Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

DENTABILIDAD EN ESPACIOS DE BANACH. LA PROPIEDAD DE RADON-NIKODÝM.

Trabajo de Fin de Máster

Autor: **Lucas Mancheño Gómez**

Tutora: **María del Mar Jiménez Sevilla**

Curso académico: **2019-2020**

Máster en Matemáticas Avanzadas

Índice general

Resumen e introducción histórica

La noción de dentabilidad de un subconjunto de un espacio de Banach fue introducida por Rieffel en 1967 en vistas a ampliar el conocido teorema de Radon-Nikodým sobre medidas complejas a medidas con valores en un espacio de Banach arbitrario. Posteriores trabajos de principios de los años 70 por parte de Maynard, Davis, Phelps y Huff mostraron que los espacios de Banach para los cuales el teorema de Rieffel era válido (los cuales diremos que tienen la propiedad de Radon-Nikodým) son precisamente los que cumplen que todo subconjunto acotado es dentable. Diestel observó además una correlación entre la clase de espacios que tienen la propiedad de Radon-Nikodým y la clase de los que cumplen que todo subconjunto cerrado, convexo y acotado tiene un punto extremo (propiedad de Krein-Milman) y lanzó la pregunta de si ambas propiedades son equivalentes. En 1976, Huff y Morris mostraron en [3] que la propiedad de Radon-Nikodým implica la propiedad de Krein-Milman. La implicación opuesta es aún un problema abierto.

En el primer capítulo del presente trabajo trataremos el concepto de dentabilidad de un espacio de Banach y los resultados principales que se derivan de él. Entre ellos destaca el caracterizar cuándo un espacio de Banach es de Asplund mediante la dentabilidad de su espacio dual. En el segundo capítulo definiremos con rigor la ya citada propiedad de Radon-Nikodým y probaremos la equivalencia entre dicha propiedad, la dentabilidad del espacio ambiente y la llamada propiedad fuerte de Krein-Milman. Además, mostraremos que si un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodým entonces toda función Lipschitz $f : [0, 1) \to X$ es diferenciable en casi todo punto. Esto último motiva el desarrollo del Capítulo 3, el cual tiene como objeto probar la diferenciabilidad Gâteaux en casi todo punto de toda función Lipschitz $f : X \to Y$, donde X es un espacio de Banach separable e Y es un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým, lo cual generaliza el clásico teorema de Rademacher (en el cual se toma $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}$).

Capítulo 1

Dentabilidad y diferenciabilidad

El principal objetivo de los dos primeros capítulos del presente trabajo es tratar la propiedad de dentabilidad de los conjuntos acotados en un espacio de Banach, sobre la cual nos centraremos en este primer capítulo, y su equivalencia con la propiedad de Radon-Nikodým (RNP) de estos mismos espacios. Estas propiedades a su vez tienen una gran cantidad de importantes caracterizaciones y aplicaciones. Por ejemplo, los conocidos espacios de Asplund se pueden caracterizar mediante la propiedad de Radon-Nikodým de sus espacios duales. También, es posible mostrar que las aplicaciones Lipschitz definidas en un espacio de Banach separable con valores en un espacio de Banach con la RNP son diferenciables Gâteaux en un conjunto denso del espacio de salida.

1.1. Dentabilidad de un espacio de Banach

A lo largo de la sección (y del trabajo en general, salvo que se especifique lo contrario) $(X, \|\cdot\|)$ denotará siempre un espacio de Banach real. Además, la palabra "subespacio" llevará implícita el que el subespacio en cuestión sea cerrado. Si $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$, denotaremos por $\{x^* > a\}$ a la contraimagen del intervalo (a, ∞) por la aplicación x^*, es decir, al conjunto: $\{x \in X : x^*(x) > a\}$. Si $M \subset X$ es un subconjunto no vacío, llamaremos *rebanada* de M a todo subconjunto de M de la forma: $M \cap \{x^* > a\}$, donde $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$. Por último, siempre consideraremos X como subespacio del espacio bidual X^{**}, mediante la identificación natural.

