ . Esto se consigue bastante fácilmente usando una descomposición adecuada de la función.

**Lema 1.4.6.** *Supongamos que se cumple*

$$\|\mathcal{N}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.15)$$

para toda función  $f$  con soporte en  $B(0, 1) \cap \{0 < x_n \leq 1\}$ . Entonces, se cumple (1.15) para toda función con soporte en  $B(0, 1)$ , y en consecuencia, se tiene  $N(n, p, \varepsilon)$  para todo  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* Sea  $f$  una función con  $\text{supp } f \subset B(0, 1)$ , y definimos

$$f_+(x) = f(x)\chi_{(0,1]}(x_n), \quad y \quad f_-(x) = f(x, -x_n)\chi_{(0,1]}(-x_n).$$

Así, tenemos que  $f_+$  y  $f_-$  tienen soporte en  $0 < x_n \leq 1$  y se cumple  $f = f_+ + f_-$  en casi todo punto. Entonces, se tiene  $\mathcal{N}_\delta f(x) \leq \mathcal{N}_\delta f_+(x) + \mathcal{N}_\delta f_-(x)$ , y en consecuencia,

$$\|\mathcal{N}_\delta f\|_p^p \leq \|\mathcal{N}_\delta f_+ + \mathcal{N}_\delta f_-\|_p^p \leq (\|\mathcal{N}_\delta f_+\|_p + \|\mathcal{N}_\delta f_-\|_p)^p$$

por la desigualdad triangular. Ahora, aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\delta f\|_p^p &\leq \left[ (\|\mathcal{N}_\delta f_+\|_p^p + \|\mathcal{N}_\delta f_-\|_p^p)^{\frac{1}{p'}} (1^{p'} + 1^{p'})^{\frac{1}{p'}} \right]^p = 2^{\frac{p}{p'}} (\|\mathcal{N}_\delta f_+\|_p^p + \|\mathcal{N}_\delta f_-\|_p^p) \\ &\lesssim \delta^{-n+p-\varepsilon p} (\|f_+\|_p^p + \|f_-\|_p^p) = \delta^{-n+p-\varepsilon p} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Aquí hemos usado que  $f_+$  y  $f_-$  tienen soporte en  $0 < x_n \leq 1$ , y que por hipótesis se cumple la estimación (1.15) para  $f_+$  y  $f_-$ .

Así queda demostrado el lema.  $\square$

En el siguiente lema vamos a reducir el soporte de  $f$  a la región  $\{1/2 < x_n \leq 1\}$ . Para ello, vamos a utilizar una descomposición diádica del intervalo  $(0, 1]$ .

**Lema 1.4.7.** *Suponemos que se cumple*

$$\|\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para toda función  $f$  con soporte en  $B(0, 1) \cap \{1/2 < x_n \leq 1\}$ . Entonces, se cumple  $N(n, p, \varepsilon)$ .

*Demostración.* Por el Lema 1.4.6, sabemos que si probamos que se cumple la desigualdad (1.15) para las funciones  $f$  que tienen soporte en  $B(0, 1) \cap \{0 < x_n \leq 1\}$ , entonces se cumplirá  $N(n, p, \varepsilon)$ . Así que, sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\text{supp } f \subset (B(0, 1) \cap \{0 < x_n \leq 1\})$  y probemos que se tiene (1.15).

Escribimos  $(0, 1] = \bigcup_{k=0}^{\infty} (2^{-k-1}, 2^{-k}]$  y definimos

$$f_k(x) = f(x)\chi_{(2^{-k-1}, 2^{-k}]}(x_n),$$

de manera que  $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ . Mediante un cambio de variable, observamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx = \int_{x_n \in (1/2, 1]} f(\underline{x}, 2^{-k} x_n) 2^{-k} dx$$

para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ . En consecuencia, si para todo  $k$  definimos,

$$\tilde{f}_k(\underline{x}, x_n) = f(\underline{x}, 2^{-k} x_n) \chi_{(1/2, 1]}(x_n),$$

entonces,  $\tilde{f}_k$  tiene soporte en  $1/2 < x_n \leq 1$  para todo  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx = 2^{-k} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_k(x) dx.$$

Ahora, por la desigualdad triangular y por la hipótesis, se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{N}_\delta f_k(\underline{x}, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \|\mathcal{N}_\delta \tilde{f}_k(\underline{x}, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &\leq \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \|\tilde{f}_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(1-1/p)} \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Y aplicando la desigualdad de Hölder a esta última suma,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} &\leq \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \right)^{1/p'} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p} \\ &= \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} 2^{1/p'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \approx \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Por último, aplicando el Lema 1.4.5 vemos que se cumple

$$\|\mathcal{N}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

que es la acotación que queríamos probar.  $\square$

En los próximos lemas vamos a utilizar la transformación  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde

$$\phi(\underline{x}, x_n) = \left( \frac{\underline{x}}{x_n}, \frac{1}{x_n} \right).$$

Así, se tiene que  $\phi^{-1} = \phi$  (esto se ve claramente porque  $\phi^2 = Id$ ). Esta transformación nos servirá para hacer un cambio de variable que nos relacione los dos operadores de *Keakeya* y *Nikodym*. Después de hacer el cambio de variable a un tubo utilizado en la definición del operador de *Nikodym*, vamos a querer encontrar un tubo en el que esté contenido la transformación por  $\phi$  del primer tubo, de forma que el segundo tubo nos dé el operador de *Keakeya*. Veremos esto mejor en el Lema 1.4.9, pero primero necesitamos la relación entre los tubos que nos da el siguiente lema.

**Lema 1.4.8.** Sean  $\underline{x} \in B^{n-1}(0, 2)$  y  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Sea  $T_e^\delta$  un  $\delta$ -tubo tal que  $(\underline{x}, 0) \in T_e^\delta$ . Entonces, existe una constante  $C$  independiente de  $\underline{x}$ ,  $\delta$  y  $e$ , tal que

$$\phi\left(T_e^\delta \cap \{1/2 < x_n \leq 1\}\right) \subset CT_{e_x}^\delta\left(\frac{e}{e_n}, 0\right),$$

donde  $e_x = \frac{(\underline{x}, 1)}{|(\underline{x}, 1)|}$ .

*Demostración.* Suponemos  $T_e^\delta \cap \{1/2 < x_n \leq 1\} \neq \emptyset$ . Sea  $y \in T_e^\delta \cap \{1/2 < x_n \leq 1\}$  y vamos a ver que  $\phi(y) \in CT_{e_x}^\delta$ , para cierta constante  $C$ . Primero, tenemos que los puntos  $(\underline{x}, 0)$  e  $y$  están en  $T_e^\delta$ . Tomamos  $I_y$  un segmento paralelo a  $e$  que contenga a  $y$ . Este segmento  $I_y$ , tiene que intersectarse con el hiperplano  $\{x_n = 0\}$  en algún punto cercano a  $(\underline{x}, 0)$ , porque este último punto también está en el tubo  $T_e^\delta$ . Más concretamente, como  $T_e^\delta$  es un  $\delta$ -tubo, el punto en el que se intersecan  $I_y$  y el hiperplano  $\{x_n = 0\}$ , tiene que estar en un  $2\delta$ -entorno de  $(\underline{x}, 0)$ . De esta manera, tenemos una parametrización de  $y$  de la forma

$$y = (\underline{x} + \underline{a}, 0) + t_y(e, e_n) = (\underline{x} + \underline{a} + t_y e, t_y e_n) \quad (1.16)$$

para algún  $\underline{a} \in B^{n-1}(0, 2\delta)$ , donde  $e = (e, e_n)$  y  $-1 \lesssim t_y \lesssim 1$ . Podemos asumir que  $t_y$  es positiva cambiando  $t_y$  por  $-t_y$  en la parametrización. Por otro lado, también tenemos que  $y \in \{1/2 < x_n \leq 1\}$ , y veamos que esto nos da una mayor restricción para el valor  $t_y$ . Como  $1/2 < y_n = t_y e_n \leq 1$ , se tiene

$$\frac{1}{2e_n} < t_y \leq \frac{1}{e_n}. \quad (1.17)$$

Además, todavía podemos mejorarlo. Como  $T_e^\delta \cap \{1/2 < x_n \leq 1\} \neq \emptyset$ ,  $e$  no puede estar lejos del vertical  $(0, \dots, 0, 1)$ ; de hecho, tenemos  $|e_n| \geq y_n > 1/2$ , por lo que deducimos

$$\frac{1}{2} < t_y < 2,$$

ya que trivialmente  $|e_n| \leq 1$ . Así tenemos que  $t_y \approx 1$ .

Ahora definimos

$$r_{\phi(y)} = \frac{|(\underline{x}, 1)|}{t_y e_n}.$$

Como  $\underline{x} \in B^{n-1}(0, 2)$ , se tiene  $1 \leq |(\underline{x}, 1)| \leq 3$ . Combinando esto con la estimación (1.17), vemos que  $1 \leq r_{\phi(y)} < 6$ , así que  $r_{\phi(y)} \approx 1$ . Usando la parametrización (1.16) de  $y$ , tenemos

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \frac{1}{t_y e_n}(\underline{x} + \underline{a} + t_y e, 1) = \left(\frac{e}{e_n}, 0\right) + \frac{1}{t_y e_n}(\underline{a}, 0) + \frac{1}{t_y e_n}(\underline{x}, 1) \\ &= \left(\frac{e}{e_n}, 0\right) + r_{\phi(y)} \frac{(\underline{a}, 0)}{|(\underline{x}, 1)|} + r_{\phi(y)} \frac{(\underline{x}, 1)}{|(\underline{x}, 1)|}. \end{aligned}$$

Vamos a ver que este punto está contenido en el tubo  $CT_{e_x}^\delta(\frac{e}{e_n}, 0)$ , para alguna constante  $C$  independiente de los parámetros  $\underline{x}$ ,  $\delta$  y  $e$ . Como  $|a_j| \leq \delta < 1$  para  $j = 1, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned} \left| \left[ \phi(y) - \left( \frac{e}{e_n}, 0 \right) \right] \cdot \frac{(\underline{x}, 1)}{|(\underline{x}, 1)|} \right| &= \frac{r_{\phi(y)}}{|(\underline{x}, 1)|^2} |(\underline{x} + \underline{a}, 1) \cdot (\underline{x}, 1)| \\ &\leq r_{\phi(y)} |(\underline{x} + \underline{a}, 1)| |(\underline{x}, 1)| < C_1. \end{aligned}$$

Ahora, sea  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  ortogonal a  $e_x$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \left[ \phi(y) - \left( \frac{e}{e_n}, 0 \right) \right] \cdot v \right| &= \frac{r_{\phi(y)}}{|(\underline{x}, 1)|} |(\underline{a}, 0) \cdot v| \leq r_{\phi(y)} \sum_{j=1}^{n-1} |a_j| |v_j| \\ &\leq 2r_{\phi(y)}(n-1)\delta \leq C_2\delta. \end{aligned}$$

Así, tomando  $C = \max\{C_1, C_2\}$ , tenemos  $\phi(y) \in CT_{e_x}^\delta(\frac{e}{e_n}, 0)$ , como queríamos probar.  $\square$

Como hemos anunciado anteriormente, ahora vamos a utilizar la transformación  $\phi$  y el anterior lema para obtener una desigualdad puntual que relacione los operadores de Nikodym y Kakeya. Este es un lema importante que nos acerca al resultado que queremos.

**Lema 1.4.9.** *Para cualquier función  $f$  con soporte en  $B(0, 1) \cap \{1/2 < x_n \leq 1\}$ , se cumple*

$$\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, 0) \lesssim \mathcal{K}_\delta(f \circ \phi_C)(e_x), \quad (1.18)$$

donde  $e_x = \frac{(\underline{x}, 1)}{|(\underline{x}, 1)|}$ ,  $\phi_C(x) = \phi(2Cx)$ , y  $\phi(\underline{x}, x_n) = \left( \frac{x}{x_n}, \frac{1}{x_n} \right)$ .

*Demostración.* Fijamos  $\underline{x} \in B^{n-1}(0, 2)$ . Por la Definición 1.4.2 de  $\mathcal{N}_\delta$ , para cualquier función  $f$  con soporte en  $B(0, 1) \cap \{1/2 < x_n \leq 1\}$ , existe un  $\delta$ -tubo  $T$  con  $(\underline{x}, 0) \in T$ , y tal que

$$\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, 0) \leq \frac{2}{\mathcal{L}^n(T)} \int_T f(y) dy = \frac{2}{\mathcal{L}^n(T)} \int_{\phi^{-1}(T)} f(\phi(z)) |D_\phi(z)| dz.$$

Pero,  $|D_\phi(z)| = \frac{1}{(z_n)^{n+1}}$ , así que  $1 \leq |D_\phi(z)| < 2^{n+1}$ . Por otro lado, como  $\phi^{-1} = \phi$ , tenemos que

$$\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, 0) \leq \frac{2^{n+2}}{\mathcal{L}^n(T)} \int_{\phi(T)} f(\phi(z)) dz.$$

Ahora, aplicando el Lema 1.4.8 obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, 0) &\leq \frac{2^{n+2}}{\mathcal{L}^n(T)} \int_{CT_{e_x}^\delta(\frac{e}{e_n}, 0)} f(\phi(z)) dz \\ &\lesssim \frac{1}{\mathcal{L}^n(T)} \int_{T_{e_x}^\delta(\frac{e}{e_n}, 0)} f(\phi_C(z')) dz' \lesssim \mathcal{K}_\delta(f \circ \phi_C)(e_x), \end{aligned}$$

donde hemos hecho la sustitución  $z = 2Cz'$  en la segunda desigualdad.  $\square$

Por último, tenemos un lema técnico que relaciona la integral de Lebesgue con la integral de superficie.

**Lema 1.4.10.** Sean  $k > 0$  y  $F : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $F \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ . Entonces,

$$\int_{B^{n-1}(0,k)} F\left(\frac{(x,1)}{|(x,1)|}\right) dx \lesssim \int_{\mathbb{S}^{n-1}} F(e) d\sigma^{n-1}(e). \quad (1.19)$$

*Demostración.* Sea  $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$  donde  $y_i = \frac{x_i}{|(x,1)|}$  para  $i = 1, \dots, n-1$ . Observar que  $\frac{1}{|(x,1)|^2} = 1 - |y|^2$  y que por lo tanto,  $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{1-|y|^2}}$ . Para cualquier  $i = 1, \dots, n-1$ , tenemos

$$\frac{\partial(\sqrt{1-|y|^2})}{\partial y_i} = \frac{-y_i}{\sqrt{1-|y|^2}}; \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}}\right)}{\partial y_i} = \frac{y_i}{(1-|y|^2)^{3/2}}.$$

Entonces, para  $i, j = 1, \dots, n-1$  con  $i \neq j$  tenemos

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial\left(\frac{y_i}{\sqrt{1-|y|^2}}\right)}{\partial y_j} = \frac{y_i y_j}{(1-|y|^2)^{3/2}},$$

y para  $i = 1, \dots, n-1$ ,

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_i} = \frac{\sqrt{1-|y|^2} + y_i^2 \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}}}{1-|y|^2} = \frac{1-|y|^2 + y_i^2}{(1-|y|^2)^{3/2}}.$$

Entonces, como  $|y| \lesssim \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \lesssim 1$ , el jacobiano está acotada por

$$|J| \lesssim \frac{1}{(1-|y|^2)^{\frac{3(n-1)}{2}}}.$$

En consecuencia,

$$\int_{B^{n-1}(0,k)} F\left(\frac{(x,1)}{|(x,1)|}\right) dx \lesssim \int_{B^{n-1}\left(0, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)} \frac{F(y, \sqrt{1-|y|^2})}{(1-|y|^2)^{\frac{3(n-1)}{2}}} dy. \quad (1.20)$$

Ahora, parametrizando  $\mathbb{S}^{n-1}$  como  $\{(y, \pm\sqrt{1-|y|^2}) : y \in B^{n-1}(0,1)\}$ ,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} F(e) d\sigma^{n-1}(e) = \int_{B^{n-1}(0,1)} F(y, \sqrt{1-|y|^2}) \frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}}. \quad (1.21)$$

Por último, si tomamos  $y \in B^{n-1}\left(0, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ , es decir,  $|y| \leq \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ , tenemos  $(1-|y|^2)^{-\frac{3(n-1)}{2}} \leq (1+k^2)^{\frac{3(n-1)}{2}}$ . Como por otro lado tenemos  $1 \leq (1-|y|^2)^{-\frac{1}{2}}$ , deducimos que  $(1-|y|^2)^{-\frac{3(n-1)}{2}} \lesssim (1-|y|^2)^{-\frac{1}{2}}$  para todo  $y \in B^{n-1}\left(0, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ ,

donde la constante depende de  $n$  y  $k$ ; precisamente, la constante es  $(1+k^2)^{\frac{3(n-1)}{2}}$ . Así, aplicando esto junto con (1.20) y (1.21),

$$\begin{aligned} \int_{B^{n-1}(0,k)} F\left(\frac{(x,1)}{|(x,1)|}\right) dx &\lesssim \int_{B^{n-1}\left(0,\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)} \frac{F(y, \sqrt{1-|y|^2})}{(1-|y|^2)^{\frac{3(n-1)}{2}}} dy \\ &\lesssim \int_{B^{n-1}\left(0,\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)} \frac{F(y, \sqrt{1-|y|^2})}{(1-|y|^2)^{\frac{1}{2}}} dy \\ &\lesssim \int_{B^{n-1}(0,1)} F(y, \sqrt{1-|y|^2}) \frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} F(e) d\sigma^{n-1}(e). \end{aligned}$$

□

Con todo esto, ya estamos preparados para demostrar el teorema que demuestra la equivalencia de las dos conjeturas maximales.

**Teorema 1.4.11.** *Se cumplen las siguientes implicaciones:*

$$K(n, p, \varepsilon) \Rightarrow N(n, p, \varepsilon) \Rightarrow K(n, p, 2\varepsilon)$$

*Demostración.* Primero, vamos a demostrar la segunda implicación, es decir, sean  $p \leq n$  y  $\varepsilon > 0$ , y supongamos que para todo  $0 < \delta < 1$  y  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  se cumple

$$\|\mathcal{N}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.22)$$

Entonces tenemos que probar que

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-2\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.23)$$

Tomamos la corona circular  $|x| \approx 1$ , y calculamos la norma  $L^p(|x| \approx 1)$  de  $\mathcal{K}_\delta f(e_x)$ , donde  $e_x = \frac{x}{|x|}$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_\delta f(e_x)\|_{L^p(|x| \approx 1)}^p &= \int_{|x| \approx 1} |\mathcal{K}_\delta f(e_x)|^p dx = \int_{r \approx 1} r^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{K}_\delta f(e)^p d\sigma^{n-1}(e) dr \\ &\approx \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{K}_\delta f(e)^p d\sigma^{n-1}(e) = \|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}^p, \end{aligned}$$

donde hemos hecho un cambio a coordenadas polares.

Por el Lema 1.4.4, tenemos  $\mathcal{K}_\delta f(e_x) \lesssim \delta^{-1} \mathcal{N}_{C\delta^2} f_\delta(x)$ . Calculando la norma  $L^p$  en  $|x| \approx 1$ , se tiene

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \approx \|\mathcal{K}_\delta f(e_x)\|_{L^p(|x| \approx 1)} \lesssim \delta^{-1} \|\mathcal{N}_{C\delta^2} f_\delta\|_{L^p(|x| \approx 1)} \leq \delta^{-1} \|\mathcal{N}_{C\delta^2} f_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Ahora, por la hipótesis (1.22),

$$\delta^{-1} \|\mathcal{N}_{C\delta^2} f_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \delta^{-1} (\delta^2)^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Mediante un sencillo cambio de variables vemos que  $\|f_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \delta^{\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  y simplificando en el exponente, se tiene

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{-2\frac{n}{p}+1-2\varepsilon+\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \delta^{-\frac{n}{p}+1-2\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

que es la estimación (1.23) que queríamos probar.

Ahora, vamos a demostrar la primera implicación. Por lo tanto, ahora nuestra hipótesis es que se tiene

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.24)$$

para todo  $0 < \delta < 1$  y  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , y vamos a probar que entonces

$$\|\mathcal{N}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Partiendo de la desigualdad puntual (1.18), demostrada en el Lema 1.4.9, y tomando la norma  $L^p(B^{n-1}(0, 2))$  obtenemos para  $e_x = \frac{(\underline{x}, 1)}{[(\underline{x}, 1)]}$ ,

$$\|\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, 0)\|_{L^p(B^{n-1}(0, 2))} \lesssim \|\mathcal{K}_\delta(f \circ \phi_C)(e_x)\|_{L^p(B^{n-1}(0, 2))}.$$

Ahora, por el Lema 1.4.10, se tiene

$$\|\mathcal{K}_\delta(f \circ \phi_C)(e_x)\|_{L^p(B^{n-1}(0, 2))} \lesssim \|\mathcal{K}_\delta(f \circ \phi_C)\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

Por otro lado, por la hipótesis (1.24), se tiene

$$\|\mathcal{K}_\delta(f \circ \phi_C)\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f \circ \phi_C\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Por último, observando que  $\|f \circ \phi_C\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \approx 2^{\frac{n+1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ , llegamos a

$$\|\mathcal{N}_\delta f(\underline{x}, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

verificando las hipótesis del Lema 1.4.5, con lo que se cumple  $N(n, p, \varepsilon)$ , como queríamos probar.  $\square$

Para  $p = n$ , si tenemos  $K(n, n, \varepsilon)$  para todo  $\varepsilon > 0$  entonces se cumple la conjetura maximal de Kakeya (Conjetura 2) y si tenemos  $N(n, n, \varepsilon)$  entonces se cumple la conjetura maximal de Nikodym (Conjetura 3). Entonces, como consecuencia del anterior teorema, tenemos que la conjetura maximal de Kakeya y la conjetura maximal de Nikodym son equivalentes en el sentido en que una se cumple si y solo si se cumple la otra.



## Capítulo 2

# Resultados conocidos

En este capítulo vamos a estudiar los avances que se han hecho en la conjetura maximal de Kakeya. En la primera sección veremos que la conjetura está resuelta y es cierta en el caso  $n = 2$ . En la segunda sección veremos dos resultados parciales de la conjetura cuando  $n \geq 3$ . Este es un problema complicado, todavía sin resolver, y aunque a día de hoy existen muchos resultados parciales, algunos de ellos son de una gran complejidad. Por esta razón, muchos de los resultados parciales no se contemplarán en este trabajo, y solo vamos a estudiar dos resultados parciales: el de Bourgain y el de Wolff.

En este capítulo, usamos distintas referencias según la sección. Para la primera, hemos seguido el libro de Mattila [19]. Para la segunda sección en la que vemos los dos resultados parciales hemos seguido las demostraciones originales; la primera de Bourgain [2], y la segunda de Wolff [28]. Estos no son resultados fáciles, y para terminar de completar las demostraciones hemos utilizado los siguientes trabajos: el libro de Sogge [22]; las notas de Tao [24], Wolff [29] y Green [12]; el artículo de Katz y Tao [15]; el trabajo de Rela [20] y el de Kroc [18].

### 2.1. Caso $n = 2$

El resultado principal de esta sección es que la conjetura es cierta en el plano. El primero en demostrar esto fue Córdoba en [4]. Sin embargo, aquí vamos a seguir otra prueba, que utiliza herramientas del análisis de Fourier, y que permite generalizar el resultado a dimensiones superiores. El primero que propuso esta generalización fue Bourgain en [2]. Nosotros vamos a seguir la versión que aparece en el libro de Mattila [19], que se basa en la de Bourgain.

Para demostrar la Conjetura maximal de Kakeya 2 cuando  $n = 2$ , tenemos que calcular estimaciones  $L^2(\mathbb{S}^1)$ . Esta norma tiene unas propiedades que hacen que sea posible resolver la conjetura de una manera más fácil en este caso. Aunque el resultado importante sea el de  $n = 2$ , nos parece interesante ver con que facilidad puede generalizarse a dimensiones superiores esta estimación de la norma  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  del plano a cualquier  $n \geq 3$ . Por eso, y aunque en la siguiente sección estudiaremos

más en profundidad el caso  $n \geq 3$ , aquí hemos decidido demostrar no solo el caso  $n = 2$ , sino también el caso más general.

Primero, necesitamos el siguiente lema geométrico.

**Lema 2.1.1.** *Sean  $C \geq 1$  una constante y  $0 < \delta < 1$ . Entonces, fijado  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , se tiene*

$$\sigma^{n-1} \left( \left\{ e \in \mathbb{S}^{n-1} : \xi \in CT_e^{1/\delta}(0) \right\} \right) \lesssim \frac{1}{1 + |\xi|}.$$

Observar que en este caso el radio es más grande que la longitud.

*Demostración.* Para la demostración vamos a distinguir tres casos.