Definición 1.1.1. Sean $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ espacios de Banach, $U \subset X$ subconjunto abierto, una función $f : U \to Y$ y $x \in U$. Decimos que f es *diferenciable Gâteaux* en x si existe $L : X \to Y$ operador lineal continuo tal que

$$\left\| \frac{1}{t}(f(x + th) - f(x)) - L(h) \right\| \to 0 \text{ cuando } 0 \neq t \to 0 \text{ para todo } h \in X$$

Si además dicho límite es uniforme para los $h \in B_X$ decimos que f es *diferenciable Fréchet* en x. Al operador L (el cuál es claro que está unívocamente determinado) se le denota por $f'(x)$ y se le denomina la *derivada de Gâteaux* (resp. *derivada de Fréchet*) de f en el punto x.

Definición 1.1.2. Sea X un espacio de Banach. Diremos que un subconjunto M de X es *dentable* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que la rebanada $M \cap \{x^* > a\}$ es no vacía y tiene diámetro menor que ε. El espacio de Banach X se dirá *dentable* si todo subconjunto no vacío y acotado suyo es dentable.

Si M es un subconjunto no vacío de X, $x \in M$ y $x^* \in X^*$ son tales que $x^*(x) = \sup(x^*(M))$ y los diámetros de las rebanadas $M \cap \{x^* > x^*(x) - \delta\}$ tienden a 0 cuando δ tiende a 0, diremos que x es un *punto fuertemente expuesto* de M y que x^* *expone fuertemente* M en x.

Diremos que una función $f : X \to (-\infty, \infty]$ es *propia* si su dominio es no vacío, siendo el dominio de f el conjunto: $\text{dom}(f) = \{x \in X : f(x) < \infty\}$. Para todo $x_0 \in \text{dom}(f)$, definimos la *subdiferencial* de f en x_0 como el conjunto:

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* : f(x) \geq f(x_0) + x^*(x - x_0),\ \forall x \in X\}$$

Si f es convexa y $x \in \text{dom}(f)$, tiene sentido hablar de diferenciabilidad Fréchet de f en el punto x. En este contexto, usaremos frecuentemente el hecho de que f es diferenciable Fréchet en el punto x si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \leq \varepsilon \|h\|$$

para todo $h \in X$ tal que $\|h\| < \delta$ (ver Lema 7.4 de [1]). Usaremos frecuentemente también el siguiente resultado:

Proposición 1.1.1. *Sean X espacio de Banach, $U \subset X$ subconjunto no vacío, abierto y convexo, $f : U \to (-\infty, \infty]$ función propia convexa y $x_0 \in \text{dom}(f)$. Entonces, si f es diferenciable Fréchet en x_0, $f'(x_0) \in \partial f(x_0)$.*

Demostración. Es una simple comprobación el que la convexidad de la función f y el conjunto U implican que la función

$$t \mapsto \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

es creciente en la variable t para cualesquiera $x \in X$ y $h \in X$, y siempre cumpliéndose que $t \neq 0$ y $x + th \in U$. Así, en particular se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x_0)(h) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} = \\ &= \inf \left(\left\{ \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} : t > 0;\ x_0 + th \in U \right\} \right),\ \forall h \in X \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por tanto, para todo $x \in U$, teniendo en cuenta (1.1) para $h = x - x_0$, se tiene que:

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)$$

Esto nos indica que $f'(x_0) \in \partial f(x_0)$. □

Definición 1.1.3. Dada $f : X \to (-\infty, \infty]$ función propia definida en el espacio de Banach X, definimos su función *conjugada de Fenchel*, f^*, como:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} (x^*(x) - f(x))$$

para todo $x^* \in X^*$.

Definición 1.1.4. Sea X espacio de Banach. Si $U \subset X$ es un subconjunto abierto no vacío, diremos que una función $f : U \to \mathbb{R}$ es *semicontinua inferiormente* en un punto $x \in U$ si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ convergente a x se tiene que

$$\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x)$$

Diremos que f es semicontinua inferiormente si f es semicontinua inferiormente en todo punto $x \in U$.

Definición 1.1.5. Sea X espacio de Banach. Si $U \subset X^*$ es un subconjunto abierto no vacío, diremos que una función $f : U \to \mathbb{R}$ es *débil*-semicontinua inferiormente* en un punto $x^* \in U$ si para toda red $(x^*_\alpha)_{\alpha \in A} \subset U$ débil*-convergente a x^* se tiene que

$$\liminf_{\alpha \in A} f(x^*_\alpha) \geq f(x^*)$$

Diremos que f es débil*-semicontinua inferiormente si es débil*-semicontinua inferiormente en todo punto $x^* \in U$.