Primero, supongamos que  $|\xi| \leq 10C$ . Así,  $\frac{1}{1+10C} \leq \frac{1}{1+|\xi|}$  y se cumple trivialmente

$$\sigma^{n-1} \left( \left\{ e \in \mathbb{S}^{n-1} : \xi \in CT_e^{1/\delta}(0) \right\} \right) \leq \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \lesssim \frac{1}{1+10C} \leq \frac{1}{1+|\xi|}.$$

Ahora, si  $|\xi| > C/\delta$ , entonces  $\xi \notin CT_e^{1/\delta}(0)$  para todo  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ , y por lo tanto la estimación es trivial.

Por último, estudiemos el caso  $10C < |\xi| \leq C/\delta$ . Por definición,

$$CT_e^{1/\delta}(0) = \{ \eta \in \mathbb{R}^n : |\eta \cdot e| \leq C, |\eta \cdot \nu| \leq C/\delta, \forall \nu \perp e \}.$$

Podemos rotar el sistema para que  $\xi$  esté en el último eje principal de  $\mathbb{R}^n$ , es decir podemos suponer que  $\xi = (0, \dots, 0, \xi_n)$ . Ahora, observamos que

$$\begin{aligned} \left\{ e \in \mathbb{S}^{n-1} : \xi \in CT_e^{1/\delta}(0) \right\} &= \left\{ e \in \mathbb{S}^{n-1} : |\xi \cdot e| \leq C, |\xi \cdot \nu| \leq C/\delta, \forall \nu \perp e \right\} \\ &= \left\{ e \in \mathbb{S}^{n-1} : \left| \frac{\xi}{|\xi|} \cdot e \right| \leq \frac{C}{|\xi|}, \left| \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \nu \right| \leq \frac{C}{\delta|\xi|}, \forall \nu \perp e \right\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ahora, por un lado, se tiene que para todo  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$  y todo  $\nu \perp e$ ,

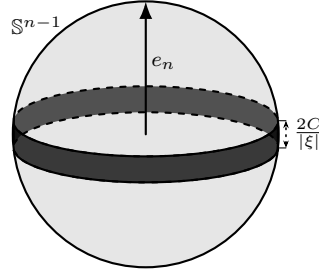
$$\left| \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \nu \right| \leq \left| \frac{\xi}{|\xi|} \right| |\nu| = 1 \leq \frac{C}{\delta|\xi|},$$

ya que  $|\xi| \leq C/\delta$ . Por lo tanto la segunda desigualdad en (2.1) se cumple siempre. Por otro lado, como estamos suponiendo que  $\xi = (0, \dots, 0, \xi_n)$ , se cumple  $\left| \frac{\xi}{|\xi|} \cdot e \right| = |e_n|$  donde  $e = (e_1, \dots, e_n)$ . Aplicando esto a (2.1),

$$\left\{ e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{S}^{n-1} : \xi \in CT_e^{1/\delta}(0) \right\} = \left\{ e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{S}^{n-1} : |e_n| \leq \frac{C}{|\xi|} \right\}.$$

Este va a ser el subconjunto de la esfera de las direcciones que están más alejadas de la dirección  $(0, \dots, 0, 1)$ . Es decir, las direcciones que forman este subconjunto, son las que casi son ortogonales al vector  $(0, \dots, 0, 1)$ . Además, este subconjunto va a tener un espesor de  $\frac{2C}{|\xi|} \approx \frac{1}{|\xi|}$ . Podemos ver este conjunto representado en la parte más sombreada para  $n = 3$  la figura 2.1.

Figura 2.1: Vectores que son casi ortogonales a  $e_n$  en  $\mathbb{R}^3$



Entonces, podemos acotar la medida de este conjunto por

$$\sigma^{n-1} \left( \left\{ e \in \mathbb{S}^{n-1} : \xi \in CT_e^{1/\delta}(0) \right\} \right) \lesssim \frac{1}{|\xi|} \lesssim \frac{1}{1+|\xi|}.$$

La última desigualdad es porque  $|\xi| \gtrsim 1$ , de donde se deduce  $\frac{1}{|\xi|} \lesssim \frac{2}{1+|\xi|}$ . Esto demuestra el lema.  $\square$

Ya estamos preparados para demostrar el resultado más importante de la sección. En el siguiente teorema podemos ver dos estimaciones: una para  $n = 2$  y otra para  $n \geq 3$ . Aunque a nosotros nos interesa principalmente el primer resultado, como vamos a ver la prueba es prácticamente igual en los dos casos.

**Teorema 2.1.2.** Sean  $0 < \delta < 1$  y  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . Entonces,

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)} \lesssim \sqrt{\log(1/\delta)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

para cierta constante absoluta  $C$ .

En  $\mathbb{R}^n$ , para  $n \geq 3$ , tenemos que para todo  $0 < \delta < 1$  y toda  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{-(n-2)/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

donde el exponente  $-(n-2)/2$  es el mejor posible.

*Demostración.* Sea  $n \geq 2$ . Asumimos que  $f$  es no negativa y que tiene soporte en  $B(0, 1)$ . Haciendo un cambio de variable y usando la simetría de  $T_e^\delta(0)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\delta f(e) &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_e^\delta(a))} \int_{T_e^\delta(a)} f(x) dx \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\alpha(n-1)\delta^{n-1}} \int_{T_e^\delta(0)} f(a-x) dx = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \rho_\delta^e * f(a), \end{aligned}$$

donde

$$\rho_\delta^e = \frac{1}{\alpha(n-1)\delta^{n-1}} \chi_{T_e^\delta(0)}.$$

Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , donde  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  representa el espacio de las funciones de clase Schwartz, tal que  $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset [-1, 1]$ ,  $\varphi \geq 0$  y  $\varphi(x) \geq 1$  cuando  $|x| \leq 1$ . Definimos,

$$\psi(x) = \delta^{-(n-1)} \varphi(x_1) \varphi(|\bar{x}|/\delta),$$

donde representamos  $x = (x_1, \bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ , con  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Entonces, por las definiciones de la transformada de Fourier y de  $\psi$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(\xi_1, \bar{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \delta^{-(n-1)} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1) \varphi(|\bar{x}|/\delta) e^{-2\pi i (\xi_1 x_1 + \bar{\xi} \cdot \bar{x})} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1) e^{-2\pi i \xi_1 x_1} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \delta^{-(n-1)} \varphi(|\bar{x}|/\delta) e^{-2\pi i \bar{\xi} \cdot \bar{x}} d\bar{x} = \widehat{\varphi}(\xi_1) \widehat{\varphi}(\delta|\bar{\xi}|), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado propiedades de la transformada de Fourier (ver Proposición A.2.2). Por lo tanto,

$$\text{supp } \widehat{\psi} \subset [-1, 1] \times B^{n-1}(0, 1/\delta). \quad (2.2)$$

Como  $\varphi(x_1) \geq 1$  y  $\varphi(|\bar{x}|/\delta) \geq 1$  cuando  $|x_1| \leq 1$  y  $|\bar{x}| \leq \delta$ , tenemos  $\rho_\delta^{e_1} \leq \psi$ , con  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , y entonces,

$$\mathcal{K}_\delta f(e_1) \leq \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \psi * f(a).$$

Para  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ , sea  $g_e$  una rotación tal que  $g_e(e_1) = e$ . Así,  $g_e(T_{e_1}^\delta(0)) = T_e^\delta(0)$ , y definiendo  $\psi_e = \psi \circ g_e$ , se tiene

$$\mathcal{K}_\delta f(e) \leq \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \psi_e * f(a).$$

Como  $f$  tiene soporte compacto,  $\psi_e * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces, por la formula de inversión y la desigualdad de Hölder, de la anterior desigualdad se sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\delta f(e) &\leq \|\psi_e * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\widehat{\psi_e * f}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\psi_e}(\xi)| |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\psi_e}(\xi)| |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|) d\xi \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{\psi_e}(\xi)|}{1 + |\xi|} d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como  $\widehat{\psi_e}(\xi) = \widehat{\psi \circ g_e}(\xi) = \widehat{\psi}(g_e(\xi))$ , obtenemos de (2.2)

$$\text{supp } \widehat{\psi_e} \subset C_e = g_e^{-1}([-1, 1] \times B^{n-1}(0, 1/\delta)).$$

Ahora distinguiamos dos casos:

Suponemos primero que  $n = 2$ . Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{\psi_e}(\xi)|}{1 + |\xi|} d\xi \lesssim \int_{C_e} \frac{1}{1 + |\xi|} d\xi \approx \int_{-1/\delta}^{1/\delta} \frac{1}{1 + |t|} dt = 2 \log(1 + 1/\delta) \approx \log(1/\delta).$$

y escribimos  $K_2 = \log(1/\delta)$ .

Ahora, si  $n \geq 3$ , tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{\psi}_e(\xi)|}{1+|\xi|} d\xi \lesssim \int_{C_e} \frac{1}{1+|\xi|} d\xi = \int_{[-1,1] \times B^{n-1}(0,1/\delta)} \frac{1}{1+|\xi|} d\xi,$$

donde en la segunda igualdad hemos hecho una rotación. Entonces, haciendo un cambio a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{\psi}_e(\xi)|}{1+|\xi|} d\xi &\lesssim \int_{|\xi_1| \leq 1, |\bar{\xi}| \leq 1/\delta} \frac{1}{1+|\xi|} d\xi_1 d\bar{\xi} \lesssim \int_{|\bar{\xi}| \leq 1/\delta} \frac{1}{1+|\xi|} d\bar{\xi} \\ &\lesssim \int_{\mathbb{S}^{n-2}} \int_0^{1/\delta} \frac{r^{n-2}}{r} dr d\sigma^{n-2}(e) \approx \int_0^{1/\delta} r^{n-3} dr \approx \delta^{-(n-2)}. \end{aligned}$$

Así que esta vez escribimos  $K_n = \delta^{-(n-2)}$ , para  $n \geq 3$ .

Volviendo al caso general, teniendo en cuenta estas últimas estimaciones, por la ecuación (2.3),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}^2 &\lesssim K_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\psi}_e(\xi)| |\widehat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|) d\xi d\sigma^{n-1}(e) \\ &= K_n \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\widehat{\psi}_e(\xi)| d\sigma^{n-1}(e) \right) |\widehat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|) d\xi. \end{aligned}$$

Observamos que  $C_e$  es un tubo centrado en el origen, con dirección  $e$ , longitud 2 y radio  $1/\delta$ . Aplicando el Lema 2.1.1, tenemos que para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\sigma^{n-1} \left( \left\{ e \in \mathbb{S}^{n-1} : \widehat{\psi}_e(\xi) \neq 0 \right\} \right) \leq \sigma^{n-1} \left( \left\{ e \in \mathbb{S}^{n-1} : \xi \in C_e \right\} \right) \lesssim \frac{1}{1+|\xi|},$$

donde en la primera desigualdad hemos usado que  $\text{supp } \widehat{\psi}_e \subset C_e$ . Consecuentemente,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\widehat{\psi}_e(\xi)| d\sigma^{n-1}(e) \lesssim \frac{1}{1+|\xi|}.$$

Finalmente,

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}^2 \lesssim K_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|\xi|} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|) d\xi = K_n \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

que es precisamente la acotación que queríamos probar tanto para  $n = 2$ , como para  $n \geq 3$ .

Finalmente, que la potencia  $\delta^{-(n-2)/2}$  no puede mejorarse se ve usando la función  $f = \chi_{B(0,\delta)}$ , igual que hicimos en el primer capítulo (ver (1.4)); donde precisamente obteníamos

$$\|\mathcal{K}_\delta \chi_{B(0,\delta)}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \approx \delta = \delta^{-\frac{n-2}{2}} \delta^{\frac{n}{2}} \approx \delta^{-\frac{n-2}{2}} \|\chi_{B(0,\delta)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

De la primera parte de este teorema se deduce que se cumple la conjetura maximal de Kakeya para  $n = 2$ , ya que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una constante  $C(\varepsilon)$  tal que

$$\log(1/\delta) \leq C(\varepsilon)\delta^{-\varepsilon}.$$

Por último, como consecuencia del anterior teorema, y del Teorema 1.3.2, tenemos el siguiente corolario,

**Corolario 2.1.3.** *Para  $n \geq 2$ , cualquier conjunto de Besicovitch en  $\mathbb{R}^n$  tiene dimensión de Hausdorff mayor o igual que 2. En particular, para  $n = 2$ , los conjuntos de Besicovitch tienen dimensión de Hausdorff igual a 2, y se cumple la conjetura de Kakeya.*

## 2.2. Resultados parciales para $n \geq 3$

En esta sección vamos a estudiar dos resultados parciales importantes de la Conjetura maximal de Kakeya para  $n \geq 3$ . En estos resultados vamos a buscar estimaciones de tipo restringido débiles (ver Definición A.1.5) de la forma

$$\sigma^{n-1}(\{e \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathcal{K}_\delta \chi_E(e) \geq \lambda\}) \lesssim \left( \delta^{-\frac{n}{p}+1} \frac{\mathcal{L}^n(E)^{1/p}}{\lambda} \right)^q, \quad (2.4)$$

para todo  $E \subset \mathbb{R}^n$ , y todo  $0 < \lambda \leq 1$ , donde  $q = (n-1)\frac{p}{p-1} = (n-1)p'$ . Viendo el enunciado de la Conjetura maximal de Kakeya 2, no resulta obvio por qué buscamos estas desigualdades. Por eso, antes de empezar a demostrar los resultados parciales, vamos a justificar la razón de buscar estas estimaciones. Para ello, vamos a utilizar la teoría de interpolación de operadores.

Primero, nos fijamos que no vamos a demostrar estimaciones de tipo fuerte como la enunciada en la conjetura, sino que vamos a buscar estimaciones de tipo restringido débil. Entonces, tenemos que demostrar que es suficiente con probar estas últimas.

Por otro lado, vemos que tomamos un  $p \leq n$ . Esto ya lo hemos anunciado en el primer capítulo. Podemos interpolar la estimación fuerte  $(n, n)$  de la conjetura con la estimación fuerte  $(1, \infty)$  de la proposición 1.2.2 para obtener estimaciones fuertes  $(p, q)$ . De esta manera, los resultados parciales tratan de buscar para que valores de  $p$  se cumple la estimación interpolada, y cuanto más cerca esté  $p$  de  $n$ , mejor es el resultado, y más nos acerca a la conjetura.

Pero esto tenemos que justificarlo, ya que no vamos a poder utilizar directamente los teoremas más clásicos y conocidos para hacer la interpolación: el teorema de Riesz-Thorin no podemos usarlo porque el operador de Kakeya es sublineal y no lineal; y el teorema de Marcinkiewitz podemos usarlo con el operador, pero no nos da la acotación que queremos. Así que vamos a tener que trabajar para interpolar las estimaciones. Lo bueno es que el mismo proceso nos sirve para demostrar que es suficiente probar estimaciones de tipo restringido débil.

Resumiendo, antes de empezar a demostrar los resultados parciales, tenemos que ver cómo usar la interpolación para justificar estos resultados, y además ver que es suficiente probar las versiones débiles.

Empezamos con un resultado sencillo. En los resultados parciales, nos vamos a centrar en tomar  $q = (n-1)p'$ . Sin embargo, cuando tratamos con estimaciones fuertes del operador de Kakeya, con esto es suficiente para que la estimación se cumpla para  $1 \leq q \leq (n-1)p'$ .

**Proposición 2.2.1.** *Si el operador de Kakeya es de tipo fuerte  $(p, q)$  con norma  $\leq A$ , entonces también es de tipo fuerte  $(p, r)$  con norma  $\leq A$  para todo  $1 \leq r < q$ .*

*Demostración.* Tomamos  $1 \leq r < q$ . Por hipótesis, suponemos que se cumple  $\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq A\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  y tenemos que probar la desigualdad  $\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^r(\mathbb{S}^{n-1})} \leq A\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ . Primero, escribimos

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^r(\mathbb{S}^{n-1})} = \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{K}_\delta f(e)^r d\sigma^{n-1}(e) \right)^{1/r} = \|(\mathcal{K}_\delta f)^r\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}^{1/r}.$$

Ahora, aplicamos la desigualdad de Hölder para obtener

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{K}_\delta f)^r\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}^{1/r} &\leq \|(\mathcal{K}_\delta f)^r\|_{L^{q/r}(\mathbb{S}^{n-1})}^{1/r} \|1\|_{L^{(q/r)'(\mathbb{S}^{n-1})}}^{1/r} \\ &= \left( \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\mathcal{K}_\delta f(e)^r)^{q/r} d\sigma^{n-1}(e) \right)^{r/q} \right)^{1/r} \left( \sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})^{\frac{1}{(q/r)'}} \right)^{1/r} \\ &\approx \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{K}_\delta f(e)^q d\sigma^{n-1}(e) \right)^{1/q} = \|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})}. \end{aligned}$$

Por último, aplicando la hipótesis,

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} = \|(\mathcal{K}_\delta f)^r\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}^{1/r} \lesssim \|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq A\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

tal y como queríamos.  $\square$

Ahora, vamos a ver una propiedad de interpolación que cumple el operador maximal de Kakeya. Esta nos será de utilidad en la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.2.** *Sean  $1 \leq p_0, p_1 < \infty$  y  $1 \leq q_0 < q_1 \leq \infty$ . Sea  $\theta \in (0, 1)$  y definimos  $p$  y  $q$  como*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \quad (2.5)$$

*Si el operador maximal de Kakeya es de tipo restringido débil  $(p_0, q_0)$  y  $(p_1, q_1)$ , con norma  $\leq A_0$  y  $\leq A_1$  respectivamente, entonces también lo es de tipo restringido fuerte  $(p, q)$  con norma  $\lesssim A_0^{1-\theta} A_1^\theta$ .*

*Demostración.* Como siempre, podemos suponer que el soporte de  $f$  está contenido en  $B(0, 1)$ . Por hipótesis, si escribimos  $\lambda_{\chi_E}(t) = \sigma^{n-1}(\{e \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathcal{K}_\delta \chi_E(e) \geq t\})$ , tenemos

$$\lambda_{\chi_E}(t) \leq \left( \frac{A_0 \mathcal{L}^n(E)^{1/p_0}}{t} \right)^{q_0}, \quad \lambda_{\chi_E}(t) \leq \left( \frac{A_1 \mathcal{L}^n(E)^{1/p_1}}{t} \right)^{q_1}, \quad (2.6)$$

para todo conjunto  $E \subset B(0, 1)$  y todo  $0 < t \leq 1$  (ver Definición A.1.5).

En estas últimas desigualdades (2.6) podemos suponer que la primera cota es menor o igual que la segunda, y así reordenando la desigualdad observamos que

$$t \leq \left( A_0^{-q_0} A_1^{q_1} \mathcal{L}^n(E)^{\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_0}{p_0}} \right)^{\frac{1}{q_1 - q_0}} = A$$

donde  $A$  la definimos así para facilitar la notación.

Ahora, tomamos  $p$  y  $q$  definidos como en (2.5). Tenemos que ver que  $\mathcal{K}_\delta f$  es un operador de tipo restringido fuerte  $(p, q)$ . Empezamos con la siguiente acotación utilizando la identidad (A.1) de la Proposición A.1.6,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_\delta \chi_E\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})}^q &= q \int_0^A t^{q-1} \lambda_{\chi_E}(t) dt + q \int_A^\infty t^{q-1} \lambda_{\chi_E}(t) dt \\ &\leq q \int_0^A t^{q-q_0-1} A_0^{q_0} \mathcal{L}^n(E)^{q_0/p_0} dt + q \int_A^\infty t^{q-q_1-1} \mathcal{L}^n(E)^{q_1/p_1} dt \\ &\lesssim A^{q-q_0} A_0^{q_0} \mathcal{L}^n(E)^{q_0/p_0} + A^{q-q_1} A_1^{q_1} \mathcal{L}^n(E)^{q_1/p_1}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde en la segunda línea hemos usado las acotaciones (2.6), y en la tercera hemos calculado las integrales teniendo en cuenta que por hipótesis  $q_0 < q < q_1$ .

Ahora queremos acotar los dos últimos sumandos. Solo vamos a hacer los detalles del primer término de la suma ya que el segundo se hace de manera análoga.

Observamos que por definición y haciendo las cuentas, tenemos que se tiene

$$\theta = \frac{q_1}{q} \left( \frac{q_0 - q}{q_0 - q_1} \right) = \frac{q_1}{q} \left( \frac{q - q_0}{q_1 - q_0} \right),$$

y

$$1 - \theta = \frac{q_0}{q} \left( \frac{q - q_1}{q_0 - q_1} \right) = \frac{q_0}{q} \left( \frac{q_1 - q}{q_1 - q_0} \right).$$

Ahora teniendo en cuenta esto en el primer sumando de (2.7), y sustituyendo el valor de  $A$ ,

$$\begin{aligned} A^{q-q_0} A_0^{q_0} \mathcal{L}^n(E)^{q_0/p_0} &= A_0^{q_0 \left( \frac{q_1 - q}{q_1 - q_0} \right)} A_1^{q_1 \left( \frac{q - q_0}{q_1 - q_0} \right)} \mathcal{L}^n(E)^{\frac{q_0}{p_0} \left( \frac{q_1 - q}{q_1 - q_0} \right) + \frac{q_1}{p_1} \left( \frac{q - q_0}{q_1 - q_0} \right)} \\ &= A_0^{(1-\theta)q} A_1^{\theta q} \mathcal{L}^n(E)^{q \left( \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_0} \right)} = A_0^{(1-\theta)q} A_1^{\theta q} \mathcal{L}^n(E)^{q/p}. \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo lo mismo con el segundo sumando, vemos que de (2.7) se sigue

$$\|\mathcal{K}_\delta \chi_E\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim A_0^{1-\theta} A_1^\theta \|\chi_E\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

lo que prueba que el operador es de tipo restringido fuerte  $(p, q)$  con la norma que queríamos.  $\square$



Ahora ya estamos preparados para demostrar la motivación de buscar resultados parciales de la forma (2.4). Por un lado, en la siguiente proposición vemos como queda la estimación interpolada de la función maximal de Keakeya. Por otro lado, en la observación posterior vemos que es suficiente probar la estimación de tipo restringido débil.

**Proposición 2.2.3.** *Si se cumple la conjetura maximal de Keakeya, entonces para todo  $1 \leq p \leq n$ , y todo  $1 \leq q \leq (n-1)p'$ , existe una constante  $C(n, p, \varepsilon) > 0$  tal que*

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C(n, \varepsilon, p) \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.8)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

Es decir,  $K(n, n)$  implica  $K(n, p)$  para todo  $1 \leq p \leq n$ .

Gracias a este último resultado, otra versión de la conjetura maximal de Keakeya podría ser enunciar que se cumple (2.8) para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $1 \leq p \leq n$ ,  $1 \leq q \leq (n-1)p'$  y  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Observación 2.2.4.** De manera análoga a la anterior proposición, tenemos que es suficiente probar la estimación restringida débil para demostrar la estimación fuerte. En este caso al pasar de la estimación restringida débil a la fuerte, perdemos un  $\delta^{-\varepsilon}$  en la norma. Más precisamente, podríamos enunciarlo de la siguiente manera:

*Supongamos que el operador maximal de Keakeya es de tipo restringido débil  $(p_0, q_0)$  con norma  $\lesssim \delta^{-n/p_0+1}$  para algún  $1 \leq p_0 \leq n$ , con  $q_0 = (n-1)\frac{p_0}{p_0-1}$ . Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$ , el operador maximal de Keakeya es de tipo fuerte  $(p, q)$  con norma  $\lesssim \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon}$ , para todo  $1 \leq p \leq p_0$ ,  $1 \leq q \leq q_0$ .*

La demostración es totalmente análoga a la de la anterior proposición.

*Demostración de la Proposición 2.2.3.* Vamos a aplicar la Proposición 2.2.2 a las estimaciones  $(n, n)$  de la conjetura y la demostrada  $(1, \infty)$  de la Proposición 1.2.2. Según estas estimaciones, el operador de Keakeya es de tipo fuerte (y por lo tanto, de tipo restringido débil)  $(1, \infty)$  y  $(n, n)$  con norma  $\lesssim \delta^{-(n-1)}$  y  $\lesssim \delta^{-\varepsilon}$  respectivamente.

Así, con la notación de la Proposición 2.2.2, tenemos  $p_0 = n$ ,  $p_1 = 1$ ,  $q_0 = n$ ,  $q_1 = \infty$ ,  $A_0 = \delta^{-\varepsilon}$  y  $A_1 = \delta^{-(n-1)}$ . Haciendo las cuentas, vemos que tomando  $p$  y  $q$  como en (2.5), tenemos  $-\frac{n}{p} + 1 = -(n-1)\theta$  y  $q = (n-1)\frac{p}{p-1}$ . Según la Proposición 2.2.2, tenemos que el operador maximal es de tipo restringido fuerte  $(p, q)$  con norma

$$A \lesssim \delta^{-\varepsilon(1-\theta)} \delta^{-(n-1)\theta} = \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon(1-\theta)} \leq \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon},$$

que es precisamente la norma que nos interesa. Ahora, aplicamos la Proposición 2.2.1, y así vemos que el operador es de tipo restringido fuerte para todo  $1 \leq p \leq n$  y todo  $1 \leq q \leq (n-1)\frac{p}{p-1}$ .

Vemos que en realidad es de tipo fuerte. Vamos a utilizar la estimación fuerte  $(\infty, \infty)$  (con norma 1) que conocemos por la Proposición 1.2.2. Elegimos un par  $(p, q)$  que cumpla  $1 < p \leq n$ ,  $q = (n-1)\frac{p}{p-1}$  y sea  $\theta$  pequeño. Vamos a utilizar el

teorema de Marcinkiewicz (Teorema A.1.7) entre  $(p_1, q_1) = (\infty, \infty)$  y algún  $(p_0, q_0)$  que esté en la región que sabemos que es de tipo restringido fuerte, de forma que el punto  $(p, q)$  caiga en la línea de interpolación de estos dos. Es decir, según la Definición A.2, queremos que se cumpla

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{\infty}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{\infty}.$$

Por lo tanto, tenemos que tomar,

$$p_0 = (1-\theta)p, \quad q_0 = (1-\theta)q.$$

Tenemos que tomar  $\theta$  suficientemente pequeño para que el par  $(p_0, q_0)$  esté en la región  $1 \leq p_0 \leq p \leq n$  y  $1 \leq q_0 \leq q = (n-1)\frac{p}{p-1}$ , donde sabemos que el operador de Keakeya es de tipo restringido fuerte.

Aplicando la interpolación de Marcinkiewicz (Teorema A.1.7) vemos que la norma fuerte  $(p, q)$  del operador de Keakeya está acotado por

$$\max \left\{ 1, \delta^{-\frac{n}{p_0}+1-\varepsilon} \right\} = \delta^{-\frac{n}{p_0}+1-\varepsilon} = \delta^{-\frac{n}{(1-\theta)p}+1-\varepsilon}.$$

Ahora, tomando  $\theta$  suficientemente pequeño, vemos que si  $\theta < \frac{\varepsilon}{\frac{n}{p}+\varepsilon}$ , entonces la cota de arriba queda dominada por

$$\delta^{-\frac{n}{(1-\theta)p}+1-\varepsilon} \leq \delta^{-\frac{n}{p}+1-2\varepsilon} = \delta^{-\frac{n}{p}+1-\varepsilon'} \quad (2.9)$$

y así vemos que tenemos la estimación de tipo fuerte  $(p, q)$  que queríamos sobre los pares que cumplen  $1 \leq p \leq n$ ,  $q = (n-1)\frac{p}{p-1}$ . Por último, por la Proposición 2.2.1, vemos que se cumple que el operador maximal es de tipo fuerte en la región  $1 \leq p \leq n$ ,  $1 \leq q \leq (n-1)\frac{p}{p-1}$ , lo que demuestra la proposición.  $\square$

En resumen, en las próximas subsecciones vamos a buscar para que valores de  $p$  se cumple

$$\sigma^{n-1} \left( \{e \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathcal{K}_{\delta} \chi_E(e) \geq \lambda\} \right) \lesssim \left( \delta^{-\frac{n}{p}+1} \frac{\mathcal{L}^n(E)^{1/p}}{\lambda} \right)^q, \quad (2.10)$$

para todo  $E \subset \mathbb{R}^n$ , y todo  $0 < \lambda \leq 1$ , donde  $q = (n-1)p'$ . Gracias a la Observación 2.2.4, esta estimación es suficiente para probar que se cumple la estimación interpolada (2.8). Recordando la notación del primer capítulo, decimos que se cumple  $K(n, p)$  cuando se cumple (2.8) para toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  y todo  $\varepsilon > 0$ . En conclusión, probando desigualdades como (2.10), estamos probando que se cumple  $K(n, p)$ . Como ya hemos dicho, cuanto más alto sea el  $p$ , esto más se acercará a  $K(n, n)$  que representa la conjetura maximal de Keakeya.

Ahora, una vez que hemos justificado la razón de buscar este tipo de estimaciones, vamos a pasar a demostrar dos resultados parciales. Cada uno de ellos vamos a verlo en una subsección, en donde probaremos que se cumplen estimaciones como (2.10), para cierto valor de  $p$ .

### 2.2.1. Bourgain, 1991

El primer resultado del tipo (2.10) lo dio Bourgain. Él probó que se cumple  $K(n, p)$  para toda  $p \leq \frac{n+1}{2}$ . Como vamos a ver, Bourgain demostró la versión débil de la estimación.

Antes de dar la demostración formal del resultado, vamos a explicar la idea intuitiva. Vamos a tomar un conjunto  $E$  y una familia de tubos  $\{T_{e_j}^\delta\}_{j=1}^M$   $\varepsilon$ -separados que se intersecan con  $E$ . Vamos a calcular dos acotaciones de  $M$  que como veremos nos darán la estimación débil del problema de Kakeya que queremos.

Una estimación será un cálculo de combinatoria usando que los  $\{e_j\}_{j=1}^M$  están  $\varepsilon$ -separados.

Para la otra estimación, vamos a necesitar acotar inferiormente la medida de  $E$ . Para ello, como según (2.10) vamos a estudiar el caso  $\mathcal{K}_\delta \chi_E(e) \geq \lambda$ , vamos a poder tomar los tubos  $\{T_{e_j}^\delta\}_{j=1}^M$  para que cumplan

$$\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta).$$

Ahora, para obtener el resultado que queremos, nos gustaría acotar la medida de  $E$  de la siguiente manera

$$\mathcal{L}^n(E) \geq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^M (E \cap T_{e_j}^\delta)\right) \gtrsim \lambda \sum_{j=1}^M \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta) \approx \lambda M \delta^{n-1}.$$

Esto no es cierto en general, ya que la segunda desigualdad falla, pero si tomamos un punto que esté en muchos tubos, la intersección de todos estos tubos será pequeña gracias a que son  $\varepsilon$ -separados. Esta es la clave del argumento, porque nos permitirá acotar la medida de  $E$  teniendo en cuenta solo la parte complementaria a la intersección de los tubos, y así obtendremos una cota que nos interesa.

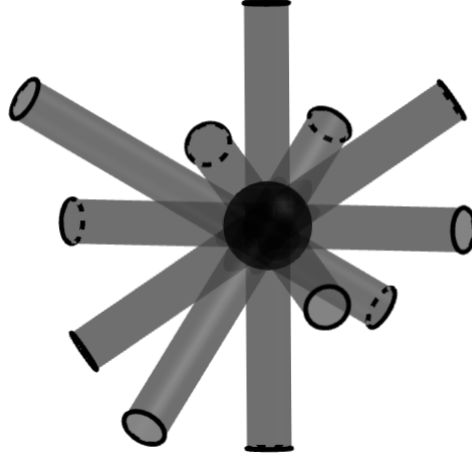
Esto explica que al método que usó Bourgain también se le conozca como *bush argument* (argumento del arbusto), ya que se estudia el caso en el que muchos tubos se intersecan en un punto, y esta figura se parecería a un arbusto. En la figura 2.2 podemos ver un ejemplo de esto. Todos estos tubos se intersecan en cierto punto. Al tomar una bola en el entorno de este punto, tenemos que la mayor parte de la intersección entre los tubos está contenida en esta bola, y fuera de ella, se intersecan pocos tubos o ninguno. Esta es la clave del argumento de Bourgain, gracias a la cual podremos actuar como si los tubos fueran disjuntos fuera de la bola.

Empezamos con el lema que nos va a permitir tener la primera estimación de  $M$ , que recordemos, es el cardinal de la familia de tubos.

**Lema 2.2.5.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ , con  $\sigma^{n-1}(\Omega) > 0$  y  $\varepsilon > 0$ . Sea  $M(\Omega) \in \mathbb{N}$  el cardinal máximo de los conjuntos  $\varepsilon$ -separados de  $\Omega$ . Entonces, se cumple

$$\frac{\sigma^{n-1}(\Omega)}{\varepsilon^{n-1}} \lesssim M(\Omega) \lesssim \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}. \quad (2.11)$$

Figura 2.2: Un ejemplo de un arbusto de Bourgain



*Demostración.* Primero, tomamos  $\{e_j\}_{j=1}^M$  un conjunto  $\varepsilon$ -separado de  $\mathbb{S}^{n-1}$  cuyo cardinal sea el máximo, es decir,  $M = M(\mathbb{S}^{n-1})$ . Por lo tanto, el conjunto será maximal. Ahora, para cada  $j = 1, \dots, M$ , tomamos la capa esférica de  $\mathbb{S}^{n-1}$

$$C_j = \{e \in \mathbb{S}^{n-1} : |e - e_j| \leq \varepsilon\} = \mathbb{S}^{n-1} \cap B^n(e_j, \varepsilon).$$

De esta manera, como el conjunto  $\{e_j\}_{j=1}^M$  es  $\varepsilon$ -separado, si  $j \neq k$ ,  $e_k \notin C_j$ . Pero como el conjunto  $\{e_j\}_{j=1}^M$  es maximal, los  $C_j$  recubren  $\mathbb{S}^{n-1}$ . En consecuencia,

$$M(\mathbb{S}^{n-1}) = M \approx \frac{\sigma^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}{\sigma^{n-1}(C_j)} \approx \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}.$$

Por otro lado, está claro que para cualquier  $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $M(\Omega) \leq M(\mathbb{S}^{n-1})$ , así que la segunda desigualdad de (2.11) se cumple.

Para ver la primera desigualdad, supongamos que no se cumple para algún  $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$  tal que  $\sigma^{n-1}(\Omega) > 0$ . Es decir, no existe una constante  $C > 0$  que cumple  $\frac{\sigma^{n-1}(\Omega)}{\varepsilon^{n-1}} \leq CM(\Omega)$ , o equivalentemente,

$$\frac{\sigma^{n-1}(\Omega)}{\varepsilon^{n-1}} > CM(\Omega), \quad \forall C > 0.$$

Ahora, como  $\sigma^{n-1}(\Omega) > 0$ , podemos recubrir  $\mathbb{S}^{n-1}$  con un número finito  $m$  de copias rotadas de  $\Omega$ . Pero entonces, llamando  $g_i$  a las rotaciones,

$$M(\mathbb{S}^{n-1}) = M\left(\bigcup_{i=1}^m g_i(\Omega)\right) \leq \sum_{i=1}^m M(\Omega) < C^{-1} \sum_{i=1}^m \frac{\sigma^{n-1}(\Omega)}{\varepsilon^{n-1}} = C^{-1} m \frac{\sigma^{n-1}(\Omega)}{\varepsilon^{n-1}},$$

para todo  $C > 0$ . Pero entonces, no existe una constante  $C > 0$  tal que  $M(\mathbb{S}^{n-1}) \leq C \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}$ . Esto contradice la segunda desigualdad para  $\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$ . Por lo tanto, no puede existir un  $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$  que no cumpla la primera desigualdad.

Así, queda demostrado el lema.  $\square$

El siguiente va a ser un lema geométrico que nos va a permitir acotar la intersección de dos tubos. Como podemos imaginar, esto será muy importante en el argumento.

**Lema 2.2.6.** Sean  $e_k, e_l \in \mathbb{S}^{n-1}$  y  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$\text{diam} \left( T_{e_k}^\delta(a) \cap T_{e_l}^\delta(b) \right) \lesssim \frac{\delta}{|e_k - e_l|}, \quad (2.12)$$

y en consecuencia,

$$\mathcal{L}^n \left( T_{e_k}^\delta(a) \cap T_{e_l}^\delta(b) \right) \lesssim \frac{\delta^n}{|e_k - e_l|}. \quad (2.13)$$

*Demostración.* Primero, está claro que podemos suponer que los tubos tienen el mismo centro, y sin pérdida de generalidad vamos a suponer que están centrados en el origen. Por lo tanto, suponemos  $a = b = 0$ .

Ahora, tomamos  $x \in T_{e_k}^\delta(0) \cap T_{e_l}^\delta(0)$ . Vamos a parametrizar el punto  $x$  de dos maneras distintas. Primero, como  $x \in T_{e_k}^\delta(0)$ , existe un segmento unitario  $I_k \subset T_{e_k}^\delta(0)$ , con dirección  $e_k$  que contiene al punto  $x$ . Este segmento se interseca en un punto, que denotamos por  $m_k$ , con el hiperplano que contiene al origen y tiene como vector normal  $e_k$ . Además, sabemos que  $m_k \in B(0, \delta)$ , porque  $m_k \in T_{e_k}^\delta(0)$ . Así, podemos escribir

$$x = m_k + t_k e_k, \quad \text{para algún } |t_k| \leq 1/2. \quad (2.14)$$

Análogamente, como  $x \in T_{e_l}^\delta(0)$ , existe un punto  $m_l \in B(0, \delta)$  tal que

$$x = m_l + t_l e_l, \quad \text{para algún } |t_l| \leq 1/2. \quad (2.15)$$

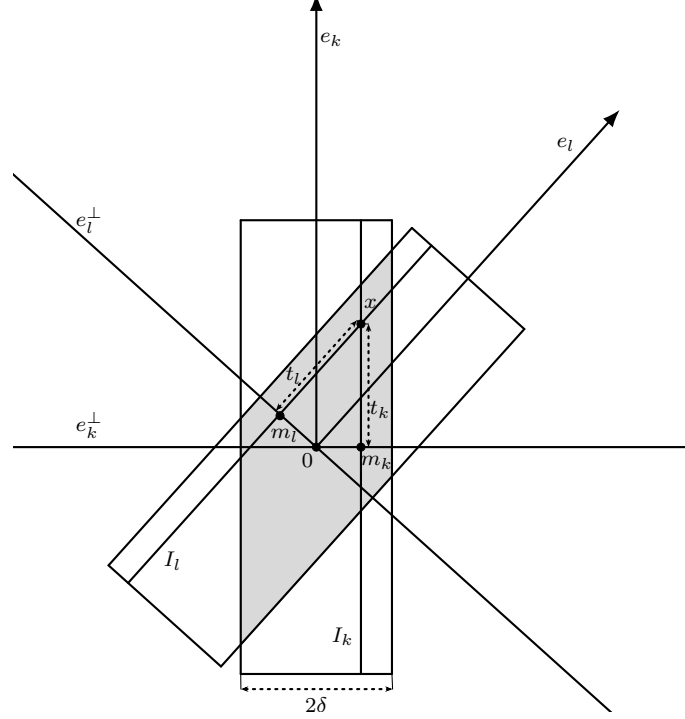
Además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $|t_k| \geq |t_l|$ . En la figura 2.3 de abajo mostramos esta situación.

Para demostrar la acotación que queremos, vamos a acotar superiormente  $|x|$ , y para ello, tenemos que acotar  $|m_k|$  y  $|t_k|$ . Como ya sabemos,  $|m_k| \leq \delta$ . Ahora, busquemos una cota para  $t_k$ . Consideramos el triángulo formado por  $m_k$ ,  $m_l$  y  $x$ . Por la ley de los senos, tenemos que

$$\frac{\sin \theta}{|m_k - m_l|} = \frac{\sin \theta'}{|t_k|},$$

donde  $\theta = \theta(e_k, e_l) \approx |e_k - e_l|$ . En consecuencia,

$$|t_k| \leq \frac{|m_k - m_l|}{\sin \theta} \lesssim \frac{\delta}{|e_k - e_l|},$$

Figura 2.3: Intersección de dos  $\delta$ -tubos.

ya que  $\sin \theta \approx \theta$ . Por lo tanto,

$$|x| \leq |m_k| + |t_k| \lesssim \delta + \frac{\delta}{|e_k - e_l|} = (1 + |e_k - e_l|) \frac{\delta}{|e_k - e_l|} \lesssim \frac{\delta}{|e_k - e_l|},$$

y esto se cumple para todos los puntos de la intersección  $T_{e_k}^\delta(0) \cap T_{e_j}^\delta(0)$ . Entonces, tenemos

$$\text{diam} \left( T_{e_k}^\delta(0) \cap T_{e_j}^\delta(0) \right) = \sup_{x \in T_{e_k}^\delta(0) \cap T_{e_j}^\delta(0)} 2|x| \lesssim \frac{\delta}{|e_k - e_l|},$$

con lo que se cumple la desigualdad (2.12).

Para demostrar la segunda parte del lema, la desigualdad (2.13), primero vamos a ver que se cumple

$$T_{e_k}^\delta(0) \cap T_{e_j}^\delta(0) \subset \frac{C\delta}{|e_k - e_l|} T_{e_k}^{|e_k - e_l|}(0), \quad (2.16)$$

donde  $\frac{C\delta}{|e_k - e_l|} T_{e_k}^{|e_k - e_l|}(0)$  es de hecho un tubo de longitud  $\frac{C\delta}{|e_k - e_l|}$  y radio  $C\delta$ . Para probar (2.16), sea  $x \in T_{e_k}^\delta(0) \cap T_{e_j}^\delta(0)$ . En particular  $x \in T_{e_k}^\delta(0)$ , y tenemos  $|x \cdot v| \leq \delta$  para todo vector unitario  $v \perp e_k$ . Por otro lado, por la desigualdad (2.12) que ya hemos probado, sabemos que  $x \in B\left(0, \frac{C\delta}{|e_k - e_l|}\right)$  para cierta constante  $C$ . Por la

definición del tubo, todo esto prueba que se cumple (2.16). En consecuencia,

$$\mathcal{L}^n \left( T_{e_k}^\delta(0) \cap T_{e_j}^\delta(0) \right) \leq \mathcal{L}^n \left( \frac{C\delta}{|e_k - e_l|} T_{e_k}^{|e_k - e_l|}(0) \right) \approx \frac{\delta^n}{|e_k - e_l|},$$

como queríamos probar.  $\square$

Como hemos explicado en la introducción de la subsección, los tubos van a cumplir la desigualdad  $\mathcal{L}^n \left( E \cap T_{e_j}^\delta \right) \geq \lambda \mathcal{L}^n \left( T_{e_j}^\delta \right)$ . En el argumento, vamos a necesitar una acotación similar para el complementario de la intersección de muchos tubos, y esto nos lo va a dar el siguiente lema.

**Lema 2.2.7.** *Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathcal{L}^n(E) > 0$ ,  $0 < \lambda \leq 1$  y  $T_e^\delta$  un  $\delta$ -tubo tal que  $\mathcal{L}^n(E \cap T_e^\delta) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_e^\delta)$ . Entonces, para todo  $x_0 \in E \cap T_e^\delta$ , existe una constante  $c_0$  que solo depende de  $\lambda$ ,  $\delta$  y  $e$  tal que*

$$\mathcal{L}^n \left( E \cap T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda)^c \right) \gtrsim \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n \left( T_e^\delta \right).$$

*Demostración.* Tomamos  $x_0 \in E \cap T_e^\delta$ . Para cualquier  $c_0$ , podemos escribir

$$\mathcal{L}^n \left( E \cap T_e^\delta \right) = \mathcal{L}^n \left( E \cap T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda) \right) + \mathcal{L}^n \left( E \cap T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda)^c \right). \quad (2.17)$$

Queremos acotar superiormente el primer sumando. Observamos que

$$\mathcal{L}^n \left( E \cap T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda) \right) \leq \mathcal{L}^n \left( T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda) \right).$$

y vamos a ver que podemos elegir un  $c_0$  para que se cumpla

$$\mathcal{L}^n \left( T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda) \right) \lesssim \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n \left( T_e^\delta \right). \quad (2.18)$$

Para conseguir esto, fijamos un  $c_0$  y distinguimos dos casos. Primero, si  $\lambda \leq c_0\delta$ , entonces tenemos

$$\mathcal{L}^n \left( T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda) \right) \leq \mathcal{L}^n \left( B(x_0, c_0^{-1}\lambda) \right) \approx \left( \frac{\lambda}{c_0} \right)^n \leq \frac{\lambda}{c_0} \delta^{n-1} \approx \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n \left( T_e^\delta \right).$$

Ahora, si por el contrario  $c_0\delta < \lambda \leq 1$ , entonces la intersección  $T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda)$  estará contenida en un tubo centrado en  $x_0$ , de dirección  $e$ , longitud  $c_0^{-1}\lambda$  y radio  $\delta$ . Entonces,

$$\mathcal{L}^n \left( T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda) \right) \lesssim c_0^{-1} \lambda \delta^{n-1}.$$

Así que la única restricción que necesitamos es  $c_0 \geq 2$ , de forma que obtenemos,

$$c_0^{-1} \lambda \delta^{n-1} \lesssim \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n \left( T_e^\delta \right).$$

De esta manera, vemos que se cumple (2.18).

Entonces, volviendo a la ecuación (2.17), despejamos el último término y aplicamos la hipótesis  $\mathcal{L}^n(E \cap T_e^\delta) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_e^\delta)$ , y así, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n\left(E \cap T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda)^c\right) &\geq \lambda \mathcal{L}^n(T_e^\delta) - \mathcal{L}^n\left(E \cap T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda)\right) \\ &\gtrsim \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n(T_e^\delta), \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que  $\mathcal{L}^n(E \cap T_e^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda)) \lesssim \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n(T_e^\delta)$ , consecuencia de (2.18).

Esto demuestra el lema.  $\square$

El siguiente es el lema clave del argumento de Bourgain, en el que vamos a utilizar la intersección de muchos tubos para conseguir la acotación para la medida de  $E$  que queremos.

**Lema 2.2.8.** Sean  $\{T_{e_j}^\delta\}_{j=1}^M$  unos  $\delta$ -tubos,  $E$  un conjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $\varepsilon > \delta$ . Supongamos que se cumplen las dos siguientes condiciones:

$$T_{e_k}^\delta \cap T_{e_j}^\delta \neq \emptyset \implies \theta(e_j, e_k) \geq C^{-1}\varepsilon, \quad (2.19)$$

y

$$\mathcal{L}^n\left(E \cap T_{e_j}^\delta \cap B(x_0, \delta/\varepsilon)^c\right) \gtrsim \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall 1 \leq j \leq M. \quad (2.20)$$

Entonces, se tiene  $\mathcal{L}^n(E) \gtrsim \lambda \delta^{n-1} \sqrt{M}$ , donde la constante depende de  $C$ .

*Demostración.* Primero, para todo  $j$  y todo  $x_0$ , se tiene

$$\mathcal{L}^n\left(E \cap T_{e_j}^\delta\right) \geq \mathcal{L}^n\left(E \cap T_{e_j}^\delta \cap B(x_0, \delta/\varepsilon)^c\right) \gtrsim \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta),$$

y en consecuencia,

$$\int_E \left( \sum_{j=1}^M \chi_{T_{e_j}^\delta}(x) \right) dx = \sum_{j=1}^M \mathcal{L}^n\left(E \cap T_{e_j}^\delta\right) \gtrsim \sum_{j=1}^M \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta) \approx \lambda \delta^{n-1} M. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, va a haber un punto  $x_0 \in E$  que esté en una cantidad mayor o igual salvo constante que  $\lambda \delta^{n-1} M / \mathcal{L}^n(E)$  de tubos  $T_{e_j}^\delta$ . Para ver esto último, supongamos que no existe ese punto  $x_0$ . Entonces,  $\sum_{j=1}^M \chi_{T_{e_j}^\delta}(x) < C \frac{\lambda \delta^{n-1} M}{\mathcal{L}^n(E)}$ , para todo  $x \in E$  y toda constante  $C > 0$ . Pero entonces,

$$\int_E \left( \sum_{j=1}^M \chi_{T_{e_j}^\delta}(x) \right) dx < \int_E C \frac{\lambda \delta^{n-1} M}{\mathcal{L}^n(E)} dx = C \lambda \delta^{n-1} M,$$



lo que contradice (2.21). Por lo tanto, tiene que existir ese punto  $x_0$ .

Ahora, definimos los conjuntos  $\tau_j = T_{e_j}^\delta \setminus B(x_0, \delta/\varepsilon)$ , para los valores de  $j$  que cumplen  $x_0 \in T_{e_j}^\delta$ . Estos conjuntos  $\tau_j$  tendrán un solapamiento acotado, es decir, va a existir una constante  $C_A$  tal que ningún punto  $x$  estará en más  $\tau_j$  que  $C_A$ .

Vamos a probar esto. Para ello, fijamos un  $j$  y sea  $A$  una constante. Vamos a distinguir dos casos, según los tubos  $T_{e_k}^\delta$  formen un ángulo mayor o menor que  $A\varepsilon$  respecto del tubo  $T_{e_j}^\delta$ .

Primero, definimos  $J = \{k : x_0 \in T_{e_k}^\delta, \theta(e_j, e_k) \geq A\varepsilon\}$ . Entonces, como para todo  $k \in J$ ,  $\theta(e_j, e_k) \geq A\varepsilon$ , aplicamos el Lema 2.2.6 y obtenemos

$$\text{diam} \left( T_{e_j}^\delta \cap T_{e_k}^\delta \right) \leq \frac{\delta}{\theta(e_j, e_k)} \leq \delta/\varepsilon,$$

tomando  $A$  suficientemente grande. Esto prueba que para  $k \in J$ ,  $T_{e_j}^\delta \cap T_{e_k}^\delta \subset B(x_0, \delta/\varepsilon)$ . En consecuencia, por la definición de los conjuntos  $\tau_j$ , si  $k \in J$ , entonces  $\tau_j \cap \tau_k = \emptyset$ .