Lema 1.1.1. *Sea U un subconjunto abierto convexo de X^*, espacio dual del espacio de Banach X, y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función convexa débil*-semicontinua inferiormente. Entonces, el conjunto $\{x^* \in U : \partial f(x^*) \cap X \neq \emptyset\}$ es denso en U. Además, si f es diferenciable Fréchet en el punto $x^* \in U$, se tiene que la derivada $f'(x^*)$ pertenece a X.*

Demostración. Sea $x_0^* \in U$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $B(x_0^*, \varepsilon) \subset U$. Hemos de encontrar $x^* \in U$ tal que $\|x^* - x_0^*\| \leq \varepsilon$ y $\partial f(x^*) \cap X \neq \emptyset$. Podemos definir entonces la función $g : X^* \to (-\infty, \infty]$ como:

$$g(u^*) = \begin{cases} f(x_0^* + u^*) & \text{si } u^* \in \varepsilon B_{X^*} \\ \infty & \text{si } u^* \in X^* \setminus \varepsilon B_{X^*} \end{cases}$$

Se tiene que g es débil*-semicontinua inferiormente. Para comprobar esto último, fijamos $u^* \in X^*$ y $(u_\alpha^*)_{\alpha \in A} \subset X^*$ red débil*-convergente a u^*. Hay que mostrar que $\liminf\limits_{\alpha \in A} g(u_\alpha^*) \geq g(u^*)$. Por la débil*-semicontinuidad inferior de f y la definición de g es claro que esto se cumple en el caso en que $u^* \in \varepsilon B_{X^*}$. Suponemos entonces que $u^* \in X^* \setminus \varepsilon B_{X^*}$. Vamos a comprobar que existe $\beta \in A$ tal que $u_\alpha^* \in X^* \setminus \varepsilon B_{X^*}$ para todo $\alpha \geq \beta$, lo que nos haría concluir con la desigualdad deseada como consecuencia directa de la definición de g. En efecto, en caso contrario, existe una subred $(u_{\alpha_i}^*)_{i \in I} \subset \varepsilon B_{X^*}$. Como $u^* \notin \varepsilon B_{X^*}$ existen $x \in X$ y $t > 0$ tales que $|u^*(x)| = (\varepsilon + t)\,\|x\|$. Como $(u_\alpha^*)_{\alpha \in A}$ es débil*-convergente a u^*, existe $i \in I$ tal que $|u_{\alpha_i}^*(x) - u^*(x)| \leq (t/2)\,\|x\|$. De esto se deduce que

$$|u_{\alpha_i}^*(x)| \geq |u^*(x)| - |u_{\alpha_i}^*(x) - u^*(x)| \geq (\varepsilon + \frac{t}{2})\,\|x\| > \varepsilon\,\|x\|$$

Esto es contradictorio con que $u_{\alpha_i}^* \in \varepsilon B_{X^*}$, y por tanto, como anunciamos anteriormente, se concluye lo deseado. Además, $\mathrm{dom}(g) = g^{-1}(\mathbb{R}) = \varepsilon B_{X^*}$ es débil*-compacto por el teorema de Banach-Alaoglu. Esto implica que g es acotada inferiormente. En efecto, en caso contrario existiría $(u_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subset \varepsilon B_{X^*}$ tal que $g(u_n^*) \leq -n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La débil*-compacidad de εB_{X^*} nos hace obtener una subred, $(u_\alpha^*)_{\alpha \in A}$, débil*-convergente a cierta $u^* \in X^*$. Se seguiría entonces por la débil*-semicontinuidad inferior de g que

$$-\infty = \liminf_{\alpha \in A} g(u_\alpha^*) \geq g(u^*)$$

lo que es contradictorio. Definimos ahora $g_* = g^*|_X$, siendo $g^* : X^{**} \to (-\infty, \infty]$ la conjugada de Fenchel de g. Es decir,

$$g_*(u) = \sup(\{u^*(u) - g(u^*) : u^* \in X^*\}),\ \forall u \in X$$

Es fácil comprobar que esta función es convexa, propia y semicontinua inferiormente en X, teniendo en cuenta que g es convexa y propia. Además, para todo $u \in X$ se tiene que $u^*(u) - g(u^*) = -\infty$ para todo $u^* \in X^* \setminus \varepsilon B_{X^*}$, por lo que se tiene que

$$g_*(u) = \sup(\{u^*(u) - g(u^*) : u^* \in \varepsilon B_{X^*}\}),\ \forall u \in X$$