Por otro lado, tomamos  $\tilde{J} = \{k : x_0 \in T_{e_k}^\delta, \theta(e_j, e_k) \leq A\varepsilon\}$ . Queremos ver que  $\#\tilde{J} \leq C_A$  para cierta constante  $C_A$ . Por la hipótesis (2.19),  $\{e_k\}_{k \in \tilde{J}}$  es un conjunto  $C^{-1}\varepsilon$ -separado, que está contenido en el casquete  $B(e_j, A\varepsilon) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ , porque si  $k \in \tilde{J}$ ,  $e_k \in (B(e_j, A\varepsilon) \cap \mathbb{S}^{n-1})$ . Entonces,

$$\#\tilde{J} \lesssim \frac{\sigma^{n-1} (B(e_j, A\varepsilon) \cap \mathbb{S}^{n-1})}{(C^{-1}\varepsilon)^{n-1}} \approx \frac{(A\varepsilon)^{n-1}}{(C^{-1}\varepsilon)^{n-1}} = C_A.$$

Así, hemos probado que tomando la constante  $A$  suficientemente grande, cualquier punto de  $\tau_j$  va a pertenecer como mucho a  $C_A$  conjuntos  $\tau_k$ . Como esto se cumple para todos los  $j$  que cumplen  $x_0 \in T_{e_j}^\delta$ , en particular se cumple el solapamiento acotado.

Ahora, por la hipótesis (2.20), para cada  $j$ ,

$$\mathcal{L}^n(E \cap \tau_j) = \mathcal{L}^n \left( E \cap T_{e_j}^\delta \cap B(x_0, \delta/\varepsilon)^c \right) \gtrsim \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n \left( T_{e_j}^\delta \right) \approx \lambda \delta^{n-1},$$

y por el solapamiento acotado, como se cumple  $\sum_j \chi_{\tau_j}(x) \leq C_A$  para todo punto  $x$  contenido en algún  $\tau_j$ ,

$$\begin{aligned} \sum_j \mathcal{L}^n(E \cap \tau_j) &= \sum_j \int_E \chi_{\tau_j}(x) \, dx = \int_E \sum_j \chi_{\tau_j}(x) \, dx \\ &\leq C_A \int_E \chi_{\bigcup_j \tau_j}(x) \, dx = C_A \mathcal{L}^n \left( \bigcup_j (E \cap \tau_j) \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, recordando que  $1 \leq j \lesssim \lambda \delta^{n-1} M / \mathcal{L}^n(E)$ ,

$$\mathcal{L}^n(E) \geq \mathcal{L}^n \left( \bigcup_j (E \cap \tau_j) \right) \geq C_A^{-1} \sum_j \mathcal{L}^n(E \cap \tau_j) \gtrsim \sum_j \lambda \delta^{n-1} \gtrsim \frac{\lambda \delta^{n-1} M}{\mathcal{L}^n(E)} \lambda \delta^{n-1}.$$

En conclusión, reordenando los términos,

$$\mathcal{L}^n(E) \gtrsim \lambda \delta^{n-1} \sqrt{M},$$

como queríamos probar.  $\square$

Con todo esto, ya estamos preparados para demostrar el resultado de Bourgain. Sólo necesitamos ordenar y aplicar todos los resultados que ya hemos demostrado.

**Teorema 2.2.9.** *Se cumple  $K(n, p)$  para todo  $p \leq \frac{n+1}{2}$ .*

*Demostración.* Como sabemos, por la Observación 2.2.4 es suficiente demostrar la estimación  $(p, q)$  débil, donde  $p = \frac{n+1}{2}$  y  $q = (n-1)p' = n+1$ . Es decir, tenemos que ver que

$$\sigma^{n-1}(\{e \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathcal{K}_\delta \chi_E(e) \geq \lambda\}) \lesssim \left( \delta^{-\frac{n-1}{n+1}} \frac{\mathcal{L}^n(E)^{\frac{2}{n+1}}}{\lambda} \right)^{n+1},$$

para todo conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$ , y todo  $0 < \lambda \leq 1$ , ya que  $-\frac{n}{p} + 1 = -\frac{n-1}{n+1}$ .

Entonces, fijamos  $E$  y  $\lambda$ . Tomamos  $\varepsilon = \frac{K\delta}{\lambda}$  donde  $K$  es una constante que determinaremos luego, y  $\{e_j\}_{j=1}^M$  un conjunto  $\varepsilon$ -separado maximal de  $D_E(\lambda) = \{e \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathcal{K}_\delta \chi_E(e) \geq \lambda\}$ . Para cada  $j \in \{1, \dots, M\}$ , va a existir un  $\delta$ -tubo  $T_{e_j}^\delta$  tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\delta \chi_E(e_j) &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta(a))} \int_{T_{e_j}^\delta(a)} \chi_E(x) dx = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta(a))}{\mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta(a))} \\ &\geq \frac{\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta)}{\mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta)} \geq \lambda. \end{aligned}$$

Así, deducimos que

$$\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta).$$

Queremos aplicar el anterior Lema 2.2.8. Para ello, basta ver que se cumplen las dos hipótesis (2.19) y (2.20).

Por un lado, para la primera, como los  $\{e_j\}$  son  $\varepsilon$ -separados, se cumple  $|e_j - e_k| \approx \theta(e_j, e_k) \geq \varepsilon$ , con lo que se cumple (2.19).

Por otro lado, para la segunda hipótesis, vamos a utilizar el Lema 2.2.7. Según este lema, existe una constante  $c_0$  que solo depende de  $\lambda$ ,  $\delta$  y  $e_j$  tal que

$$\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta \cap B(x_0, c_0^{-1}\lambda)^c) \geq \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta).$$

Entonces, podemos elegir la constante  $K = c_0$ , y así vemos que se cumple (2.20).

En consecuencia, podemos aplicar el anterior Lema 2.2.8, que nos da la desigualdad  $M \lesssim (\mathcal{L}^n(E)/(\lambda\delta^{n-1}))^2$ , que es la segunda estimación para  $M$  que explicamos el principio de la subsección. Como ya hemos dicho, la primera es consecuencia del Lema 2.2.5, ya que como  $\{e_j\}_{j=1}^M$  es un conjunto  $\varepsilon$ -separado maximal de  $D_E(\lambda)$ , el lema nos da la estimación

$$\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^{n-1} \sigma^{n-1}(D_E(\lambda)) \lesssim M \lesssim \mathcal{L}^n(E)^2 \lambda^{-2} \delta^{-2(n-1)}.$$

Finalmente reordenando los términos,

$$\begin{aligned} \sigma^{n-1}(D_E(\lambda)) &= \sigma^{n-1}(\{e \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathcal{K}_\delta \chi_E(e) \geq \lambda\}) \\ &\lesssim \delta^{(n-1)-2(n-1)} \lambda^{-2-(n-1)} \mathcal{L}^n(E)^2 \lesssim \left(\delta^{-\frac{n-1}{n+1}} \frac{\mathcal{L}^n(E)^{\frac{2}{n+1}}}{\lambda}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

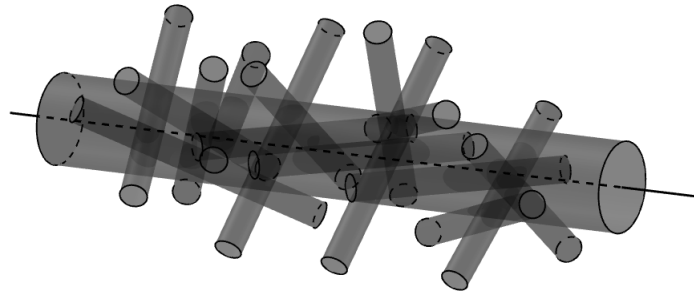
como queríamos probar.  $\square$

### 2.2.2. Wolff, 1995

Wolff mejoró el resultado de Bourgain, extendiendo el rango de  $p$  hasta  $p \leq \frac{n+2}{2}$ . Podríamos ver el método de Wolff como el siguiente paso del método de Bourgain. En el argumento del arbusto de Bourgain se estudia la intersección de muchos tubos en un punto, mientras que en el argumento de Wolff, vamos a estudiar la intersección de muchos tubos en otro tubo. Por este motivo al método de Wolff se le suele llamar *hairbrush argument* (argumento del peine).

En la siguiente figura 2.4 vemos un ejemplo de un peine. Aquí fijamos un tubo más grande que el resto, y vemos que los demás se intersecan con él.

Figura 2.4: Un ejemplo de un peine de Wolff



Este método es más técnico que el anterior y nos llevará más trabajo. Aquí, volveremos a usar todos los lemas enunciados en el método de Bourgain.

Antes de empezar con demostraciones, vamos a explicar algunos términos que vamos a usar en esta subsección. En este método, de nuevo vamos a demostrar la

acotación débil del operador maximal de Kakeya. Sin embargo, esta vez vamos a tomar el conjunto  $E$  contenido en  $B(0, 1)$ . Esto lo podemos hacer porque podemos suponer que el soporte de la función  $f$  está contenido en  $B(0, 1)$ . Igual que en el método de Bourgain, vamos a tomar un conjunto  $\{e_j\}_{j=1}^M$   $\varepsilon$ -separado de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , y para cada  $j = 1, \dots, M$ , va a existir un tubo  $T_{e_j}^\delta$  tal que

$$\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta).$$

Esta vez, va a ser importante que el eje de estos tubos va a estar contenido en una recta  $l_j$ . Es decir,  $l_j$  va a ser la recta que pasa por el centro del tubo  $T_{e_j}^\delta$  con dirección  $e_j$ . Para cada tubo con el que trabajemos siempre vamos a asociarle esta recta. Como estamos suponiendo que  $E$  está contenido en  $B(0, 1)$ , estas rectas siempre van a intersectarse con  $B(0, 1)$ .

En esta parte vamos a trabajar con estas rectas, y por ello, introducimos las siguientes definiciones.

**Definición 2.2.10.** Definimos el espacio  $\mathbb{M}(n, 1)$  como el conjunto de todas las rectas de  $\mathbb{R}^n$  que se intersectan con  $B(0, 1)$ , y sobre este espacio definimos la siguiente distancia,

$$\text{dist}(l_1, l_2) = \theta(l_1, l_2) + \text{dist}(l_1, l_2), \quad \forall l_1, l_2 \in \mathbb{M}(n, 1), \quad (2.22)$$

donde  $\theta(l_1, l_2) \in [0, \pi/2]$  es el ángulo entre las dos rectas (es decir, el ángulo entre sus direcciones) y  $\text{dist}(l_1, l_2) = \inf\{|x - y| : x \in l_1 \cap B(0, 100), y \in l_2 \cap B(0, 100)\}$ .

Además, definimos la aplicación  $F : \mathbb{M}(n, 1) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , donde  $F(l) = e_l$  es la dirección de la recta  $l$  para todo  $l \in \mathbb{M}(n, 1)$ .

Por otro lado, sean  $\rho \geq \delta > 0$ . Vamos a denotar por  $T_e^{\rho, \delta}(a)$  al tubo centrado en  $a$ , con dirección  $e$ , longitud  $\rho$  y radio  $\delta$ . Cuando  $\rho = 1$ , escribiremos simplemente  $T_e^\delta(a)$  como hasta ahora. Además, denotamos  $\tilde{T}_e^{\rho, \delta}(a) = T_e^{100\rho, 100\delta}(a)$ .

Por otro lado, sea  $\Pi$  un 2-plano de  $\mathbb{R}^n$ . Denotamos por  $\mathbb{M}(\Pi, 1)$  el conjunto de todas las rectas de  $\mathbb{M}(n, 1)$  contenidas en  $\Pi$ , y para cualquier  $l \in \mathbb{M}(n, 1)$  definimos la distancia de  $l$  a  $\Pi$  como

$$\text{dist}(l, \mathbb{M}(\Pi, 1)) = \inf_{m \in \mathbb{M}(\Pi, 1)} \text{dist}(l, m). \quad (2.23)$$

Finalmente, definimos el conjunto  $\Pi^\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \Pi) < \delta\}$ .

Empezamos con una propiedad que nos va a permitir estimar el cardinal de un conjunto  $\delta$ -separado que cumpla ciertas propiedades. Aquí ya vamos a ver que las rectas asociadas a los tubos van a ser importantes.

**Proposición 2.2.11.** Sean  $l_0$  una recta de  $\mathbb{M}(n, 1)$ ,  $\Pi$  un 2-plano que contiene a  $l_0$ ,  $\sigma \geq \delta > 0$  y  $\{e_j\}_{j=1}^M$  un conjunto  $\delta$ -separado de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Supongamos que para cada  $j = 1, \dots, M$ , existe una recta  $l_j$  con dirección  $e_j$  tal que  $\text{dist}(l_j, \mathbb{M}(\Pi, 1)) < \delta$ , y  $\text{dist}(l_j, l_0) < \sigma$ . Entonces, se cumple  $M \lesssim \sigma/\delta$ .

*Demostración.* Vamos a probar que el conjunto  $\{e_j\}_{j=1}^M$  está contenido en la intersección de una bola de radio  $\approx \sigma$  y un  $C\delta$ -entorno de una curva de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Si probamos esto, está claro que  $M \lesssim \sigma/\delta$ .

Primero, veamos que cualquier  $e_j$  está a distancia  $\lesssim \sigma$  de  $e_0$ , donde  $e_0$  es la dirección de  $l_0$ . Esto es inmediato por la definición (2.22),

$$|e_j - e_0| \approx \theta(e_j, e_0) = \theta(l_j, l_0) \leq \text{dist}(l_j, l_0) < \sigma.$$

Por lo tanto,  $\{e_j\}_{j=1}^M$  está contenido en la bola de centro  $e_0$  y radio  $\approx \sigma$ .

Para ver la segunda condición, definimos el conjunto

$$\gamma = \{e \in \mathbb{S}^{n-1} : F^{-1}(e) \cap \mathbb{M}(\Pi, 1) \neq \emptyset\}.$$

Observamos que este conjunto  $\gamma$  es precisamente la intersección de  $\mathbb{S}^{n-1}$  con la traslación del plano  $\Pi$  al origen. Por lo tanto, vemos que  $\gamma$  es una curva. Ahora, como  $\text{dist}(l_j, \mathbb{M}(\Pi, 1)) < \delta$ , para cada recta  $l_j$  va a existir una recta  $l \subset \mathbb{M}(\Pi, 1)$  tal que

$$\theta(e_j, e_l) = \theta(l_j, l) \leq \text{dist}(l_0, l) < \delta,$$

donde  $e_l \in \gamma$  es la dirección de la recta  $l$ . Por lo tanto, el conjunto  $\{e_j\}_{j=1}^M$  está contenido en un  $C\delta$ -entorno de la curva  $\gamma$ , tal y como queríamos probar.  $\square$

El siguiente lema también nos va a dar una acotación del cardinal de un conjunto. Además de que es un resultado que vamos a necesitar, es interesante el método que se utiliza para demostrarlo, ya que más adelante veremos técnicas similares. Como vamos a ver, vamos a fijar un tubo y vamos a separar el resto de tubos según el ángulo que forman respecto del tubo fijado. Esto nos va a ser muy útil durante toda la subsección.

**Lema 2.2.12.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Pi$  un 2-plano de  $\mathbb{R}^n$ , y  $\{T_{e_j}^\delta\}_{j=1}^M$  tubos contenidos en  $\Pi^{C_0\delta}$ . Supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis,

- (i)  $\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta)$ , para todo  $j = 1, \dots, M$ .
- (ii)  $\#\{j : T_{e_j}^\delta \subset \tilde{T}_{e_k}^\sigma\} \lesssim \sigma/\delta$ , para todo  $\sigma \in (\delta, 1)$  y toda  $k$ .

Entonces,

$$M\delta^{n-1} \lesssim C \frac{\mathcal{L}^n(E \cap \Pi^{C_0\delta})}{\lambda^2} \log(1/\delta), \quad (2.24)$$

donde la constante  $C$  depende de  $C_0$ .

*Demostración.* Primero veamos que podemos asumir que  $E \subset \Pi^{C_0\delta}$ . Si no, tomamos  $\tilde{E} = E \cap \Pi^{C_0\delta}$ , y vemos que todas las hipótesis se siguen cumpliendo para  $\tilde{E}$ . Entonces, suponiendo el resultado cierto para  $\tilde{E}$ , también se cumplirá para  $E$ , ya que  $\mathcal{L}^n(\tilde{E} \cap \Pi^{C_0\delta}) = \mathcal{L}^n(E \cap \Pi^{C_0\delta})$ .

Así que, a partir de ahora suponemos que  $E \subset \Pi^{C_0\delta}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} M\lambda\delta^{n-1} &= \sum_{j=1}^M \lambda\delta^{n-1} \approx \sum_{j=1}^M \lambda\mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta) \leq \sum_{j=1}^M \mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta) \\ &= \int_E \sum_{j=1}^M \chi_{T_{e_j}^\delta}(x) dx \leq \mathcal{L}^n(E)^{1/2} \left\| \sum_{j=1}^M \chi_{T_{e_j}^\delta} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos utilizado la hipótesis (i), y en la última hemos aplicado la desigualdad de Hölder. Ahora vamos a acotar la norma de la suma. Para ello vamos a usar que para unos números  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ , se cumple  $(\sum_{i=1}^m x_i)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j$ .

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^M \chi_{T_{e_j}^\delta} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{j=1}^M \chi_{T_{e_j}^\delta}(x) \right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^M \chi_{T_{e_j}^\delta}(x) \chi_{T_{e_i}^\delta}(x) dx \\ &= \sum_{i,j=1}^M \mathcal{L}^n(T_{e_i}^\delta \cap T_{e_j}^\delta) = \sum_{j=1}^M \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^M \mathcal{L}^n(T_{e_i}^\delta \cap T_{e_j}^\delta). \end{aligned}$$

El primer sumando lo podemos acotar por  $CM\delta^{n-1}$ .

Ahora, para acotar el segundo sumando, vamos a fijar un  $i$ , y vamos a separar los tubos  $T_{e_j}^\delta$  según el ángulo que forman respecto de  $T_{e_i}^\delta$ . Para ello, definimos los conjuntos,

$$J_k = \left\{ j : T_{e_i}^\delta \cap T_{e_j}^\delta \neq \emptyset, 2^k\delta \leq \theta(e_i, e_j) \leq 2^{k+1}\delta \right\},$$

donde  $k$  toma valores enteros entre 0 y  $\log_2(\pi/\delta)$ . Tomamos estos valores de  $k$  porque queremos que se tengan en cuenta todos los ángulos posibles, y para ello necesitamos que el último valor de  $k$  cumpla  $2^k\delta < \pi < 2^{k+1}\delta$ . Así, vemos que es suficiente tomar  $\log_2(\pi/\delta)$  como el último valor de  $k$ .

Ahora, si  $j \in J_k$ , entonces, por el Lema 2.2.6, se cumple

$$\mathcal{L}^n(T_{e_i}^\delta \cap T_{e_j}^\delta) \lesssim \frac{\delta^n}{\theta(e_i, e_j)} \leq \frac{\delta^n}{2^k\delta} = \frac{\delta^{n-1}}{2^k}.$$

Por último, tenemos que acotar el cardinal de  $J_k$ . Como si  $j \in J_k$  se cumple  $\theta(e_i, e_j) \leq 2^{k+1}\delta$ , entonces se tiene  $T_{e_j}^\delta \subset \tilde{T}_{e_i}^{2^{k+1}\delta}$ . Teniendo en cuenta la hipótesis (ii), esto nos da la siguiente estimación,

$$\#J_k \leq C_0 2^{k+1}\delta/\delta \lesssim 2^k.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \mathcal{L}^n(T_{e_i}^\delta \cap T_{e_j}^\delta) \leq \sum_{i=1}^M \sum_{k=0}^{\log_2(\pi/\delta)} \frac{\delta^{n-1}}{2^k} \#J_k \lesssim \sum_{i=1}^M \sum_{k=0}^{\log_2(\pi/\delta)} \delta^{n-1}.$$

En conclusión, juntando todo,

$$\begin{aligned} M\lambda\delta^{n-1} &\lesssim \mathcal{L}^n(E)^{1/2} \left( M\delta^{n-1} + \sum_{i=1}^M \sum_{k=0}^{\log_2(\pi/\delta)} \delta^{n-1} \right)^{1/2} \\ &\lesssim \mathcal{L}^n(E)^{1/2} (M\delta^{n-1} \log(1/\delta))^{1/2}, \end{aligned}$$

que reordenando los términos nos da la desigualdad (2.24) que queríamos probar.  $\square$

La propiedad clave en el argumento de Wolff es el siguiente lema. Este lema nos va a dar una acotación inferior de la medida de  $E$ , igual que lo hicimos en el caso de Bourgain (en el Lema 2.2.8). Sin embargo, esta vez será más complicado, y además de las del método de Bourgain, tendremos que usar otras técnicas.

**Lema 2.2.13.** Sean  $E \subset B(0, 1)$  y  $\{T_{e_j}^{\rho, \delta}\}_{j=1}^M$  tubos, con  $\delta \leq \rho/100$ . Supongamos que existen unas constantes  $C$  y  $C_0$  suficientemente grandes de manera que se cumplen las siguientes hipótesis:

- (i)  $\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^{\rho, \delta}) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^{\rho, \delta})$ , para todo  $j = 1, \dots, M$ .
- (ii) Si  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces para todo  $j$ ,

$$\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^{\rho, \delta} \cap B(x, (\log \rho/\delta)^{-\nu} \rho)) \leq C_0^{-1} \frac{\lambda}{\log(\rho/\delta)} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^{\rho, \delta}).$$

- (iii) Fijando cualquier  $k$  y para todo  $\sigma \in (\delta, \rho)$ , el conjunto

$$\left\{ j : \tilde{T}_{e_j}^{\rho, \sigma} \cap \tilde{T}_{e_k}^{\rho, \sigma} \neq \emptyset, \theta(e_j, e_k) \leq \sigma/\rho \right\}$$

tiene cardinal menor o igual que  $C(\sigma/\delta)^{n-1}$ .

- (iv) Fijando cualquier  $k$ , para cualquier 2-plano  $\Pi$  con  $l_k \subset \Pi$  (recordamos que  $l_k$  es la recta que contiene al eje de  $T_{e_k}^\delta$ ), y cualquier  $\sigma \in (\delta, \rho)$ , el conjunto

$$\left\{ j : T_{e_j}^{\rho, \delta} \subset (\tilde{T}_{e_k}^{\rho, \sigma} \cap \Pi^{C_0\delta}) \right\}$$

tiene cardinal menor o igual que  $C\sigma/\delta$ .

Entonces, para un  $\nu$  suficientemente grande, se cumple

$$\rho^{-n} \mathcal{L}^n(E) \geq C_\nu^{-1} \lambda^2 (\delta/\rho)^{\frac{n-2}{2}} (M(\delta/\rho)^{n-1})^{\frac{n}{2(n-1)}} (\log \rho/\delta)^{-n\nu}. \quad (2.25)$$

Empezamos haciendo algunas observaciones.

**Observación 2.2.14.** 1) En el lema el tubo  $\tilde{T}_{e_k}^{\rho, \sigma}$  (en las hipótesis (iii) y (iv)) se toma con el mismo centro que el tubo  $T_{e_k}^{\rho, \delta}$ .

2) La prueba vamos a hacerla para  $\rho = 1$  ya que podemos reducirnos a este caso reescalando el problema.

Por otro lado, por la propiedad (iii), tomando  $\sigma \approx 1$ , podemos suponer que  $M \lesssim \delta^{-(n-1)}$ .