Se sigue entonces de forma inmediata que

$$\underbrace{-f(x_0^*)}_{=0(u)-g(0)} \leq g_*(u) \leq \varepsilon\,\|u\| - \inf g < \infty,\ \forall u \in X$$

Esto nos indica que $\mathrm{dom}(g_*) = X$ y además, teniendo en cuenta el Lema 1.2.1, g_* es continua.

Aplicando el Teorema A.1 a la función $g_* + C$, siendo C una constante suficientemente grande para que $g_* + C > 0$, obtenemos que existe $x \in X$ tal que $g_*(u) - g_*(x) \geq -\varepsilon\,\|u - x\|$ para todo $u \in X$. Esto último nos indica que los conjuntos

$$C_1 := \{(u, t) \in X \times \mathbb{R} : t \geq g_*(u) - g_*(x)\}$$

y

$$C_2 := \{(u,t) \in X \times \mathbb{R} : t < -\varepsilon \|u - x\|\}$$

son disjuntos. Además, es claro que C_2 es abierto y ambos conjuntos son convexos como consecuencia de la convexidad de g_*. Por tanto, aplicando el apartado (2) de la Proposición A.1 a dichos subconjuntos del espacio normado $X \times \mathbb{R}$ se obtiene que existe $h \in (X \times \mathbb{R})^*$ tal que

$$\text{ínf}(h(C_1)) \geq \sup(h(C_2))$$

Ahora bien, es claro que existe $\xi \in X^*$ y $s \in \mathbb{R}$ tal que $h(x,t) = \xi(x) + st$ para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ (basta tomar $\xi(x) = h(x,0)$, para todo $x \in X$ y $s = h(0,1)$). Por tanto, tenemos que

$$\text{ínf}(\{\xi(u) + st : (u,t) \in C_1\}) \geq \sup(\{\xi(u) + st : (u,t) \in C_2\})$$

Como consecuencia directa de que para todo $u \in X$ existen t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $(u,t_i) \in C_i$ para todo $i \in \{1,2\}$ se tiene que $s \neq 0$. También, como para todo $u \in X$ se tiene que

$$\text{ínf}(\{t \in \mathbb{R} : (u,t) \in C_1\}) \geq \sup(\{t \in \mathbb{R}; (u,t) \in C_2\})$$

se suprime la posibilidad de que $s < 0$. Así, $s > 0$ y por tanto, trabajando con ξ/s si es necesario podemos suponer que $s = 1$. Tenemos entonces que

$$\xi(u) + g_*(u) - g_*(x) \geq \xi(v) - \varepsilon \|v - x\|, \ \forall u, v \in X \tag{1.2}$$

Considerando entonces cualquier $u \in X$ y $v = x$ obtenemos que $\xi(u) + g_*(u) - g_*(x) \geq \xi(x)$, lo que nos indica que $-\xi \in \partial g_*(x)$. Ahora considerando $u = x$ y cualquier $v \in X$ en (1.2) obtenemos que $\xi(x) \geq \xi(v) - \varepsilon \|v - x\|$, dicho de otra forma, $\xi(v - x) \leq \varepsilon \|v - x\|$, para todo $v \in X$, por lo que $\|\xi\| \leq \varepsilon$.

Ahora, como $-\xi \in \partial g_*(x)$, por la Proposición A.2 se tiene que $x \in \partial(g_*)^*(-\xi)$. Como por definición $g_* = g^*|_X$, la Proposición A.3 nos indica que $(g_*)^* = g$, y por tanto, $x \in \partial g(-\xi) = \partial f(x_0^* - \xi)$, por lo que $\partial f(x_0^* - \xi) \cap X \neq \emptyset$. La primera parte del lema se concluye al observar que $x_0^* - \xi \in B(x_0^*, \varepsilon) \subset U$ (al ser $\|\xi\| \leq \varepsilon$).