3) Por último, podemos suponer que se cumple la siguiente propiedad:

$$T_{e_k}^\delta \cap T_{e_j}^\delta \neq \emptyset \implies \theta(e_j, e_k) \geq \delta. \quad (2.26)$$

Para ver esto, escribimos  $\{T_{e_{j_k}}^\delta\}_{k=1}^{\overline{M}}$  un subconjunto de los tubos  $\{T_{e_j}^\delta\}_{j=1}^M$  que cumplen la propiedad (2.26), y que sea maximal respecto a esta propiedad. Entonces, por la maximalidad, para cualquier tubo  $T_{e_j}^\delta$ , va a existir un  $k \in \{1, \dots, \overline{M}\}$ , tal que  $T_{e_j}^\delta \cap T_{e_{j_k}}^\delta \neq \emptyset$  y  $\theta(e_j, e_{j_k}) \leq \delta$  (puede ser  $e_j = e_{j_k}$ ). Vamos a utilizar la hipótesis (iii), tomando  $\sigma \approx \delta$ . Por la propiedad de la maximalidad que hemos dicho, vemos que para todo  $j \in \{1, \dots, M\}$ , va a existir un  $k \in \{1, \dots, \overline{M}\}$  tal que

$$j \in J_k = \left\{ i : \tilde{T}_{e_i}^\sigma \cap \tilde{T}_{e_{j_k}}^\sigma \neq \emptyset, \theta(e_i, e_{j_k}) \leq \sigma \right\},$$

y tal que  $\#J_k \lesssim 1$ . Por lo tanto,

$$M = \# \left( \bigcup_{k=1}^{\overline{M}} J_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\overline{M}} \#J_k \lesssim \overline{M}.$$

En conclusión, como  $\overline{M} \approx M$ , si los  $\{T_{e_j}^\delta\}_{j=1}^M$  no cumplen la propiedad (2.26), podríamos tomar el subconjunto  $\{T_{e_{j_k}}^\delta\}_{k=1}^{\overline{M}}$ , que sí la cumple, y el resultado sería el mismo.

Por esto, podemos suponer que los  $\{T_{e_j}^\delta\}_{j=1}^M$  cumplen la propiedad (2.26).

Nuestro objetivo ahora es probar el Lema 2.2.13, y para ello vamos a necesitar varios resultados. Entonces, a partir de ahora vamos a fijar el conjunto  $E \subset B(0, 1)$ , y los tubos  $\{T_{e_j}^{\rho, \delta}\}_{j=1}^M$ , con  $\delta \leq \rho/100$ .

Primero, fijamos un número  $N$  y consideramos las siguientes opciones.

I (multiplicidad baja) Hay al menos  $M/2$  valores de  $j$  para los que se cumple

$$\mathcal{L}^n \left( \left\{ x \in T_{e_j}^\delta \cap E : \# \left\{ i : x \in T_{e_i}^\delta \right\} \leq N \right\} \right) \geq \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n \left( T_{e_j}^\delta \right). \quad (2.27)$$

II (multiplicidad alta en ángulo  $\sigma$ ) Hay al menos  $C_1^{-1} M (\log 1/\delta)^{-1}$  valores de  $j$  para los cuales se cumple

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n \left( \left\{ x \in T_{e_j}^\delta \cap E : \# \left\{ i : x \in T_{e_i}^\delta, \sigma \leq \theta(e_i, e_j) \leq 2\sigma \right\} \right. \right. \\ \left. \left. \geq (C_1 \log(1/\delta))^{-1} N \right\} \right) \\ \geq (C_1 \log(1/\delta))^{-1} \lambda \mathcal{L}^n \left( T_{e_j}^\delta \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$



Vamos a explicar estas dos situaciones. Aquí estamos analizando como se intersecan los tubos entre ellos, pero a diferencia del método de Bourgain, aquí tomamos un tubo  $T_{e_j}^\delta$  como referencia. De nuevo, esto nos será de utilidad para estimar la medida de las intersecciones.

Fijamos un  $j$ , y supongamos que el tubo  $T_{e_j}^\delta$  cumple (2.27) para un  $N$ . Entonces, esto quiere decir que el tubo  $T_{e_j}^\delta$  se interseca con menos de  $N$  tubos  $T_{e_i}^\delta$  en una parte "grande" (que dependerá de  $\lambda$ ) del conjunto  $T_{e_j}^\delta \cap E$  respecto a la medida del propio tubo  $T_{e_j}^\delta$ . Si se cumple I, entonces esta situación pasará en la mayoría de tubos  $T_{e_j}^\delta$ . Por lo tanto, estaremos en una situación en la que los tubos no se intersecan más de  $N$  veces en la mayoría del conjunto  $E$ . Esta condición nos dará un solapamiento acotado de los tubos parecida a la del caso de Bourgain. Observamos que cuanto más grande tomemos el número  $N$ , más fácil será que se cumpla I.

En la opción II, volvemos a fijar un tubo  $T_{e_j}^\delta$ , y ahora nos quedamos solo con los tubos  $T_{e_i}^\delta$  que formen un ángulo entre  $\sigma$  y  $2\sigma$  de  $T_{e_j}^\delta$ . Entonces, si se cumple (2.28), el tubo  $T_{e_j}^\delta$  se intersecará con al menos  $(C_1 \log(1/\delta))^{-1} N$  de estos tubos en una parte "grande" del propio tubo. Esta situación no nos va a permitir usar el solapamiento acotado, pero vamos a poder usar el número  $\sigma$  para obtener el resultado que queremos. Aquí, cuanto más grande sea  $N$ , más difícil será que ocurra II.

Sin embargo, como vamos a ver en el siguiente lema, estas opciones I y II no son opuestas, sino que siempre existirá algún  $N$  para que se cumplan las dos.

**Lema 2.2.15.** *Supongamos que se cumple (i). Entonces, existe un número  $N$  tal que se cumplen I y II para algún  $\sigma \in [\delta, \pi]$ .*

*Demostración.* Como por (i) tiene que cumplirse  $\mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta \cap E) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta)$ , existirá un  $N$  que cumpla I. Entonces, tomamos  $N$  el número entero más pequeño que cumple I. Es decir, hay  $M/2$  valores de  $j$  para los cuales

$$\mathcal{L}^n\left(\left\{x \in T_{e_j}^\delta \cap E : \#\{i : x \in T_{e_i}^\delta\} < N\right\}\right) < \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta),$$

porque  $N - 1$  ya no cumple I.

Pero como tiene que cumplirse la hipótesis (i), esto significa que para estos  $M/2$  valores de  $j$  se cumple

$$\mathcal{L}^n\left(\left\{x \in T_{e_j}^\delta \cap E : \#\{i : x \in T_{e_i}^\delta\} \geq N\right\}\right) \geq \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta). \quad (2.29)$$

Tomamos cualquiera de estos  $j$ , y cualquier  $x \in T_{e_j}^\delta$  con  $\#\{i : x \in T_{e_i}^\delta\} \geq N$ . Vamos a dividir los tubos  $T_{e_i}^\delta$  en subconjuntos dependiendo del ángulo que tienen respecto del tubo  $T_{e_j}^\delta$  (de manera parecida a como hicimos en el Lema 2.2.12). Por (2.26), para cada tubo  $T_{e_i}^\delta$ , existe algún  $k \in \{1, \dots, \log_2(\pi/\delta)\}$ , tal que  $\theta(e_i, e_j) \in [2^{k-1}\delta, 2^k\delta]$ . Escribimos

$$J_k = \left\{i : x \in T_{e_i}^\delta, \theta(e_i, e_j) \in [2^{k-1}\delta, 2^k\delta]\right\}.$$

Ahora, tomamos  $J_{k_0(j)}$  el conjunto de los  $J_k$  que tiene el cardinal más grande. Entonces, como

$$\log_2(\pi/\delta) \#J_{k_0(j)} = \sum_{k=0}^{\log_2(\pi/\delta)} \#J_{k_0(j)} \geq \sum_{k=0}^{\log_2(\pi/\delta)} \#J_k \geq \# \left\{ i : x \in T_{e_i}^\delta \right\} \geq N$$

deducimos que

$$\#J_{k_0(j)} = \# \left\{ i : x \in T_{e_i}^\delta, \theta(e_i, e_j) \in [2^{k_0-1}\delta, 2^{k_0(j)}\delta] \right\} \geq (\log_2 \pi/\delta)^{-1} N.$$

Entonces, van a haber  $C_1^{-1} M (\log 1/\delta)^{-1}$  valores de  $j$  de los que cumplen (2.29), para los que existe un  $k_0 \in \{1, \dots, \log_2(\pi/\delta)\}$  tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n \left( \left\{ x \in T_{e_j}^\delta \cap E : \# \left\{ i : x \in T_{e_i}^\delta, \theta(e_i, e_j) \in [2^{k_0-1}\delta, 2^{k_0}\delta] \right\} \geq (\log_2 \pi/\delta)^{-1} N \right\} \right) \\ \geq (\log_2 \pi/\delta)^{-1} \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n \left( T_{e_j}^\delta \right). \end{aligned}$$

Así, vemos que se cumple II para algún  $\sigma = 2^{k_0}\delta$ .  $\square$

Ahora, vamos a suponer primero que se cumple I y obtendremos una acotación para la medida de  $E$ . Luego supondremos que se cumple II y obtendremos otra acotación. Gracias al anterior lema podremos juntar estas dos estimaciones para el número  $N$  que hace cumplir I y II y así deduciremos la desigualdad que queremos del Lema 2.2.13.

Entonces, empezamos por el caso fácil, en el que vamos a usar una técnica similar a la del método de Bourgain. Vamos a suponer que se cumple I y deduciremos una primera acotación inferior para la medida de  $E$ . La demostración será parecida a la del Lema 2.2.8, pero aquí el solapamiento acotado lo tendremos directamente como consecuencia de I.

**Lema 2.2.16.** *Supongamos que se cumplen I para algún valor de  $N$  y la hipótesis (i) en el Lema 2.2.13. Entonces,*

$$\mathcal{L}^n(E) \gtrsim \frac{\lambda M \delta^{n-1}}{N}.$$

*Demostración.* Escribimos  $\tilde{E} = \{x \in E : \# \{i : x \in T_{e_i}^\delta\} \leq N\}$ . Entonces, primero, por I,

$$\mathcal{L}^n \left( T_{e_j}^\delta \cap \tilde{E} \right) \geq \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n \left( T_{e_j}^\delta \right)$$

para  $M/2$  valores de  $j$ . Por otro lado, para todo punto  $x \in \tilde{E}$  que pertenezca a

alguno de estos  $M/2$  tubos,  $\sum_{j=1}^{M/2} \chi_{T_{e_j}^\delta}(x) \leq N$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{M/2} \mathcal{L}^n \left( T_{e_j}^\delta \cap \tilde{E} \right) &= \sum_{j=1}^{M/2} \int_{\tilde{E}} \chi_{T_{e_j}^\delta}(x) \, dx \leq N \int_{\tilde{E}} \chi_{\bigcup_j T_{e_j}^\delta}(x) \, dx \\ &= N \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{j=1}^{M/2} \left( T_{e_j}^\delta \cap \tilde{E} \right) \right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta todo esto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(E) &\geq \mathcal{L}^n(\tilde{E}) \geq \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{j=1}^{M/2} \left( T_{e_j}^\delta \cap \tilde{E} \right) \right) \geq N^{-1} \sum_{j=1}^{M/2} \mathcal{L}^n \left( T_{e_j}^\delta \cap \tilde{E} \right) \\ &\geq \frac{\lambda}{2N} \sum_{j=1}^{M/2} \mathcal{L}^n \left( T_{e_j}^\delta \right) \approx \frac{\lambda M \delta^{n-1}}{N}, \end{aligned}$$

lo que prueba el lema.  $\square$

Ahora vamos a pasar a suponer que se cumple II. Este caso será más complicado, y necesitaremos los tres siguientes lemas para llegar a la acotación que nos interesa. Esta vez vamos a necesitar las 4 hipótesis del Lema 2.2.13.

Antes de suponer que se cumple II, vamos a fijar un tubo y estudiar el caso más simple en el que el tubo cumple la desigualdad (2.28). Este tubo que fijamos es el mango del peine, y los tubos que se intersecan con él son los dientes del peine (ver la figura 2.4). De aquí viene el nombre del método.

**Lema 2.2.17.** *Supongamos que se cumplen (i), (ii) y (iv) y que el tubo  $T_{e_j}^\delta$  cumple (2.28). Entonces,*

$$\mathcal{L}^n \left( E \cap \tilde{T}_{e_j}^\delta \right) \gtrsim \lambda^3 \sigma \delta^{n-2} N (\log 1/\delta)^{-(n-2)\nu-3}. \quad (2.30)$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de todos los tubos  $T_{e_i}^\delta$  que cumplen  $T_{e_i}^\delta \cap T_{e_j}^\delta \cap E \neq \emptyset$  y  $\sigma \leq \theta(e_i, e_j) \leq 2\sigma$ . Si  $T_{e_i}^\delta \in \mathcal{F}$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces para una constante  $C_2$ , el conjunto

$$\left\{ x \in T_{e_i}^\delta : \text{dist}(x, l_j) \leq C_2^{-1} \sigma (\log 1/\delta)^{-\nu} \right\}$$

está contenido en  $T_{e_i}^\delta \cap \tilde{T}_{e_j}^{\sigma(\log 1/\delta)^{-\nu}}$ , donde  $l_j$  es la recta que contiene al eje de  $T_{e_j}^\delta$ . En consecuencia, por el Lema 2.2.6, el conjunto está contenido en una bola de radio  $C(\log 1/\delta)^{-\nu}$ , porque

$$\text{diam} \left( T_{e_i}^\delta \cap \tilde{T}_{e_j}^{\sigma(\log 1/\delta)^{-\nu}} \right) \lesssim \frac{\sigma(\log 1/\delta)^{-\nu}}{|e_i - e_j|} \lesssim \log(1/\delta)^{-\nu},$$

donde en la última desigualdad hemos usado  $|e_i - e_j| \approx \theta(e_i, e_j) \approx \sigma$ . Por lo tanto, por (ii),

$$\mathcal{L}^n \left( \left\{ x \in T_{e_i}^\delta \cap E : \text{dist}(x, l_j) \leq C_2^{-1} \sigma (\log 1/\delta)^{-\nu} \right\} \right) \geq \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n \left( T_{e_i}^\delta \right), \quad (2.31)$$

eligiendo la constante  $C_0$  suficientemente grande.

Ahora, vamos a elegir unos 2-planos  $\Pi_k$  que contienen a  $l_j$  y que cumplen las siguientes propiedades:

- A) Para cualquier tubo  $T_{e_i}^\delta \in \mathcal{F}$  existe una  $k$  tal que  $T_{e_i}^\delta \subset \Pi_k^{C_0 \delta}$ .
- B) Cualquier punto  $x$  tal que  $\text{dist}(l_j, x) \geq C_2^{-1} \sigma (\log 1/\delta)^{-\nu}$  pertenece como mucho a  $C (\log 1/\delta)^{(n-2)\nu}$  entornos  $\Pi_k^{C_0 \delta}$ .

Veamos como elegir estos planos  $\Pi_k$ . Primero, tomamos un conjunto maximal  $\delta/\sigma$ -separado  $\{e_k\}$  de  $\mathbb{S}^{n-1} \cap e_j^\perp$  donde  $e_j^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_j \rangle = 0\}$ . Es decir,  $e_j^\perp$  es el hiperplano que contiene al origen y tiene como vector normal  $e_j$ . Ahora, para cada  $k$  consideramos el plano  $\Pi_k$  que contiene a  $l_j$  y se extiende por la dirección  $e_k$ . Veamos que con estos planos se cumplen A) y B).

Para A), escribimos  $e_i = ae_j + be$  donde  $e \perp e_j$ . Entonces,

$$|b| = \sin(\theta(e_j, e_i)) \lesssim \sigma.$$

Ahora, elegimos un  $k$  con  $|e - e_k| \leq \delta/\sigma$  (que es posible por la maximalidad de  $\{e_k\}$ ). Como  $T_{e_i}^\delta \cap T_{e_j}^\delta \neq \emptyset$ , existen  $x_1 \in l_j$ ,  $x_2 \in l_i$  (puntos en los ejes de los tubos) tales que  $|x_1 - x_2| \lesssim \delta$ . Sea  $x \in T_{e_i}^\delta$  y elegimos un  $y \in l_i$  tal que  $|x - y| \lesssim \delta$ . Entonces, se cumple

$$x = x_1 + (y - x_2) + (x - y) + (x_2 - x_1).$$

Observamos que  $y, x_2 \in l_i$ , así que podemos escribir  $y - x_2 = te_i = tae_j + tbe$ , con  $t \lesssim 1$ . Por lo tanto,

$$x = (x_1 + tae_j + tbe_k) + tb(e - e_k) + (x - y) + (x_2 - x_1).$$

El término  $x_1 + tae_j + tbe_k$  pertenece a  $\Pi_k$ , ya que  $x_1 \in l_j \subset \Pi_k$ , y  $\Pi_k$  se expande en las direcciones  $e_j$  y  $e_k$ . Ya hemos visto que los dos últimos términos son  $\lesssim \delta$  en valor absoluto, y el término que falta también, porque

$$tb(e - e_k) \lesssim b(e - e_k) \lesssim \sigma(e - e_k) \lesssim \sigma \frac{\delta}{\sigma} = \delta.$$

Por lo tanto,  $\text{dist}(x, \Pi_k) \lesssim \delta$  y deducimos que  $x \in \Pi_k^{C\delta}$  para cierta constante  $C$ . En conclusión, se cumple A).

Para B), por simplificar notación vamos a asumir que  $l_j$  pasa por el origen. Fijamos  $x$  como en B), y sea  $x_\perp$  la proyección ortogonal de  $x$  sobre el hiperplano  $e_j^\perp$ . Entonces,  $x_\perp = te$ , para algún  $e \in e_j^\perp$  con  $|e| = 1$ , y  $t \geq C_2^{-1} \sigma (\log 1/\delta)^{-\nu}$ . Es decir, si escribimos  $l_e$  la recta que pasa por el origen con dirección  $e$ , entonces

$x_\perp \in l_e$ , y por la hipótesis de B), tiene que estar a distancia mayor o igual que  $C_2^{-1}\sigma(\log 1/\delta)^{-\nu}$  del origen, porque  $l_j$  pasa por el origen.

Ahora, si  $x \in \Pi_k^{C_0\delta}$ , entonces  $\text{dist}(x_\perp, l_{e_k}) \leq C_0\delta$ , donde  $l_{e_k}$  es la recta que pasa por el origen con dirección  $e_k$ . Así que

$$|e - e_k| \approx \sin(\theta(e, e_k)) \leq \frac{C_0\delta}{t} \approx t^{-1}\delta \lesssim \frac{\delta(\log 1/\delta)^\nu}{\sigma}.$$

Como los  $e_k$  están  $\delta/\sigma$ -separados, hay  $\lesssim (\log 1/\delta)^{(n-2)\nu}$  valores de esos  $k$ , así que B) queda probada.

Ahora, para cada  $k$ , definimos  $\mathcal{F}_k$  el subconjunto de  $\mathcal{F}$  de los tubos  $T_{e_i}^\delta$  que están contenidos en  $\Pi_k^{C_0\delta}$ . Por A), sabemos que  $\mathcal{F} = \bigcup_k \mathcal{F}_k$ . Además, como  $\theta(e_i, e_j) \leq 2\sigma$ ,  $T_{e_i}^\delta$  está contenido en  $\tilde{T}_{e_j}^\sigma$ . Ahora, vamos a aplicar el Lema 2.2.12 al conjunto  $\tilde{E} = E \cap \tilde{T}_{e_j}^\sigma \cap \{x : \text{dist}(x, l_j) \leq C_2^{-1}\sigma(\log 1/\delta)^{-\nu}\}$  y con el 2-plano  $\Pi_k$ . Para ello, tenemos que ver que se cumplen las hipótesis (i) y (ii) de este lema. La (i) se cumple porque  $T_{e_i}^\delta \subset \tilde{T}_{e_j}^\sigma$  y por (2.31) con  $\lambda$  cambiado por  $\lambda/2$ , es decir,

$$\mathcal{L}^n(\tilde{E} \cap T_{e_i}^\delta) \geq \mathcal{L}^n\left(\left\{x \in T_{e_i}^\delta \cap E : \text{dist}(x, l_j) \leq C_2^{-1}\sigma(\log 1/\delta)^{-\nu}\right\}\right) \geq \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n(T_{e_i}^\delta).$$

Por otro lado, la condición (ii) del Lema 2.2.12 es inmediata por la hipótesis (iv) del Lema 2.2.13, ya que  $T_{e_i}^\delta \subset \Pi_k^{C_0\delta}$ . Entonces, aplicando el Lema 2.2.12,

$$\#\mathcal{F}_k \delta^{n-1} \lesssim \frac{\mathcal{L}^n(\tilde{E} \cap \Pi_k^{C_0\delta})}{\lambda^2} \log(1/\delta).$$

Ahora, sumando sobre todas las  $k$ ,

$$\begin{aligned} \#\mathcal{F} \delta^{n-1} &\leq \sum_k \#\mathcal{F}_k \delta^{n-1} \lesssim \frac{1}{\lambda^2} \log(1/\delta) \sum_k \mathcal{L}^n(\tilde{E} \cap \Pi_k^{C_0\delta}) \\ &\lesssim \frac{C}{\lambda^2} \mathcal{L}^n(E \cap \tilde{T}_{e_j}^\sigma) (\log 1/\delta)^{(n-2)\nu} \log(1/\delta), \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde la última desigualdad es consecuencia de B). Por otro lado, como el tubo  $T_{e_j}^\delta$  cumple (2.28), sabemos que

$$\sum_{T_{e_i}^\delta \in \mathcal{F}} \chi_{T_{e_i}^\delta}(x) \geq (C_1 \log(1/\delta))^{-1} N,$$

para todo punto  $x$  de un subconjunto de  $T_{e_j}^\delta$ , que denotamos por  $D$ , con medida al

menos  $\lambda(C_1 \log(1/\delta))^{-1} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta)$ . Teniendo en cuenta esto, se cumple

$$\begin{aligned}
\lambda(C_1 \log(1/\delta))^{-1} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta) &\leq \int_D dx \leq \int_D N^{-1} C_1 \log(1/\delta) \sum_{T_{e_i}^\delta \in \mathcal{F}} \chi_{T_{e_i}^\delta}(x) dx \\
&\leq N^{-1} C_1 \log(1/\delta) \sum_{T_{e_i}^\delta \in \mathcal{F}} \int_{T_{e_j}^\delta} \chi_{T_{e_i}^\delta}(x) dx \\
&= N^{-1} C_1 \log(1/\delta) \sum_{T_{e_i}^\delta \in \mathcal{F}} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta \cap T_{e_i}^\delta) \\
&\lesssim N^{-1} \frac{\delta^n}{\sigma} \log(1/\delta) \#\mathcal{F}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado el Lema 2.2.6. Por lo tanto, hemos demostrado que

$$\#\mathcal{F} \gtrsim \frac{1}{\delta^n} \lambda \sigma N (\log 1/\delta)^{-2} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta) \approx \lambda \sigma (\log 1/\delta)^{-2} \frac{N}{\delta}.$$

Finalmente, uniendo esto a la acotación de (2.32), obtenemos la estimación que queríamos probar, es decir,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(E \cap \tilde{T}_{e_j}^\sigma) &\gtrsim \#\mathcal{F} \delta^{n-1} \lambda^2 (\log 1/\delta)^{(n-2)\nu} (\log 1/\delta)^{-1} \\
&\gtrsim \lambda \sigma (\log 1/\delta)^{-2} \frac{N}{\delta} \delta^{n-1} \lambda^2 (\log 1/\delta)^{-(n-2)\nu} (\log 1/\delta)^{-1} \\
&= \lambda^3 \sigma \delta^{n-2} N (\log 1/\delta)^{-(n-2)\nu-3}.
\end{aligned}$$

□

Ahora queremos mejorar esta estimación, obteniendo una desigualdad similar pero en el complementario de una bola, de forma parecida a como hicimos en el método de Bourgain en el Lema 2.2.7. De hecho, la función del siguiente lema será la misma que la del Lema 2.2.7, es decir, nos va a dar un resultado que va a demostrar la hipótesis (2.20) del Lema 2.2.8.

**Lema 2.2.18.** *Con las mismas hipótesis que en el anterior lema, tenemos*

$$\mathcal{L}^n(E \cap B(x_0, (\log 1/\delta)^{-\nu})^c \cap \tilde{T}_{e_j}^\sigma) \gtrsim \lambda^3 \sigma \delta^{n-2} N (\log 1/\delta)^{-(n-2)\nu-3},$$

para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Solo tenemos que observar que todavía se cumplen las hipótesis del lema anterior (con  $\lambda$  sustituido por  $\lambda/2$ ), si sustituimos  $E$  por

$$\tilde{E} = E \cap B(x_0, (\log 1/\delta)^{-\nu})^c,$$

habiendo elegido  $C_0$  suficientemente grande.

Escribimos  $B = B(x_0, (\log 1/\delta)^{-\nu})$ .

Las hipótesis (ii) y (iv) del Lema 2.2.13 se cumplen automáticamente. Para ver que también se cumplen (i) y II para  $\tilde{E}$ , vamos a usar que se cumplen para  $E$  (que son nuestras hipótesis), que se cumple (ii), y que se tiene

$$\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta) = \mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta \cap B^c) + \mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta \cap B).$$

Más precisamente, para (i),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(\tilde{E} \cap T_{e_j}^\delta) &= \mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta \cap B^c) = \mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta) - \mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta \cap B) \\ &\geq \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta) - \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta) (C_0 \log(1/\delta))^{-1} \geq \frac{\lambda}{2} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta) \end{aligned}$$

para un  $C_0$  suficientemente grande. Aquí en la segunda línea hemos usado que se cumple (i) tomando  $E$  para acotar el primer sumando, y que se cumple (ii) para acotar el segundo.

Que se cumple la condición II se hace de manera análoga.  $\square$

En el siguiente resultado vamos a obtener la acotación que buscamos para la medida de  $E$  suponiendo que se cumple II. Para ello, vamos a utilizar el Lema 2.2.8 del método de Bourgain, junto con los dos últimos lemas.

**Lema 2.2.19.** *Supongamos que se cumplen todas las hipótesis del Lema 2.2.13 y que se cumple II para algún  $\sigma$ . Entonces,*

$$\mathcal{L}^n(E) \gtrsim \lambda^3 N \delta^{n-2} (M \delta^{n-1})^{1/(n-1)} (\log 1/\delta)^{-2n\nu}. \quad (2.33)$$

*Demostración.* Si  $\sigma \geq (M \delta^{n-1})^{1/(n-1)} (\log 1/\delta)^{-\nu}$ , entonces haciendo los cálculos vemos que el resultado se sigue por el Lema 2.2.17, tomando  $\nu$  suficientemente grande.

Entonces, vamos a asumir que

$$\sigma \leq (M \delta^{n-1})^{1/(n-1)} (\log 1/\delta)^{-\nu}.$$

Por hipótesis, hay  $(C_1 \log(1/\delta))^{-1} M$  valores de  $j$  para los que se cumple (2.28). Elegimos un subconjunto  $\{j_k\}_{k=1}^{\bar{M}}$  que sea maximal respecto a la siguiente propiedad:

$$\tilde{T}_{e_{j_k}}^\sigma \cap \tilde{T}_{e_{j_i}}^\sigma \neq \emptyset \implies \theta(e_{j_k}, e_{j_i}) \geq \sigma (\log 1/\delta)^\nu. \quad (2.34)$$

Entonces, por la hipótesis (iii) con  $\sigma$  reemplazado por  $\sigma (\log 1/\delta)^\nu$  y la maximalidad, se sigue que

$$\bar{M} \gtrsim M (\log 1/\delta)^{-1} \left( \frac{\delta}{\sigma (\log 1/\delta)^\nu} \right)^{n-1}.$$

Esto se prueba de la misma manera que hemos hecho con (2.26).

Ahora, vamos a ver que podemos aplicar el Lema 2.2.8 a los tubos  $\left\{ \tilde{T}_{e_{j_k}}^\sigma \right\}_{k=1}^{\overline{M}}$ , con  $\delta$ ,  $\lambda$  y  $\varepsilon$  siendo igual que  $\sigma$ ,

$$C^{-1} \lambda^3 \frac{\delta^{n-2}}{\sigma^{n-2}} N (\log 1/\delta)^{-(n-2)\nu-3} \quad \text{y} \quad \sigma (\log 1/\delta)^\nu,$$

respectivamente. La primera hipótesis (2.19) del Lema 2.2.8 se cumple por construcción, ya que los tubos  $\tilde{T}_{e_{j_k}}^\sigma$  cumplen (2.34). La segunda hipótesis (2.20) se sigue del anterior Lema 2.2.18, porque  $\mathcal{L}^n \left( \tilde{T}_{e_{j_k}}^\sigma \right) \approx \sigma^{n-1}$ . Entonces, por el Lema 2.2.8,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(E) &\gtrsim \lambda^3 \frac{\delta^{n-2}}{\sigma^{n-2}} N (\log 1/\delta)^{-(n-2)\nu-3} \sigma^{n-1} \sqrt{\overline{M}} \\ &\gtrsim \lambda^3 \sigma \delta^{n-2} N (\log 1/\delta)^{-(n-2)\nu-3} \sqrt{M (\log 1/\delta)^{-1} \left( \frac{\delta}{\sigma (\log 1/\delta)^\nu} \right)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Ahora, observamos que si  $n-1 \geq 2$ , la función  $f(\sigma) = \sigma(1/\sigma^{n-1})^{1/2}$  es decreciente cuando  $\sigma > 0$ . Además, como  $\sigma \leq (M\delta^{n-1})^{1/(n-1)} (\log 1/\delta)^{-\nu}$ , la función alcanzará el valor mínimo cuando  $\sigma$  sea igual a ese valor. Por lo tanto, sustituyendo  $\sigma = (M\delta^{n-1})^{1/(n-1)} (\log 1/\delta)^{-\nu}$  en la anterior expresión,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(E) &\gtrsim \lambda^3 \delta^{n-2} N (M\delta^{n-1})^{1/(n-1)} (\log 1/\delta)^{-(n-2)\nu-3-1/2} \\ &\gtrsim \lambda^3 \delta^{n-2} N (M\delta^{n-1})^{1/(n-1)} (\log 1/\delta)^{-2n\nu} \end{aligned}$$

para cierta  $\nu$  grande. El lema por lo tanto se cumple.  $\square$

Con todo esto, ya estamos preparados para hacer la demostración del Lema 2.2.13.

*Demostración del Lema 2.2.13.* Recordamos que tenemos que demostrar la estimación (2.25), para  $\rho = 1$ , es decir,

$$\mathcal{L}^n(E) \geq C_\nu^{-1} \lambda^2 \delta^{\frac{n-2}{2}} (M\delta^{n-1})^{\frac{n}{2(n-1)}} (\log 1/\delta)^{-n\nu}.$$

Elegimos un número entero  $N$  según el Lema 2.2.15, de forma que se cumplen I y II.

Entonces sabemos que se cumplen dos estimaciones para este valor de  $N$ . Por un lado, por el Lema 2.2.16, tenemos

$$\mathcal{L}^n(E) \gtrsim \frac{\lambda M \delta^{n-1}}{N}.$$

Por otro lado, por el Lema 2.2.19 se cumple

$$\mathcal{L}^n(E) \gtrsim \lambda^3 N \delta^{n-2} (M\delta^{n-1})^{1/(n-1)} (\log 1/\delta)^{-2n\nu}.$$



Solo es necesario calcular la media geométrica de estas dos estimaciones, es decir, hacer el producto de las dos y calcular la raíz cuadrada. Veamos que así obtenemos la estimación que queremos. Haciendo el producto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(E)^2 &\gtrsim \frac{\lambda M \delta^{n-1}}{N} \lambda^3 N \delta^{n-2} (M \delta^{n-1})^{1/(n-1)} (\log 1/\delta)^{-2n\nu} \\ &= \lambda^4 \delta^{n-2} (M \delta^{n-1})^{\frac{1}{n-1}+1} (\log 1/\delta)^{-2n\nu}.\end{aligned}$$

Ahora, haciendo la raíz cuadrada queda claro que tenemos la estimación (2.25) que queríamos.  $\square$

Ahora, ya tenemos todas las herramientas necesarias para demostrar el resultado parcial de la conjetura maximal de Kakeya. Esta vez no será tan sencillo como en el método de Bourgain, y tendremos que analizar la longitud de los tubos.

**Teorema 2.2.20.** *Se cumple  $K(n, p)$  para todo  $p \leq \frac{n+2}{2}$ .*

*Demostración.* Como sabemos por la Observación 2.2.4, es suficiente demostrar la estimación débil, es decir,

$$\sigma^{n-1}(\{e \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathcal{K}_\delta \chi_E(e) \geq \lambda\}) \leq C_\varepsilon \left( \delta^{-\varepsilon} \frac{\mathcal{L}^n(E)}{\delta^{n-p} \lambda^p} \right)^{q/p},$$

para  $E \subset B(0, 1)$ , y  $0 < \lambda \leq 1$ , donde  $p = (n+2)/2$  y  $q = (n-1)p'$ .

Es más, es suficiente probar la versión discreta, es decir, si  $\{e_j\}_{j=1}^M$  son un conjunto  $\delta$ -separado de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , y  $\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta)$ , entonces tenemos que probar que

$$M \delta^{n-1} \leq C_\varepsilon \left( \delta^{-\varepsilon} \frac{\mathcal{L}^n(E)}{\delta^{n-p} \lambda^p} \right)^{q/p}. \quad (2.35)$$

Esto es consecuencia del Lema 2.2.5. Si tomamos  $\{e_j\}_{j=1}^M$  un conjunto  $\delta$ -separado de  $D_E(\lambda) = \{e \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathcal{K}_\delta \chi_E(e) \geq \lambda\}$ , entonces va a existir un tubo  $T_{e_j}^\delta$  para cada  $j$  que cumpla  $\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta)$  (igual que en el Teorema 2.2.9 de Bourgain). Además, por el Lema 2.2.5, sabemos que

$$\frac{\sigma^{n-1}(D_E(\lambda))}{\delta^{n-1}} \leq M.$$

Por lo tanto, si demostramos (2.35), automáticamente tendremos la desigualdad débil

$$\sigma^{n-1}(D_E(\lambda)) \leq M \delta^{n-1} \leq C_\varepsilon \left( \delta^{-\varepsilon} \frac{|E|}{\delta^{n-p} \lambda^p} \right)^{q/p}$$

que queremos demostrar.

Realmente, vamos a probar que para  $\delta \leq \rho \leq 1$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^M$  un conjunto  $\delta/\rho$ -separado, y tal que  $\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^{\delta, \rho}) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^{\delta, \rho})$ , entonces

$$\rho^{-n} \mathcal{L}^n(E) \geq C_\varepsilon^{-1} \left( M(\delta/\rho)^{(n-1)} \right)^{p/q} (\delta/\rho)^{n-p} \lambda^p (\delta/\rho)^\varepsilon. \quad (2.36)$$

Tomando  $\rho = 1$  nos dará la desigualdad (2.35) que queremos probar.

Primero, vamos a ver que estos tubos  $T_{e_j}^{\rho, \delta}$  cumplen las hipótesis (iii) y (iv) del Lema 2.2.13.

Para (iii), fijamos  $k$  y  $\sigma$  y definimos el conjunto

$$J = \left\{ j : \tilde{T}_{e_j}^{\rho, \sigma} \cap \tilde{T}_{e_k}^{\rho, \sigma} \neq \emptyset, \theta(e_j, e_k) \leq \sigma/\rho \right\}.$$

Si  $j \in J$ , entonces  $|e_j - e_k| \approx \theta(e_j, e_k) \leq \sigma/\rho$ . Así,  $\{e_j\}_{j \in J}$  es un conjunto  $\delta/\rho$ -separado de un disco de radio  $C\sigma/\rho$  y entonces,  $\#J \lesssim (\sigma/\delta)^{n-1}$ , por lo que se cumple (iii).

Para (iv) fijamos  $k$ ,  $\Pi$  un 2-plano que contiene a  $l_k$  (que es la recta que contiene al eje de  $T_{e_k}^\delta$ ) y  $\sigma$  y definimos

$$J = \left\{ j : T_{e_j}^{\rho, \delta} \subset \left( \tilde{T}_{e_k}^{\rho, \sigma} \cap \Pi^{C_0 \delta} \right) \right\}.$$

Si  $j \in J$ , entonces existe un segmento de longitud  $\rho$  de  $l_j$  (el eje de  $T_{e_j}^\delta$ ) que está contenido en  $\Pi^{C_0 \delta}$ . Por lo tanto, para cualquier recta  $m \in \mathbb{M}(\Pi, 1)$ ,  $\text{dist}(l_j, m) \lesssim \delta$ . Por otro lado, observamos que  $\theta(l_j, m) \approx \sin(\theta(l_j, m)) \lesssim \delta/\rho$ . Por lo tanto, por la definición (2.22),

$$\text{dist}(l_j, \mathbb{M}(\Pi, 1)) = \inf_{m \in \mathbb{M}(\Pi, 1)} \text{dist}(l_j, m) \lesssim \delta/\rho + \delta \lesssim \delta/\rho.$$

Además, sabemos que  $\text{dist}(l_j, l_k) \lesssim \sigma/\rho$ . Como los  $\{e_j\}_{j \in J}$  están  $\delta/\rho$ -separados, la Proposición 2.2.11 implica  $\#J \lesssim \sigma/\delta$ , por lo que se cumple (iv).

Ahora fijamos  $\varepsilon > 0$ , y vamos a probar la desigualdad (2.36) para una constante adecuada  $C_\varepsilon$  por inducción sobre  $\rho$ . Sea  $B$  una constante tal que si  $\delta < \varepsilon < 1$ , entonces cualquier conjunto  $\delta$ -separado  $Y$  de  $\mathbb{S}^{n-1}$  tiene un subconjunto  $\varepsilon$ -separado  $Z$  con  $\#Z \geq B^{-1}(\delta/\varepsilon)^n \#Y$ . Ahora, fijamos  $\nu$  lo suficientemente grande para que  $\nu\varepsilon > p$ . La desigualdad (2.36) es trivial cuando  $\rho \leq A\delta$  para cualquier constante fijada  $A$ , siempre que  $C(\varepsilon)$  sea suficientemente grande.

Elegimos  $A$  para que satisfaga  $A \geq 100$ ,  $3(\log A)^{-\nu} < 1$  y  $(\log A)^{\nu\varepsilon-p} \geq (2B)^{p/q} C_0^p 3^\varepsilon$ , donde  $C_0$  es la constante del Lema 2.2.13. Por otro lado, determinamos  $C(\varepsilon)$  para que satisfaga lo siguiente: la desigualdad (2.36) debería cumplirse cuando  $\rho \leq 3A\delta$  y  $C(\varepsilon) \geq 2^{\frac{n}{2(n-1)}} C_\nu \sup_{t > A} t^{-\varepsilon} (\log t)^\nu$  donde  $C_\nu$  es la constante en (2.25).

Para demostrar el teorema vamos a suponer que  $\rho > A\delta$  (por lo dicho antes) y nuestra hipótesis de inducción va a ser que la desigualdad ya está probada para parámetros  $\bar{\rho} \leq 3\rho(\log \delta/\rho)^{-\nu}$ . Separamos dos casos: (1) Hay por lo menos  $M/2$

valores de  $j$  en los que se cumple la hipótesis (ii) del Lema 2.2.13; (2) Hay por lo menos  $M/2$  valores de  $j$  en los que no se cumple la hipótesis (ii) del Lema 2.2.13.

En el caso (1), aplicamos el Lema 2.2.13 después de quitar los  $l_j$  que no cumplen la hipótesis (ii) del lema. Así,

$$\begin{aligned} \rho^{-n} \mathcal{L}^n(E) &\geq C_\nu^{-1} \lambda^2 (\rho^{-1} \delta)^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{M}{2} (\delta/\rho)^{n-1} \right)^{\frac{n}{2(n-1)}} (\log \rho/\delta)^{-n\nu} \\ &\geq C_\varepsilon^{-1} \lambda^2 (\rho^{-1} \delta)^{\frac{n-2}{2}} (M (\delta/\rho)^{n-1})^{\frac{n}{2(n-1)}} (\rho/\delta)^\varepsilon, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se cumple por el segundo requisito de  $C(\varepsilon)$ . Observamos que para nuestros valores de  $p$  y  $q$ ,  $\frac{n}{2(n-1)} = p/q$  y  $\frac{n-2}{2} = n - \frac{n+2}{2}$ . Tenemos  $p \geq 2$  y  $\lambda \leq 1$ , así que podemos reemplazar  $\lambda^2$  por  $\lambda^p$ . En conclusión, tenemos la desigualdad (2.36) que queríamos probar.

En el caso (2), definimos  $\bar{\rho} = 3\rho(\log \delta/\rho)^{-\nu}$  y  $\bar{\lambda} = \lambda(\log \delta/\rho)^{\nu-1}/(3C_0)$ . Ahora, quitamos los valores de  $j$  que cumplen la hipótesis (ii) del Lema 2.2.13, y elegimos un subconjunto maximal  $\delta/\bar{\rho}$ -separado de lo que queda de  $\{e_j\}$  que vamos a seguir denotando por  $\{e_j\}$ . Este conjunto tiene cardinal mayor o igual que

$$\bar{M} = (2B)^{-1} (\bar{\rho}/\rho)^{n-1} M.$$

Vamos a ver que para cada  $j$  existe un tubo  $T_{e_j}^{\bar{\rho}, \delta}$  tal que  $\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^{\bar{\rho}, \delta}) \geq \bar{\lambda} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^{\bar{\rho}, \delta})$ . Como la hipótesis (ii) del lema falla, sabemos que existe una bola  $B(x, \bar{\rho}/3)$  tal que  $\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^{\rho, \delta} \cap B(x, \bar{\rho}/3)) \geq C_0^{-1} \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^{\rho, \delta}) (\log \rho/\delta)^{-1}$ . Pero,  $T_{e_j}^{\rho, \delta} \cap B(x, \bar{\rho}/3)$  está contenido en un tubo de la forma  $T_{e_j}^{\bar{\rho}, \delta}$  y con este  $T_{e_j}^{\bar{\rho}, \delta}$  tenemos

$$\mathcal{L}^n(T_{e_j}^{\bar{\rho}, \delta} \cap E) \geq C_0^{-1} \frac{\lambda}{\log(\rho/\delta)} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^{\rho, \delta}) = \bar{\lambda} \mathcal{L}^n(T_{e_j}^{\bar{\rho}, \delta}),$$

lo que prueba la propiedad. Por hipótesis inductiva,

$$\bar{\rho}^{-n} \mathcal{L}^n(E) \geq C_\varepsilon^{-1} (\bar{M} (\delta/\bar{\rho})^{n-1})^{p/q} (\delta/\bar{\rho})^{n-p} \bar{\lambda}^p (\delta/\bar{\rho})^\varepsilon.$$

Sustituyendo  $\bar{M}$ ,  $\bar{\lambda}$  y  $\bar{\rho}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \rho^{-n} \mathcal{L}^n(E) &\geq (2B)^{-p/q} C_0^{-p} 3^{-\varepsilon} (\log \delta/\rho)^{\nu\varepsilon-p} C_\varepsilon^{-1} \left( M (\delta/\rho)^{n-1} \right)^{p/q} (\delta/\rho)^{n-p} \lambda^p (\delta/\rho)^\varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\rho/\delta \geq A$ , la tercera condición en la elección de  $A$  implica que el factor

$$(2B)^{-p/q} C_0^{-p} 3^{-\varepsilon} (\log \delta/\rho)^{\nu\varepsilon-p}$$

es mayor o igual que 1, y podemos quitarlo. Con esto queda probada la desigualdad (2.36) que queríamos, y con ella el teorema.  $\square$

Para terminar en la siguiente tabla resumimos algunos de los resultados más importantes que se han obtenido de la conjetura maximal de Kakeya, así como el estado actual de los resultados parciales. Como vemos, la estimación de Wolff que hemos probado es la mejor que se conoce para  $n = 6$ .

Cordoba, 1977, [4]	$n = 2$	$p \leq 2$
Bourgain, 1991, [2]	$n \geq 3$	$p \leq \frac{n+1}{2}$
Wolff, 1995, [28]	$n \geq 3$	$p \leq \frac{n+2}{2}$
Katz-Tao, 2000, [14]	$n \geq 9$	$p \leq \frac{4n+3}{7}$
Katz-Zahl, 2019, [16]	$n = 3$	$p \leq \frac{5}{2} + \varepsilon_0$
Katz-Zahl, 2019, [17]	$n = 4$	$p \leq 3,059895\dots$
Hickman-Rogers-Zhang, 2019, [13]	$n = 5, n \geq 7$	$p \leq \frac{q+1}{q}$

Aquí,  $q = \min_{2 \leq k \leq n} \max \left\{ \frac{2n}{(n-1)n+(k-1)k}, \frac{1}{n-k+1} \right\}$ , y  $\varepsilon_0 > 0$  es una constante absoluta pequeña. Además, el valor preciso para el caso  $n = 4$  de Katz y Zahl es  $3 + \frac{1}{600}(\sqrt{17665} - 97) = 3,059895\dots$

## Capítulo 3

# Relación de los problemas de Kakeya con otros problemas

En este último capítulo vamos a estudiar la relación de los problemas de Kakeya con otros problemas del Análisis Armónico. Esto es interesante por dos motivos: primero, ayuda a entender la importancia que tienen hoy en día los problemas de Kakeya; y segundo, muchos de los métodos usados en los distintos problemas pueden ayudar a estudiar los problemas relacionados con ellos.

En particular, en la primera sección vamos a ver la relación que tiene con el problema de restricción; y en la segunda sección la relación con la conjetura de Bochner-Riesz. La relación conocida entre estas conjeturas es que la conjetura de Bochner-Riesz implica la conjetura de restricción, y que esta última implica la conjetura maximal de Kakeya. Sin embargo, históricamente gracias a resultados parciales se han dado progresos también mediante las implicaciones contrarias.

En este capítulo la referencia principal ha sido [19], donde en el capítulo 19 se estudia el problema de restricción, y en el 21 el problema de los multiplicadores de Fourier. Para el resultado que relaciona la conjetura de restricción con la conjetura maximal de Kakeya nos hemos basado en la demostración que da este libro. Para el resultado que relaciona la conjetura de Bochner-Riesz con la de restricción hemos seguido la prueba original de [25]. Para completar el capítulo también han sido muy útiles las notas de Wisewell [27] y el libro de Duoandikoetxea [6].

### 3.1. El problema de restricción

La conjetura de restricción es un problema importante del análisis armónico. El problema tiene varias aplicaciones importantes como, por ejemplo, en ecuaciones en derivadas parciales. El objetivo de esta sección es demostrar que si se cumple la conjetura de restricción, entonces se cumple la conjetura maximal de Kakeya.

Primero, vamos a introducir el problema de restricción. Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  y  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces, la transformada de Fourier de  $f$ ,  $\widehat{f}$ , es una función continua y acotada, y se cumple  $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(S)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ . Sin embargo, supongamos que  $S$  es una

hipersuperficie de  $\mathbb{R}^n$  de medida nula y que  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  para cierto  $p > 1$ . Entonces, en principio no podemos definir  $\widehat{f}$  en  $S$ , porque  $\widehat{f}$  está definida en casi todo punto, y  $S$  tiene medida nula.

A pesar de esto sí que existen algunos resultados positivos. Supongamos que  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , y se cumple la estimación  $\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \leq C(p, q)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ . Entonces por continuidad, si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , podemos definir la restricción de  $\widehat{f}$  sobre  $S$  como una función de  $L^q(S)$ . Una estimación así nunca será posible si  $S$  está contenida en un hiperplano (salvo para  $p = 1$ ), pero cuando  $S$  tiene curvatura no nula la cosa puede cambiar.

El caso en el que  $S = \mathbb{S}^{n-1}$  es de especial interés. En este caso, como vamos a ver, el problema está relacionado con los problemas de Kakeya, y también con los multiplicadores de Bochner-Riesz. Entonces, en esta sección estamos interesados en buscar para qué valores de  $p$  y  $q$  se cumplen desigualdades del tipo

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C(n, p, q)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.1)$$

Durante este capítulo, cuando escribimos  $\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})}$ , entendemos que estamos calculando la norma  $L^q(\mathbb{S}^{n-1})$  de la transformada de Fourier de la función  $f$  restringida a la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ .

Por dualidad, puede verse que la desigualdad (3.1) es equivalente a

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p, q)\|f\|_{L^{q'}(\mathbb{S}^{n-1})}. \quad (3.2)$$

La definición de la transformada de Fourier de una función definida en  $\mathbb{S}^{n-1}$  puede verse en la Definición A.2.1. En esta sección nos vamos a centrar en esta última desigualdad, pero en la siguiente sección usaremos más la primera estimación (3.1). Para la desigualdad (3.2), tenemos la siguiente conjetura.

**Conjetura 5.** (Conjetura de restricción) Sean  $q > \frac{2n}{n-1}$  y  $f \in L^q(\mathbb{S}^{n-1})$ . Entonces,

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, q)\|f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})}. \quad (3.3)$$

Fue Stein quien dio los primeros pasos en la restricción de la transformada de Fourier, y completó los resultados con Fefferman en [8]. Ahí probaron que la conjetura de restricción es cierta para  $n = 2$ . Se conocen algunos resultados parciales para  $n \geq 3$ , pero el problema está abierto en su máxima generalidad. Destaca el resultado de Stein-Tomas que dice que se cumple  $\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}$ , para todo  $q \geq 2(n+1)/(n-1)$ . Tomas [26] probó el caso  $q > 2(n+1)/(n-1)$  y Stein [23] el caso  $q = 2(n+1)/(n-1)$ .

Nosotros nos vamos a centrar en el resultado que nos interesa, es decir, que la conjetura de restricción implica la conjetura maximal de Kakeya. Primero, necesitamos el siguiente lema, que nos da una acotación de la transformada de Fourier en un caso concreto.

**Lema 3.1.1.** Sean  $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  y  $0 < \delta < 1$ . Definimos  $C_\delta = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : 1 - x \cdot e_n \leq \delta^2\}$  y  $f = \chi_{C_\delta}$ . Entonces, para  $c = \frac{1}{12n}$ , tenemos que

$$|\widehat{f}(\xi)| \geq \frac{\sigma^{n-1}(C_\delta)}{2}, \quad \forall \xi \in R_\delta,$$

donde  $R_\delta = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi_j| \leq \frac{c}{\delta}, j = 1, \dots, n-1; |\xi_n| \leq \frac{c}{\delta^2}\}$ .