La segunda afirmación del lema es consecuencia directa de la Proposición A.3 (aplicada a f) y la Proposición A.4. □

Teorema 1.1.1. *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y W es un subconjunto de X no vacío, acotado, cerrado y convexo, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Todo subconjunto no vacío de W es dentable.*
2. *Para todo subconjunto no vacío, abierto y convexo, $U \subset X^*$, y para toda función convexa débil*-semicontinua inferiormente, $f : U \to \mathbb{R}$, tal que $\bigcup \partial f(U) \cap X \subset W$, el conjunto D de todos los puntos en los que f es diferenciable Fréchet es denso G_δ en U.*
3. *Para todo subconjunto no vacío, cerrado y convexo, $M \subset W$, el conjunto E^* de todos los puntos $x^* \in X^*$ que exponen fuertemente a M es denso G_δ en X^*.*
4. *Todo subconjunto no vacío, cerrado y convexo, $M \subset W$, es igual a la envoltura convexa cerrada[1] del conjunto E de todos sus puntos fuertemente expuestos.*

Demostración. (1)$\Longrightarrow$(2). Sean U y f en las condiciones de (2). Llamamos $L = \sup(\{\|w\| : w \in W\})$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto:

$$G_n = \{x^* \in X^* : \exists V \subset U \ \text{abierto}/x^* \in V \ \wedge \ \text{diam}(\bigcup \partial f(V) \cap X) < \frac{1}{n}\} \tag{1.3}$$

[1]Recordar que la envoltura convexa de un subconjunto A de un espacio vectorial es la intersección de todos los conjuntos convexos de dicho espacio vectorial que contengan a A y se denota por $\text{conv}(A)$. La envoltura convexa cerrada de A, que se denota por $\overline{\text{conv}}(A)$, es la clausura de $\text{conv}(A)$.

Claramente los conjuntos G_n son abiertos. Mostraremos ahora que además dichos conjuntos son densos en U. Así, fijamos $n \in \mathbb{N}$ y consideramos $\Omega \subset U$ un conjunto abierto convexo no vacío. Hay que comprobar que $\Omega \cap G_n \neq \emptyset$. El lema precedente garantiza que $\bigcup \partial f(\Omega) \cap X \neq \emptyset$. Como además, por la hipótesis sobre f se tiene que $\bigcup \partial f(\Omega) \cap X \subset \bigcup \partial f(U) \cap X \subset W$, (1) nos garantiza la existencia de un elemento $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que la rebanada $\bigcup \partial f(\Omega) \cap X \cap \{x^* > a\}$ es no vacía y tiene diámetro menor que $\frac{1}{n}$. Tomamos x elemento de dicha rebanada. Se tiene que existe $y^* \in \Omega$ tal que $x \in \partial f(y^*)$. Tomamos $t > 0$ suficientemente pequeño para que $y^* + tx^* \in \Omega$. Como $x \in \{x^* > a\}$, existe $b > a$ tal que $x^*(x) > b$. Tomamos $\delta \in (0, \frac{(b-a)t}{2L})$ suficientemente pequeño para que $B(y^* + tx^*, \delta) \subset \Omega$. Comprobaremos que:

$$\bigcup \partial f(B(y^* + tx^*, \delta)) \cap X \subset \bigcup \partial f(\Omega) \cap X \cap \{x^* > a\} \tag{1.4}$$

lo que nos hará obtener que $y^* + tx^* \in \Omega \cap G_n$ (ya que sería válido el conjunto $V = B(y^* + tx^*, \delta)$ en la definición (1.3)). Así, con el fin de probar (1.4), consideramos $y \in \bigcup \partial f(B(y^* + tx^*, \delta)) \cap X$. Tomamos $z^* \in B(y^* + tx^*, \delta)$ tal que $y \in \partial f(z^*)$. Entonces, al ser $x \in \partial f(y^*)$ e $y \in \partial f(z^*)$, por definición de subdiferencial se tiene:

$$(z^* - y^*)(y) - f(z^*) \geq -f(y^*) \tag{1.5}$$

y también:

$$f(z^*) \geq f(y^*) + (z^* - y^*)(x) \tag{1.6}$$

Por tanto, se obtiene:

$$0 \leq (z^* - y^*)(y - x) \leq \delta \|y - x\| + tx^*(y - x) < 2\delta L + tx^*(y) - tb \tag{1.7}$$

donde la primera desigualdad resulta de la suma de las desigualdades (1.5) y (1.6) y la segunda desigualdad se obtiene como consecuencia de la definición de norma de un operador y de la desigualdad triangular (añadiendo y suprimiendo el término tx^*). De (1.7) se deduce que $x^*(y) > b - \frac{2\delta L}{t} > a$, por lo que se concluye que $y \in \bigcup \partial f(\Omega) \cap X \cap \{x^* > a\}$ y queda probado el contenido (1.4).

Comprobaremos que $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Esto nos haría concluir lo deseado ya que se tendría que por el teorema de categoría de Baire, D es un subconjunto denso (y G_δ) de U al ser interesección numerable de abiertos densos. Sea entonces $x^* \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ y $\varepsilon > 0$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Como $x^* \in G_n$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x^*, \delta) \subset U$ y

$$\operatorname{diam}(\bigcup \partial f(B(x^*, \delta)) \cap X) < \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{1.8}$$

Fijando $h^* \in \delta B_{X^*}$ y haciendo de nuevo uso del Lema 1.1.1 se obtiene la existencia de unos elementos $u_i^*, v_i^* \in B(x^*, \delta)$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\|x^* + h^* - u_i^*\|, \ \|x^* - h^* - v_i^*\| < \frac{1}{i}$$

y los conjuntos $\partial f(u_i^*) \cap X$ y $\partial f(v_i^*) \cap X$ son no vacíos. Tomamos, para cada $i \in \mathbb{N}$, $u_i \in \partial f(u_i^*) \cap X$ y $v_i \in \partial f(v_i^*) \cap X$. Entonces, teniendo en cuenta de nuevo la definición de subdiferencial, el hecho de que $u_i^* \to x^* + h^*$ y $v_i^* \to x^* - h^*$ y la semicontinuidad inferior de la función f (ya que en particular es débil*-semicontinua inferiormente), se tiene:

$$\begin{aligned}
& f(x^* + h^*) + f(x^* - h^*) - 2f(x^*) \leq \\
& \leq \liminf_{i\to\infty} f(u_i^*) + \liminf_{i\to\infty} f(v_i^*) - 2f(x^*) \leq \liminf_{i\to\infty}((u_i^* - x^*)(u_i) + (v_i^* - x^*)(v_i)) \leq \\
& \leq \liminf_{i\to\infty}(h^*(u_i) - h^*(v_i) + \|u_i^* - x^* - h^*\| \|u_i\| + \|v_i^* - x^* + h^*\| \|v_i\|) \leq \\
& \leq \liminf_{i\to\infty} \left(\|h^*\| \|u_i - v_i\| + \frac{2L}{i} \right) \leq \frac{1}{n} \|h^*\| < \varepsilon \|h^*\|
\end{aligned}$$

Observar también que en la penúltima desigualdad se tiene en cuenta (1.8). Así, la arbitrariedad del vector $h^* \in \delta B_{X^*}$ nos hace concluir que f es diferenciable Fréchet en x^*. Por tanto, como vemos,

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \subset D$. Para comprobar el otro contenido, tomamos $x^* \in D$, es decir, $x^* \in U$ es un punto tal que f es diferenciable Fréchet en dicho punto. Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que $B(x^*, 2\delta) \subset U$ y

$$f(x^* + h^*) - f(x^*) - f'(x^*)(h^*) \leq \frac{1}{5n} \|h^*\|, \ \forall h^* \in 2\delta B_{X^*} \tag{1.9}$$

Vamos a comprobar que $\operatorname{diam}(\bigcup \partial f(B(x^*, \delta)) \cap X) < \frac{1}{n}$, lo que nos haría concluir que $x^* \in G_n$. En efecto, para cualquier $y \in \bigcup \partial f(B(x^*, \delta)) \cap X$ y para cualquier $h^* \in B_{X^*}$, se tiene, tomando $y^* \in B(x^*, \delta)$ tal que $y \in \partial f(y^*)$:

$$\begin{aligned}\delta(y - f'(x^*))(h^*) &\leq f(y^* + \delta h^*) - f(y^*) - \delta f'(x^*)(h^*) = \\ &= (f(y^* + \delta h^*) - f(x^*) - f'(x^*)(y^* + \delta h^* - x^*)) + \\ &+ (f(x^*) - f(y^*) + f'(x^*)(y^* - x^*)) \leq \frac{1}{5n} \|y^* + \delta h^* - x^*\| \leq \frac{2\delta}{5n}\end{aligned}$$