*Demostración.* Primero, observamos que  $C_\delta$  es un casquete esférico de radio  $\delta$ . Más precisamente, si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in C_\delta$ , se cumple  $|x_j| \leq \sqrt{2}\delta$ , para  $j = 1, \dots, n-1$ . Por otro lado, tomando  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{C_\delta} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \right| = \left| \int_{C_\delta} e^{-2\pi i \xi \cdot (x - e_n)} dx \right| \geq \int_{C_\delta} \cos(2\pi \xi \cdot (x - e_n)) dx. \quad (3.4)$$

donde hemos usado que  $|e^{-2\pi i \xi \cdot e_n}| = 1$  y que el valor absoluto de un número complejo es mayor o igual que el valor absoluto de su parte real. Ahora, para  $x \in C_\delta$ , y  $\xi \in R_\delta$ ,

$$\begin{aligned} |2\pi \xi \cdot (x - e_n)| &\leq 2\pi (|\xi_1 x_1| + \dots + |\xi_{n-1} x_{n-1}| + |\xi_n (x_n - 1)|) \\ &\leq 2\pi \left( (n-1) \frac{c}{\delta} \sqrt{2}\delta + \frac{c}{\delta^2} \delta^2 \right) < 2\pi \frac{\sqrt{2}}{12} < \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Entonces, por la definición de  $\cos(x)$  se sigue

$$\cos(2\pi \xi \cdot (x - e_n)) > 1/2, \quad \text{para } x \in C_\delta, \xi \in R_\delta,$$

y en consecuencia, por (3.4),

$$|\widehat{f}(\xi)| \geq \sigma^{n-1}(C_\delta)/2, \quad \text{para } \xi \in R_\delta.$$

□

**Observación 3.1.2.** El anterior lema es invariante con respecto a la dirección. Hemos tomado el vector  $e_n$  para facilitar la notación, pero el lema sigue siendo cierto tomando cualquier otro  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ , con los conjuntos  $C_\delta$  y  $R_\delta$  rotados.

Precisamente, el siguiente es el teorema principal de la sección. Como vamos a ver, se van a utilizar las desigualdades de Khintchine y, para ello, vamos a necesitar las funciones de Rademacher. Esto está explicado en la Definición A.1.8 y el Teorema A.1.9 del apéndice A.

**Teorema 3.1.3.** Sea  $\frac{2n}{n-1} < q < \infty$ , y supongamos que se cumple la conjetura de restricción, es decir, supongamos que

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, q) \|f\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})}, \quad \forall f \in L^q(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Entonces, para  $p = \frac{q}{q-2}$  y para todo  $\delta \in (0, 1)$ , se tiene

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C(n, q) \delta^{\frac{4n}{q} - 2(n-1)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n). \quad (3.5)$$

En particular, se cumple la conjetura maximal de Kakeya.

*Demostración.* Primero, vamos a demostrar la desigualdad (3.5) y luego vamos a deducir la conjetura maximal de Kakeya a partir de esta desigualdad.

Tomamos  $p' = q/2$ . Sean  $\{e_1, \dots, e_m\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un conjunto  $\delta$ -separado,  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$  y  $t_1, \dots, t_m$  números positivos tales que

$$\delta^{n-1} \sum_{k=1}^m t_k^{p'} \leq 1. \quad (3.6)$$

Definimos los tubos  $T_k = T_{e_k}^\delta(a_k)$ . Por la Proposición 1.2.7, sabemos que para demostrar la desigualdad (3.5) es suficiente probar que

$$\left\| \sum_{k=1}^m t_k \chi_{T_k} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, q) \delta^{\frac{4n}{q} - 2(n-1)}. \quad (3.7)$$

Para ello, tomamos las dilataciones  $\tau_k = \delta^{-2}T_k$ ; es decir,  $\tau_k$  es un tubo centrado en  $\delta^{-2}a_k$ , con dirección  $e_k$ , longitud  $\delta^{-2}$  y radio  $\delta^{-1}$ . Ahora, para  $k = 1, \dots, m$ , definimos los conjuntos

$$S_k = \{e \in \mathbb{S}^{n-1} : 1 - e \cdot e_k \leq C^{-2}\delta^2\}.$$

Así,  $S_k$  es un casquete esférico de radio  $C^{-1}\delta$  y centro  $e_k$ . Aquí, elegimos la constante  $C$  lo suficientemente grande para que los  $S_k$  sean disjuntos dos a dos. Definimos  $f_k(e) = \exp(2\pi i \delta^{-2} a_k \cdot x) \chi_{S_k}(e)$ . Así, se tiene  $\|f_k\|_\infty = 1$ ,  $\text{supp } f_k \subset S_k$  y por la propiedad (i) de la Proposición A.2.2,

$$\widehat{f}_k(\xi) = \widehat{\chi}_{S_k}(\xi - \delta^{-2}a_k).$$

Por otro lado, por el Lema 3.1.1, podemos tomar  $C$  suficientemente grande (pero solo dependiendo de  $n$ ) para que  $\tau_k \subset a_k \delta^{-2} + R_\delta$ , donde  $R_\delta$  es el conjunto definido en el lema. Entonces, por el Lema 3.1.1, tenemos que

$$|\widehat{f}_k(\xi)| = |\widehat{\chi}_{S_k}(\xi - \delta^{-2}a_k)| \geq \frac{\sigma^{n-1}(S_k)}{2} \geq C\delta^{n-1}.$$

para todo  $\xi - \delta^{-2}a_k \in R_\delta$ , y en consecuencia, para todo  $\xi \in \tau_k$ .

Ahora, sean  $s_1, \dots, s_m \geq 0$  y definimos  $F(e, x) = \sum_{k=1}^m r_k(x) s_k f_k(e)$ , para  $(e, x) \in \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$ , donde  $r_1, \dots, r_m$  son las primera  $m$  funciones de Rademacher. Primero, si tomamos  $f_x(e) = F(e, x)$ , entonces, como el soporte de las funciones  $f_k$  está en  $S_k$ , y los conjuntos  $S_k$  son disjuntos, se tiene

$$\begin{aligned} \|f_x\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})}^q &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left| \sum_{k=1}^m r_k s_k f_k(e) \right|^q d\sigma^{n-1}(e) = \sum_{k=1}^m \int_{S_k} |r_k s_k f_k(e)|^q d\sigma^{n-1}(e) \\ &= \sum_{k=1}^m s_k^q \int_{S_k} |f_k(e)|^q d\sigma^{n-1}(e), \end{aligned}$$



y como  $\|f_k\|_\infty = 1$ ,

$$\|f_x\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})}^q \leq \sum_{k=1}^m s_k^q \int_{S_k} d\sigma^{n-1}(e) = \sum_{k=1}^m s_k^q \sigma^{n-1}(S_k) \approx \delta^{n-1} \sum_{k=1}^m s_k^q. \quad (3.8)$$

Por otro lado, por el teorema de Fubini (ver Teorema A.1.3),

$$\int_0^1 \|\widehat{f_x}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q dx = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f_x}(\xi)|^q d\xi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\widehat{f_x}(\xi)|^q dx d\xi,$$

y si escribimos  $g_\xi(x) = \widehat{f_x}(\xi) = \sum_{k=1}^m r_k(x) s_k \widehat{f_k}(\xi)$ , entonces por las desigualdades de Khintchine (Proposición A.1.9),

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|\widehat{f_x}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |g_\xi(y)|^q dy d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \|g_\xi\|_{L^q([0,1])}^q d\xi \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^m |s_k \widehat{f_k}(\xi)|^2 \right)^{q/2} d\xi \geq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^m s_k^2 |\widehat{f_k}(\xi)|^2 \chi_{\tau_k}(\xi) \right)^{q/2} d\xi. \end{aligned}$$

Y, como hemos visto, para  $x \in \tau_k$ , se cumple  $|\widehat{f_k}(\xi)| \geq C\delta^{n-1}$ , así que

$$\int_0^1 \|\widehat{f_x}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q dy \geq C\delta^{q(n-1)} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^m s_k^2 \chi_{\tau_k}(\xi) \right)^{q/2} d\xi. \quad (3.9)$$

Por último, suponiendo cierta la conjetura de restricción, tenemos que

$$\|\widehat{f_x}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_x\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})}. \quad (3.10)$$

Aplicando en orden las desigualdades (3.9), (3.10) y (3.8),

$$\begin{aligned} \delta^{q(n-1)} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^m s_k^2 \chi_{\tau_k}(\xi) \right)^{q/2} d\xi &\lesssim \int_0^1 \|\widehat{f_x}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q dx \lesssim \int_0^1 \|f_x\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})}^q dx \\ &\lesssim \int_0^1 \delta^{n-1} \sum_{k=1}^m s_k^q dx = \delta^{n-1} \sum_{k=1}^m s_k^q. \end{aligned}$$

Ahora, elegimos  $s_k = \sqrt{t_k}$ , y así por (3.6),

$$\delta^{n-1} \sum_{k=1}^m s_k^q = \delta^{n-1} \sum_{k=1}^m t_k^{q/2} = \delta^{n-1} \sum_{k=1}^m t_k^{p'} \leq 1.$$

Sustituyéndolo en la anterior desigualdad, y haciendo el cambio de variable  $y = \delta^2 \xi$ ,  $\tau_k$  se convierte en  $T_k$ , por lo que se tiene

$$1 \gtrsim \delta^{q(n-1)} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^m s_k^2 \chi_{\tau_k}(\xi) \right)^{p'} d\xi = \delta^{q(n-1)} \delta^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{k=1}^m t_k \chi_{T_k}(y) \right)^{p'} dy.$$

En consecuencia, elevándolo a  $1/p' = 2/q$ ,

$$\left\| \sum_{k=1}^m t_k \chi_{T_k} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left( \delta^{2n-q(n-1)} \right)^{2/q} = \delta^{\frac{4n}{q} - 2(n-1)},$$

y así tenemos la desigualdad (3.7) que queríamos probar.

Veamos ahora que la desigualdad (3.5) implica la conjetura maximal de Kakeya. Para ello, primero observamos que  $2(n-1) - 4n/q \rightarrow 0^+$  cuando  $q \rightarrow (2n/(n-1))^+$ . Entonces, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , podemos elegir  $q > 2n/(n-1)$  de forma que  $2(n-1) - 4n/q < \varepsilon$ . Además, eligiendo  $p = q/(q-2)$  vemos que  $p < n$  y aplicando la desigualdad (3.5), tenemos

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{\frac{4n}{q} - 2(n-1)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \delta^{-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Por otro lado, por la Proposición 1.2.2 tenemos la desigualdad

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Así, interpolando estas dos desigualdades con el Teorema de Marcinkiewicz A.1.7, obtenemos

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^n(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \delta^{-\varepsilon} \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}.$$

Es decir, se cumple la conjetura maximal de Kakeya.  $\square$

## 3.2. Los multiplicadores de Bochner-Riesz

Los multiplicadores son otro importante tema en el análisis armónico. Aquí, nos vamos a centrar en el problema de los multiplicadores de Bochner-Riesz.

Empezamos definiendo qué es un multiplicador.

**Definición 3.2.1.** Sea  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  una función acotada. Definimos el *operador multiplicador* de  $m$ , denotado por  $T_m$ , el operador que a cualquier función  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  le asigna

$$T_m f = \left( m \widehat{f} \right)^\vee.$$

Es decir,  $T_m$  cumple

$$\widehat{T_m f} = m \widehat{f}.$$

Nos interesa saber si estos operadores están acotados entre diferentes espacios. Un resultado muy sencillo es el siguiente, valido para todo  $n \geq 2$ .

**Proposición 3.2.2.**  $T_m$  es un operador lineal acotado de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* La linealidad se sigue por la linealidad de la transformada de Fourier (ver la Proposición A.2.2). Para ver que es acotado, aplicamos el teorema de Plancherel (Teorema A.2.6),

$$\|T_m f\|_2 = \|\widehat{T_m f}\|_2 = \|m \widehat{f}\|_2 \leq \|m\|_\infty \|\widehat{f}\|_2 = \|m\|_\infty \|f\|_2.$$

$\square$

Relacionado con esto, tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.2.3.** Decimos que la función  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  es un multiplicador- $L^p$  para  $1 \leq p \leq \infty$  si el operador  $T_m$  puede extenderse a  $L^p(\mathbb{R}^n)$  como un operador acotado de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

El siguiente es un resultado importante probado por Fefferman en [9]. No vamos a demostrarlo, pero nos sirve como motivación para definir el multiplicador de Bochner-Riesz.

**Teorema 3.2.4.** Para  $n \geq 2$ , la función característica de la bola unidad,  $m = \chi_{B(0,1)}$ , es un multiplicador- $L^p$  si y solo si  $p = 2$ .

Ahora, vamos a transformar la función característica del anterior teorema para intentar agrandar el rango de los  $p$  para los que la función sea un multiplicador- $L^p$ .

**Definición 3.2.5.** Definimos el *multiplicador de Bochner-Riesz* con parámetro  $\delta > 0$ , denotado por  $m_\delta$  como

$$m_\delta(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^\delta, \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $a_+ = \max\{a, 0\}$ . Así, el operador multiplicador asociado es

$$S_\delta f = \left( m_\delta \hat{f} \right)^\vee.$$

Relacionado con este multiplicador, se tiene la siguiente conjetura.

**Conjetura 6.** (Conjetura de Bochner-Riesz) Para todo  $1 \leq p \leq \infty$  y para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $m_{\delta(p)+\varepsilon}$  es un multiplicador- $L^p$ , donde

$$\delta(p) = \max \left\{ n \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2}, 0 \right\}.$$

Un resultado muy importante aquí es que la conjetura de Bochner-Riesz implica la conjetura de restricción. Esta es una prueba complicada, que requiere de muchas herramientas específicas del análisis armónico. Entrar en todos los detalles está fuera del alcance de este trabajo, así que nos vamos a limitar a esbozar la prueba original de [25]. No vamos a detallar todo, pero veremos los pasos generales para probarla.

Primero tenemos que definir algunos términos. Vamos a decir que se cumple  $BR(p, \varepsilon)$ , si  $m_{\delta(p)+\varepsilon}$  es un multiplicador- $L^p$ . Así, la conjetura dice que se cumple  $BR(p, \varepsilon)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$  y para todo  $\varepsilon > 0$ .

Por otro lado, no vamos a demostrar la estimación (3.3) de la conjetura de restricción, sino que vamos a ver que se cumple la estimación equivalente

$$\|\hat{f}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.11)$$

para todo  $1 \leq p < 2n/(n+1)$ . Que estas estimaciones son equivalentes puede verse por dualidad (esto está demostrado en el capítulo 19 del libro [19]). Vamos a decir que se cumple  $R(p, \varepsilon)$  si se cumple

$$\|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim R^\varepsilon \|f\|_{L^p(B(0,R))}, \quad (3.12)$$

para toda función  $f$  tal que  $\text{supp } f \subset B(0, R)$ . Así, la conjetura de restricción dice que se cumple  $R(p, 0)$  para todo  $1 \leq p < 2n/(n+1)$ .

Primero vamos a relacionar  $BR(p, \varepsilon)$  con  $R(p, \varepsilon)$  y luego deduciremos de ahí el  $R(p, 0)$  que nos interesa.

Empezamos con un lema que ayuda a simplificar un operador cuando trabajamos con las normas. Como vamos a ver, esto nos va a ser de gran utilidad en el siguiente teorema.

**Lema 3.2.6.** *Para toda  $R \gg 1$ , sea  $K_R(x, y)$  una función acotada y con soporte compacto, donde la acotación y el soporte no dependen de  $R$ . Sean  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Supongamos que  $b(x, y, \tau)$  es una función acotada, que es de clase  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  respecto de la variable  $x$  y  $C^\infty(\mathbb{R})$  respecto de  $\tau$  para  $0 \leq \tau \lesssim 1$  y que  $x, y$  toman valores en el soporte de  $K$ . Definimos los operadores  $A_R$  y  $B_R$  como*

$$A_R f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_R(x, y) f(y) dy; \quad B_R f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_R(x, y) b(x, y, 1/R) f(y) dy.$$

Entonces, para todo  $N > 0$  se tiene

$$\|B_R f\| \lesssim \|A_R f\| + O(R^{-N}).$$

*Demostración.* Como  $x, y$  tienen soporte compacto, podemos descomponer la función  $b$  en la serie de Fourier respecto de  $x$  y en la serie de Taylor respecto de  $\tau$  (ver Teorema A.1.1). De esta manera, se puede escribir

$$b(x, y, \tau) = \sum_{j=0}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_{j,k} \tau^j e^{2\pi i k \cdot x} f_{j,k}(y) + O(\tau^{N+1}),$$

donde las funciones  $f_{j,k}$  son uniformemente acotadas, las constantes  $c_{j,k}$  son constantes rápidamente decrecientes respecto de  $k$  y  $N$  es un número suficientemente grande.

Entonces, por la definición de  $A_R$  y  $B_R$  y por la linealidad de la integral, se cumple

$$B_R f(x) = \sum_{j=0}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_{j,k} R^{-j} e^{2\pi i k \cdot x} A_R(f_{j,k} f)(x) + O(R^{-(N+1)}).$$

Ahora, por la desigualdad triangular, se sigue

$$\begin{aligned} \|B_R f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \sum_{j=0}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_{j,k} \|A_R(f_{j,k} f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + O(R^{-N}) \\ &\lesssim \sum_{j=0}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_{j,k} \|A_R f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + O(R^{-N}) \lesssim \|A_R f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + O(R^{-N}), \end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad hemos usado que las funciones  $f_{j,k}$  son uniformemente acotadas y en la última que las constantes  $c_{j,k}$  son rápidamente decrecientes. Así, tenemos que se cumple el lema.  $\square$

En particular, si en el anterior lema tomamos  $b(x, y, \tau) = e^{ia(x,y,\tau)}$  las normas de los operadores  $A_R$  y  $B_R$  son comparables. Así lo vamos a utilizar en el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.7.** *Sea  $1 \leq p \leq \frac{2n}{n+1}$ . Entonces,  $BR(p, \varepsilon) \Rightarrow R(p, 2\varepsilon)$ .*

*Demostración.* Primero, observamos que como  $p \leq \frac{2n}{n+1}$ , entonces  $\delta(p) = n(1/p - 1/2) - 1/2 \geq 0$ . Supongamos que se cumple  $BR(p, \varepsilon)$ , es decir, supongamos que para  $\delta = \delta(p) + \varepsilon$  se cumple

$$\|S_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

donde  $S_\delta$  es el operador asociado al multiplicador de Bochner-Riesz. Tenemos que ver que en este caso se cumple  $R(p, 2\varepsilon)$ , es decir, que para toda función  $f$  con soporte en  $B(0, R)$ , se cumple

$$\|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim R^{2\varepsilon} \|f\|_{L^p(B(0,R))}.$$

Fijamos una función  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con soporte en  $B(0, R)$ . Por la definición del multiplicador de Bochner-Riesz, se tiene

$$\begin{aligned} S_\delta f(x) &= \left(m_\delta \widehat{f}\right)^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 - |\xi|^2)_+^\delta f(y) e^{2\pi i \xi \cdot (x-y)} dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} (1 - |\xi|^2)_+^\delta e^{2\pi i \xi \cdot (x-y)} d\xi dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \psi(x, y) dy, \end{aligned}$$

donde en la segunda línea hemos usado el teorema de Fubini (Teorema A.1.3) y hemos tomado  $\psi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 - |\xi|^2)_+^\delta e^{2\pi i \xi \cdot (x-y)} d\xi$ . Así,  $\psi$  tiene soporte en el conjunto  $|x|, |y| \lesssim 1, |x - y| \approx 1$ . Ahora, vamos a aplicar el anterior Lema 3.2.6 con  $K(x, y) = \psi(x, y)$ ,  $A_R = S_\delta$  y  $B_R = G_R$ , donde

$$G_R f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i R|x-y|} \psi(x, y) f(y) dy.$$

Así, por el anterior lema tenemos,

$$\|G_R f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|S_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + O(R^{-N}) \lesssim R^{-n/p'} R^\varepsilon \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.13)$$

donde la segunda desigualdad es consecuencia de la reducción de Carleson-Sjölin. No vamos a entrar en detalles, pero como consecuencia de la reducción de Carleson-Sjölin, tenemos esta acotación  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $S_\delta$ . Esto puede encontrarse en [11].

Ahora, si tomamos  $R^2$  en lugar de  $R$  y hacemos el cambio de variable  $\tilde{y} = y/R$ , obtenemos

$$G_{R^2} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i R^2|x-R\tilde{y}|} \psi(x, R\tilde{y}) f(R\tilde{y}) R^n d\tilde{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\psi}(x, \tilde{y}) g(\tilde{y}) d\tilde{y},$$

donde  $g(\tilde{y}) = f(R\tilde{y})$  es una función con soporte en  $B(0, 1)$ , y  $\tilde{\psi}(x, \tilde{y}) = \exp(2\pi i R^2|x - R\tilde{y}|)\psi(x, R\tilde{y})$ . Ahora, vamos a restringir  $x, \tilde{y}$  a la región  $|x| \approx 1, |\tilde{y}| \lesssim 1$ . De nuevo, por el anterior Lema 3.2.6, si definimos

$$\begin{aligned} \|T_R g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|G_{R^2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + O(R^{-N}) \lesssim R^{-2n/p'} R^{2\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + O(R^{-N}) \\ &= R^{n/p} R^{-2n/p'} R^{2\varepsilon} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + O(R^{-N}) \lesssim R^{-n/p'} R^{2\varepsilon} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ahora, utilizando la aproximación por serie de Taylor, podemos escribir

$$|R^2 x - R\tilde{y}| = R^2|x| - R\frac{x}{|x|} \cdot \tilde{y} + a(x, \tilde{y}, 1/R),$$

donde  $a(x, \tilde{y}, \tau)$  es una función acotada de clase  $C^\infty$  en  $x$  y  $\tau$  para  $|x| \approx 1, 0 \leq \tau \lesssim 1, |\tilde{y}| \lesssim 1$ . De nuevo, por el Lema 3.2.6, el error en la fase  $a(x, \tilde{y}, 1/R)$  puede eliminarse, así como la dependencia de  $\tilde{y}$  de la función amplitud  $\tilde{\psi}(x, \tilde{y})$ . Así,  $T_R$  puede reemplazarse por  $\widetilde{T}_R$  en (3.14), donde

$$\widetilde{T}_R g(x) = \psi(x) e^{2\pi i R^2|x|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i R\frac{x}{|x|} \cdot \tilde{y}} g(\tilde{y}) d\tilde{y} = \psi(x) e^{2\pi i R^2|x|} \widehat{g}(Rx/|x|),$$

y  $\psi$  es una función con soporte en  $\{|x| \approx 1\}$ . Por último, reescalando, se sigue  $R(p, 2\varepsilon)$ .  $\square$

Ahora, el objetivo es deducir  $R(p, 0)$ . Para ello, empezamos con una definición que nos va a ser de gran utilidad.

**Definición 3.2.8.** Decimos que una colección de bolas  $\{B(x_i, R)\}_{i=1}^N$  es *dispersa* si los centros  $\{x_i\}_{i=1}^N$  son  $R^C N^C$ -separados para cierta constante  $C > 0$ .

En el siguiente lema vamos a ver que si se cumple  $R(p, \varepsilon)$ , podemos deducir la estimación (3.12) no solo para las funciones con soporte en la bola  $B(0, R)$  sino que para toda función con soporte en una colección dispersa de bolas.

**Lema 3.2.9.** *Supongamos que se cumple  $R(p, \varepsilon)$  para algún  $\varepsilon > 0$  y  $1 < p < 2$ . Entonces,*

$$\|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim R^\varepsilon \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para toda función  $f$  con soporte en  $\bigcup_{i=1}^N B(x_i, R)$  donde  $\{B(x_i, R)\}_{i=1}^N$  es una colección dispersa de bolas.

*Demostración.* Tomamos  $A_R$  la corona circular de radio  $\approx 1/R$  alrededor de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Ahora, si tomamos una función con soporte en  $B(0, R)$ , como consecuencia de  $R(p, \varepsilon)$  se cumple

$$\|\widehat{f}\|_{L^p(A_R)} \lesssim R^{-1/p} R^\varepsilon \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.15)$$

Además, gracias a la invariancia por traslación, se cumple esta estimación para toda función  $f$  con soporte en  $B(x, R)$ . Para ver esto último, observamos que si  $f$  tiene soporte en  $B(x, R)$ ,

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{L^p(A_R)} &= \int_{A_R} \left| \int_{B(x,R)} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \right|^p d\xi \\ &= \int_{A_R} \left| \int_{B(0,R)} h(z) e^{-2\pi i \xi \cdot z} dz \right|^p d\xi = \|\widehat{h}\|_{L^p(A_R)}, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable  $z = y - x$  y definiendo  $h(z) = f(z + x)$ , que tiene soporte en  $B(0, R)$  y cumple  $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ .

Tomamos ahora una función  $f$  con soporte en  $\bigcup_{i=1}^N B(x_i, R)$  como en el lema. Gracias a las propiedades de las funciones de clase Schwartz, podemos descomponer  $f = \sum_{i=1}^N f_i \varphi_i$ , donde  $f_i$  tiene soporte en  $B(x_i, R)$ , y  $\varphi_i(x) = \varphi(\frac{x-x_i}{R})$ , con  $\varphi$  una función de clase Schwartz, que es positiva en la bola unidad, y cuya transformada de Fourier tenga soporte en la bola unidad. Además, tenemos que se cumplen las dos siguientes igualdades,

$$\widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \sum_{i=1}^N (\widehat{f}_i|_{A_R}) * (\widehat{\varphi}_i|_{\mathbb{S}^{n-1}}), \quad (3.16)$$

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \approx \left( \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p}. \quad (3.17)$$

Entonces, como consecuencia de (3.15), el lema se va a seguir si probamos la estimación

$$\left\| \sum_{i=1}^N F_i * \widehat{\varphi}_i \right\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim R^{1/p} \left( \sum_{i=1}^N \|F_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p}, \quad (3.18)$$

para toda función  $F_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Nuestro objetivo va a ser ver que se cumple la estimación (3.18) para  $p = 1$  y  $p = 2$ . Gracias al Teorema de interpolación de Marcinkiewicz A.1.7, de estos dos casos se deduce que se cumple para todo  $1 < p < 2$ .

El caso fácil es  $p = 1$ , donde primero por las definiciones de la norma  $L^1$  y de la convolución,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^N F_i * \widehat{\varphi}_i \right\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} &\leq \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |F_i(x) \widehat{\varphi}_i(e-x)| dx d\sigma^{n-1}(e) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |F_i(x)| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\widehat{\varphi}_i(e-x)| d\sigma^{n-1}(e) dx \\ &\lesssim R \sum_{i=1}^N \|F_i\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

donde en la segunda línea hemos usado el Teorema de Fubini A.1.3.

El caso  $p = 2$  es más complicado y necesitamos una gran cantidad de herramientas, por lo que no lo vamos a demostrar. Lo vamos a dar por bueno y vamos a seguir con la prueba. Así, como hemos dicho, por interpolación esto implica que se cumple (3.18) para todo  $1 < p < 2$ .

En resumen, tenemos

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} &= \left\| \sum_{i=1}^N \widehat{f}_i * \widehat{\varphi}_i \right\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim R^{1/p} \left( \sum_{i=1}^N \|\widehat{f}_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p} \\ &\lesssim R^\varepsilon \left( \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p} \approx R^\varepsilon \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

donde las desigualdades se siguen en orden de (3.16), (3.18), (3.15) y (3.17). Esto es precisamente lo que queríamos probar.  $\square$

El siguiente va a ser un lema de combinatoria, en el que vamos a contar el número de colecciones dispersas de bolas necesarias para recubrir ciertos conjuntos. En el siguiente teorema veremos por qué nos interesa esto, pero primero, necesitamos una definición para entender los conjuntos que vamos a recubrir.

**Definición 3.2.10.** Decimos que un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  es un  $c$ -cubo para cierta constante  $c > 0$  si  $E = [x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \times \dots \times [x_n, y_n]$ , con  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  y  $y_i - x_i = c$  para toda  $i = 1, \dots, n$ .

**Lema 3.2.11.** Sean  $E$  unión de  $c$ -cubos y  $N \geq 1$ . Entonces, existen  $\approx N \mathcal{L}^n(E)^{1/N}$  colecciones de bolas dispersas que recubren  $E$  y tales que las bolas en cada colección tienen radio  $\approx \mathcal{L}^n(E)^{C/N}$ , para cierta constante  $C > 0$ .

*Demostración.* Definimos el radio  $R_k$  para  $0 \leq k \leq N$  de manera inductiva como  $R_0 = 1$ ,  $R_{k+1} = \mathcal{L}^n(E)^C R_k^C$ . De esta manera,  $R_k \approx \mathcal{L}^n(E)^{C^k}$  para todo  $k$ .

Definimos  $E_0 = \emptyset$  y para  $k \geq 1$ , vamos a definir  $E_k$  de manera inductiva como el conjunto de los puntos  $x \in E$  que no están en ningún  $E_j$  para  $j < k$ , y que cumplen

$$\mathcal{L}^n(E \cap B(x, R_k)) \leq \mathcal{L}^n(E)^{k/N}.$$

De esta manera, queda claro que  $E = \bigcup_{k=1}^N E_k$ . Ahora, el objetivo es recubrir cada  $E_k$  con  $\approx \mathcal{L}^n(E)^{1/N}$  colecciones de bolas dispersas. Si hacemos esto, vemos que  $\approx N \mathcal{L}^n(E)^{1/N}$  colecciones de bolas dispersas recubren  $E$ , que es lo que queremos probar.

Fijamos  $1 \leq k \leq N$  y sea  $x \in E_k$ . Por construcción se tiene que  $x \notin E_{k-1}$  y en consecuencia,

$$\mathcal{L}^n(E)^{(k-1)/N} \lesssim \mathcal{L}^n(E \cap B(x, R_{k-1})) \leq \mathcal{L}^n(E \cap B(x, R_k)) \leq \mathcal{L}^n(E)^{k/N}.$$

Entonces, para todo  $x \in E_k$  el conjunto  $E_k \cap B(x, R_k)$  puede recubrirse por  $\approx \mathcal{L}^n(E)^{1/N}$  bolas de radio  $R_{k-1}$ . Ahora, tomamos  $\{x_j\}$  un conjunto  $R_k$ -separado



maximal de  $E_k$ , y así para cada  $j$  existen  $\approx \mathcal{L}^n(E)^{1/N}$  bolas de radio  $R_{k-1}$  que recubren  $E_k \cap B(x_j, R_k)$ . Como vamos a ver, vamos a separar estas bolas en distintas colecciones, de forma que cada una de estas bolas esté en una colección dispersa de bolas.

Gracias a la maximalidad del conjunto  $\{x_j\}$ , la unión  $\bigcup_j B(x_j, R_k)$  recubrirá  $E_k$ . Además, tomando adecuadamente una bola de las que recubren  $E_k \cap B(x_j, R_k)$  para cada  $j$ , obtenemos una colección de bolas dispersas. Así, teniendo en cuenta todo esto, tenemos que existen  $\approx \mathcal{L}^n(E)^{1/N}$  colecciones de bolas  $R_k$ -separadas de radio  $R_{k-1}$  que recubren  $E_k$ . Como el cardinal de esas colecciones puede ser como mucho  $\approx \mathcal{L}^n(E)$ , vemos por la construcción de los  $R_k$  que las colecciones son dispersas.  $\square$

En el siguiente teorema vamos a ver que con nuestra hipótesis se cumple  $R(q, 0)$  para ciertos valores de  $q$ . Con esto vamos a tener todo lo necesario para demostrar la implicación entre las conjeturas que nos interesa.

**Teorema 3.2.12.** *Sean  $1 < p < 2$  y  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Entonces,  $R(p, \varepsilon) \Rightarrow R(q, 0)$  donde*

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} + \frac{C}{\log 1/\varepsilon}.$$

*Demostración.* Fijamos  $p < 2$  y  $\varepsilon > 0$ , y suponemos que se cumple  $R(p, \varepsilon)$ . Para probar que se cumple la conjetura de restricción  $R(q, 0)$  vamos a hacer algunas reducciones.

Primero, es suficiente probar que se cumple la estimación

$$\|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^{q_0, 1}(\mathbb{R}^n)} \tag{3.19}$$

donde  $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} + \frac{C}{\log 1/\varepsilon}$ . Si probamos esta estimación, se sigue  $R(q, 0)$  usando la desigualdad de Hölder y por interpolación con la estimación trivial  $(L^1, L^\infty)$ .

Además, mediante un proceso de localización de la función  $f$ , podemos reducirnos simplemente al caso en el que  $f$  es constante en los cubos de tamaño  $c$ , con  $c \approx 1$ . Además, como estamos trabajando en  $L^{q_0, 1}$ , podemos tomar  $f = \chi_E$  para algún conjunto  $E$  que sea unión de  $c$ -cubos. No vamos a entrar en más detalles en esto, pero resumiendo, para demostrar el teorema es suficiente probar (3.19) en este caso, es decir, teniendo en cuenta como hemos elegido  $q_0$  tenemos que probar

$$\|\widehat{\chi_E}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|\chi_E\|_{L^{q_0, 1}(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{q_0} \mathcal{L}^n(E)^{\frac{1}{q_0}} \approx \mathcal{L}^n(E)^{\frac{1}{p} + \frac{C}{\log(1/\varepsilon)}}. \tag{3.20}$$

Para ello, gracias al Lema 3.2.11, recubrimos  $E$  con  $\approx N \mathcal{L}^n(E)^{1/N}$  colecciones de bolas dispersas de radio  $\approx \mathcal{L}^n(E)^{C/N}$ . La unión de cada colección de bolas vamos a escribirla como  $E_j$ , para  $1 \leq j \lesssim N \mathcal{L}^n(E)^{1/N}$ . Por un recubrimiento de tipo Vitali, podemos asumir que  $\mathcal{L}^n(E_j) \lesssim \mathcal{L}^n(E)$ . Aplicamos el Lema 3.2.9 a cada  $\chi_{E_j}$ , y así obtenemos

$$\|\widehat{\chi_{E_j}}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \left( \mathcal{L}^n(E)^{C/N} \right)^\varepsilon \mathcal{L}^n(E)^{1/p}.$$

Ahora, como los  $E_k$  recubren  $E$ , por la desigualdad triangular,

$$\|\widehat{\chi}_E\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim N \mathcal{L}^n(E)^{1/N} \left( \mathcal{L}^n(E)^{C^N} \right)^\varepsilon \mathcal{L}^n(E)^{1/p}.$$

Por último, tomando  $N = C^{-1} \log(1/\varepsilon)$  para alguna constante  $C$  suficientemente grande obtenemos (3.20), tal y como queríamos.  $\square$

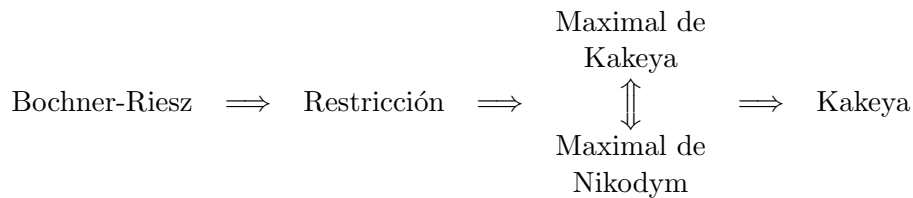
Por último, como corolario de los Teoremas 3.2.7 y 3.2.12, tenemos el resultado que nos interesa.

**Teorema 3.2.13.** *La Conjetura de Bochner-Riesz 6 implica la Conjetura de restricción 5.*

*Demostración.* Sean  $1 \leq p \leq \frac{2n}{n+1}$  y  $\varepsilon > 0$ . Suponiendo que se cumple la conjetura de Bochner-Riesz, se tiene  $BR(p, \varepsilon)$ , y por el Teorema 3.2.7, se cumple  $R(p, 2\varepsilon)$ . Además, por el Teorema 3.2.12, tenemos que se cumple  $R(q, 0)$  donde  $1/q > 1/p + C/\log(1/(2\varepsilon))$ . Como esto se tiene para todo  $\varepsilon > 0$ , se tiene  $R(q, 0)$  para todo  $1 \leq q < p$ , es decir, se cumple la conjetura de restricción.  $\square$

Mencionar que estos dos problemas están muy relacionados, y aunque esta implicación esté totalmente demostrada, también pueden darse resultados parciales en la otra dirección.

Como consecuencia directa del anterior teorema, combinándolo con el Teorema 3.1.3, tenemos que la conjetura de Bochner-Riesz implica la conjetura maximal de Takeya. Para terminar, resumimos abajo todas las implicaciones entre las conjeturas que hemos visto.



# Apéndice A

## Resultados básicos

Aquí vamos a enunciar una serie de resultados básicos que se han usado durante el trabajo.

### A.1. Análisis general

Primero, vamos a ver algunos resultados variados del análisis matemático.

Los siguientes son resultados clásicos del cálculo diferencial y de la teoría de la medida. Primero, vemos una versión del teorema de Taylor, tal y como lo hemos usado.

**Teorema A.1.1.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^{N+1}$  en  $[0, R]$ , es decir,  $f$  es  $N + 1$  veces derivable en  $[0, R]$ . Entonces, para  $x \in [0, R]$ ,*

$$f(x) = \sum_{j=0}^N \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + O(x^{N+1}),$$

donde  $f^{(j)}(0)$  es la derivada  $j$ -ésima de  $f$  en el punto 0, y  $j! = j \cdot (j - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  es el factorial de  $j$ ; por definición,  $0! = 1$ .

La siguiente desigualdad es muy conocida y utilizada.

**Teorema A.1.2.** *(Desigualdad de Hölder) Sean  $1 \leq p, q \leq \infty$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (decimos que  $p$  y  $q$  son conjugados) y  $f, g$  dos funciones medibles definidas en un espacio  $E$ . Entonces,*

$$\|fg\|_{L^1(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^q(E)}.$$

Otro resultado clásico que hemos utilizado es el teorema de Fubini.

**Teorema A.1.3.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable, es decir, que la integral en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  de su valor absoluto es finita. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right) dy$$

Otro resultado importante es el teorema del cambio de variable.

**Teorema A.1.4.** Sean  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación integrable y  $\phi : U \rightarrow V$  una aplicación biyectiva y diferenciable. Entonces,

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\phi(x)) |J\phi(x)| dx,$$

donde  $|J\phi(x)|$  es el valor absoluto del determinante de la matriz Jacobiana de  $\phi$ .

Las demostraciones de estos resultados pueden encontrarse en [21].

Necesitamos varios resultados de la teoría de interpolación de operadores. Empezamos con una definición.

**Definición A.1.5.** Sean  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  dos espacios de medida y sea  $T : X \rightarrow Y$  un operador acotado.

Decimos que  $T$  es de *tipo fuerte*  $(p, q)$  con norma  $\leq A$ , si

$$\|Tf\|_{L^q(Y, \nu)} \leq A \|f\|_{L^p(X, \mu)}$$

para toda  $f \in L^p(X, \mu)$ .

Decimos que  $T$  es de *tipo restringido fuerte*  $(p, q)$  con norma  $\leq A$ , si es de tipo fuerte  $(p, q)$  con norma  $\leq A$  para las funciones características de los conjuntos de medida finita, es decir, si

$$\|T\chi_E\|_{L^q(Y, \nu)} \leq A \|\chi_E\|_{L^p(X, \mu)} = A\mu(E)^{1/p},$$

para todo  $E \subset X$  tal que  $\mu(E) < \infty$ .

Decimos que  $T$  es de *tipo débil*  $(p, q)$  con norma  $\leq A$  si

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| \geq \lambda\}) \leq \left( \frac{A \|f\|_{L^p(X, \mu)}}{\lambda} \right)^q$$

para toda  $f \in L^p$  y todo  $0 < t \leq 1$ . Además, llamamos función de distribución de  $f$  en  $t$  respecto del operador  $T$  a  $\lambda_f(t) = \nu(\{y \in Y : |Tf(y)| \geq t\})$ .

Decimos que  $T$  es de *tipo restringido débil*  $(p, q)$  con norma  $\leq A$ , si es de tipo débil  $(p, q)$  con norma  $\leq A$  para las funciones características de los conjuntos con medida finita, es decir, si

$$\nu(\{y \in Y : |T\chi_E(y)| \geq t\}) \leq \left( \frac{A\mu(E)^{1/p}}{t} \right)^q$$

para todo  $E$  tal que  $\mu(E) < \infty$  y todo  $0 < t \leq 1$ . En este caso, escribiremos esta acotación como

$$\|T\chi_E\|_{q, \infty} \leq A \|\chi_E\|_{p, 1}.$$

Relacionado con esto, tenemos la siguiente identidad.

**Proposición A.1.6.** Sea  $f \in L^p(X, \mu)$ . Entonces se cumple la siguiente igualdad,

$$p \int_0^\infty t^{p-1} \mu \{x \in X : |f(x)| \geq t\} dt = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p. \quad (\text{A.1})$$

Uno de los teoremas más clásicos de la teoría de interpolación es el de Marcinkiewicz. Existen muchas versiones sobre él; nosotros enunciamos a continuación la versión que hemos necesitado.

**Teorema A.1.7.** (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz) Sean  $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$  y  $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$  con  $p_i \leq q_i$  para  $i = 0, 1$  y  $q_0 \neq q_1$ . Sea  $\theta \in (0, 1)$  y definimos  $p$  y  $q$  como

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \quad (\text{A.2})$$

Si  $T$  es un operador no negativo y sublineal de tipo débil  $(p_0, q_0)$  y de tipo fuerte  $(p_1, q_1)$ , de normas  $A_0$  y  $A_1$  respectivamente, entonces  $T$  es un operador de tipo fuerte  $(p, q)$  de norma  $\lesssim \max\{A_0, A_1\}$ , donde la constante depende de  $p_0, p_1, q_0, q_1$  y  $\theta$ .

En el libro de Bennett y Sharpley [1] se desarrolla ampliamente la teoría de operadores, y ahí puede encontrarse el anterior resultado.

La siguiente propiedad no es tan básica, pero tiene una gran cantidad de aplicaciones. Primero, necesitamos una definición.

**Definición A.1.8.** Definimos las funciones de Rademacher  $\{r_j\}_{j=0}^\infty$  que toman valores en el intervalo  $[0, 1]$  como  $r_j(t) = \text{sign}(\sin 2^j \pi t)$ , donde  $\text{sign}$  es la función signo.

Es decir,  $r_0(t) = 1$  para  $0 \leq t \leq 1$ ;  $r_1(t) = 1$  para  $0 \leq t \leq 1/2$ , y  $r_1(t) = -1$  para  $1/2 < t \leq 1$ ;  $r_2(t) = 1$  para  $0 \leq t \leq 1/4$  y  $1/2 < t \leq 3/4$ , y  $r_2(t) = -1$  para  $1/4 < t \leq 1/2$  y  $3/4 < t \leq 1$ ...

**Proposición A.1.9.** (Desigualdades de Khintchine) Sean  $1 < q < \infty$  y  $\{r_i(t)\}_{i=1}^\infty$  las funciones de Rademacher. Entonces, para  $\forall (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_2$ ,  $\exists A_q, B_q \geq 1$  tales que

$$A_q \left( \sum_{i=1}^\infty a_i^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i r_i(t) \right\|_{L^q([0,1])} \leq B_q \left( \sum_{i=1}^\infty a_i^2 \right)^{1/2}.$$

La demostración de esta desigualdad puede verse en [10] (Apéndice C).

## A.2. Análisis armónico

Ahora, vamos a ver los resultados pertenecientes al análisis armónico. Empezamos definiendo la transformada de Fourier de una función.

**Definición A.2.1.** Definimos la *transformada de Fourier* de una función  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  como

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Si  $f \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ , su transformada de Fourier la definimos como

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\sigma^{n-1}(x), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En la siguiente proposición enumeramos algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier. Un tipo importante de funciones aquí son las de clase de Schwartz, es decir, las funciones rápidamente decrecientes. Denotamos por  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  al espacio de estas funciones. En la subsección 2.2.1 del libro [10] puede encontrarse mucha información sobre ellas.

**Proposición A.2.2.** *La transformada de Fourier cumple las siguientes propiedades:*

- (i)  $\mathcal{F}(e^{2\pi i \alpha \cdot x} f)(\xi) = \widehat{f}(\xi - \alpha)$ ,  $\forall \alpha, \xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .
- (ii)  $\mathcal{F}(af + bg) = a\widehat{f} + b\widehat{g}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .
- (iii)  $\widehat{(f * g)} = \widehat{f} \widehat{g}$ ,  $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .
- (iv)  $\widehat{f}(\delta \xi) = \delta^{-n} \mathcal{F}(f(x/\delta))$ ,  $\forall \delta > 0$ ,  $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

El siguiente teorema muestra otra importante igualdad que nos permite recuperar una función conociendo su transformada de Fourier.

**Teorema A.2.3.** *(Formula de inversión) Supongamos que  $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces, para casi todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi.$$

Esta última fórmula justifica la siguiente definición.

**Definición A.2.4.** Definimos la *inversa de la transformada de Fourier* de una función  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  como

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi.$$

Para terminar, damos dos teoremas que muestran igualdades importantes relacionadas con la transformada de Fourier.

**Teorema A.2.5.** *(Teorema de Parseval) Sean  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \overline{\widehat{g}} dx.$$

**Teorema A.2.6.** (*Teorema de Plancherel*) Sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Los libros sobre Análisis Armónico que se han consultado para escribir el trabajo han sido los de L. Grafakos [10] y [11], y el de J. Duoandikoetxea [6]. Todas las igualdades aquí enunciadas y muchas más pueden verse demostradas por ejemplo en [10] en la proposición 2.2.11 y el teorema 2.2.14.





# Bibliografía

- [1] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press, Inc. 1988.
- [2] J. Bourgain, *Besicovitch Type Maximal Operators and Applications to Fourier Analysis*, *Geom. Funct. Anal.* **1** (1991), 147–187.
- [3] J. Bourgain, *On the Dimension of Kakeya Sets and Related Maximal Inequalities*, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), 256–282.
- [4] A. Córdoba, *The Kakeya Maximal Function and the Spherical Summation Multipliers*, *American Journal of Mathematics* **99** (1977), 1-22.
- [5] R.O. Davies, *Some remarks on the Kakeya problem*, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **69** (1971), 417–421.
- [6] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics Volume 29, American Mathematical Society, 2001.
- [7] Z. Dvir, *On the size of Kakeya sets in finite fields*, *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), 1093–1097.
- [8] C. Fefferman, *Inequalities for strongly singular convolution operators*, *Acta Math.* **124**, (1970), 9–36.
- [9] C. Fefferman, *The multiplier problem for the ball*, *Ann. of Math. (2)* **94**, (1971), 330–336.
- [10] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer-Verlag, 2008.
- [11] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Springer-Verlag, 2009.
- [12] B. Green *Restriction and Kakeya Phenomena*, 2013.
- [13] J. Hickman, K.M. Rogers, R. Zhang, *Improved bounds for the Kakeya maximal conjecture in higher dimensions*, [arXiv:1908.05589](https://arxiv.org/abs/1908.05589).
- [14] N. Katz, T. Tao, *New bounds on Kakeya problems*, *J. Anal. Math.* **87** (2000), 231–263.

- 
- [15] N. Katz, T. Tao, *Recent progress on the Kakeya conjecture*, Publ. Mat. (2000), 231–263.
- [16] N. Katz, J. Zahl, *An improved bound on the Hausdorff dimension of Besicovitch sets in  $\mathbb{R}^3$* , J. Amer. Math. Soc. **32** (2019), 195–259.
- [17] N. Katz, J. Zahl, *A Kakeya maximal function estimate in four dimensions using planebrushes*, [arXiv:1902.00989](https://arxiv.org/abs/1902.00989).
- [18] E. Kroc, *The Kakeya Problem*. Essay for the University of British Columbia, 2010.
- [19] P. Mattila, *Fourier Analysis and Hausdorff Dimension*, Cambridge studies in advanced mathematics, 2015.
- [20] E. Rela, *El problema de Kakeya*. Tesis de Licenciatura, 2006.
- [21] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Education, 1987.
- [22] C.D. Sogge, *Fourier Integrals in Classical Analysis*, Cambridge University Press, 2017.
- [23] E.M. Stein, *Oscillatory integrals in Fourier analysis*, Beijing Lectures in Harmonic Analysis, 307–355, Annals of Math. Studies 112, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986.
- [24] T. Tao, *Lecture notes*, 1999, [www.math.ucla.edu/~tao/254b.1.99s/](http://www.math.ucla.edu/~tao/254b.1.99s/).
- [25] T. Tao, *The Bochner-Riesz conjecture implies the restriction conjecture*, Duke Math. J. **96** (1999), 363–375.
- [26] P. A. Tomas, *A restriction theorem for the Fourier transform*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 477–478.
- [27] L. Wisewell, *Central Problems in Euclidean Harmonic Analysis*, LMS/EPSRC Short Course on Euclidean Harmonic Analysis. 2005.
- [28] T. Wolff, *An improved bound for Kakeya type maximal functions*, Rev. Mat. Iberoam. **11** (1995), 651–674.
- [29] T. Wolff, *Lectures on Harmonic Analysis*, University Lecture Series. **29**, 2003.