Notar que mediante la identificación usual, como $y \in X \subset X^{**}$ y $h^* \in X^*$, denotamos indistintamente $h^*(y) = y(h^*)$ y que en la penúltima desigualdad se ha hecho uso de (1.9) para el punto $y^* + \delta h^* - x^* \in 2\delta B_{X^*}$. Tomando supremos sobre todos los $h^* \in B_{X^*}$ en la última cadena de desigualdades se obtiene que $\|y - f'(x^*)\| \leq \frac{2}{5n}$. Así, se concluye que $\operatorname{diam}(\bigcup \partial f(B(x^*, \delta)) \cap X) \leq$ $\leq \frac{4}{5n} < \frac{1}{n}$, y por tanto, como anunciamos anteriormente, $x^* \in G_n$. Como $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, se concluye que $x^* \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

(2)$\Longrightarrow$(3). Definimos la aplicación $f : X^* \to \mathbb{R}$ como: $f(x^*) = \sup(x^*(M))$, para todo $x^* \in X^*$. Es claro que f es una función convexa y débil*-semicontinua inferiormente. Vamos a comprobar que $\bigcup \partial f(X^*) \cap X \subset W$. En efecto, si $x_0 \in \partial f(x_0^*) \cap X$ para un cierto $x_0^* \in X^*$ se tiene que:

$$x^*(x_0) - x_0^*(x_0) \leq f(x^*) - f(x_0^*), \ \forall x^* \in X^* \tag{1.10}$$

Tomando $x^* = 0$ y $x^* = 2x_0^*$ en (1.10) se obtiene que $x_0^*(x_0) = f(x_0^*)$, lo que a su vez reduce (1.10) al hecho de que $x^*(x_0) \leq f(x^*) = \sup(x^*(M))$ para todo $x^* \in X^*$. Esto último nos indica que $x_0 \in M \subset W$ ya que si $x_0 \notin M$, por el teorema de separación, al ser M cerrado y convexo estaría garantizada la existencia de $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x_0) > \sup(x^*(M))$, lo que es contradictorio. Así, f cumple las hipótesis de (2), por lo que también se cumple la tésis de (2), la cual teniendo en cuenta el Lema A.1 nos hace obtener (3).

(3)$\Longrightarrow$(4). Es claro que como $E^* \neq \emptyset$ (por hipótesis), también se tiene que $E \neq \emptyset$. También, como M es un conjunto convexo cerrado y $E \subset M$, se tiene que $\overline{\operatorname{conv}}(E) \subset M$. Supongamos entonces que $M \not\subset \overline{\operatorname{conv}}(E)$. Entonces, por el teorema de separación, existe $y^* \in X^*$ tal que $\sup(\{y^*(x) : x \in M\}) > \sup(\{y^*(x) : x \in E\})$. Por (3), el conjunto E^* es denso en X^*. De esto se deduce que existe $x^* \in E^*$ tal que $\sup(\{x^*(x) : x \in M\}) > \sup(\{x^*(x) : x \in E\})$. Esto último es contradictorio ya que por la propia definición de los conjuntos E y E^*, si $x^* \in E^*$ se tiene que $\sup(\{x^*(x) : x \in M\}) = \sup(\{x^*(x) : x \in E\})$. Así, como vemos, se tiene (4).

(4)$\Longrightarrow$(1). Sea $\emptyset \neq M \subset W$ y $\varepsilon > 0$. Por (4) aplicado a $\overline{\operatorname{conv}}(M)$ se tiene que el conjunto de puntos fuertemente expuestos de $\overline{\operatorname{conv}}(M)$ es no vacío y por tanto, existen $x \in \overline{\operatorname{conv}}(M)$, $x^* \in X^*$ y $\delta > 0$ tal que $\{y \in \overline{\operatorname{conv}}(M) : x^*(y) > x^*(x) - \delta\} \neq \emptyset$ y tiene diámetro menor que ε. Llamando $a = x^*(x) - \delta \in \mathbb{R}$, lo expresado se traduce en que $\overline{\operatorname{conv}}(M) \cap \{x^* > a\}$ es no vacío y tiene diámetro menor que ε. Por ser $\overline{\operatorname{conv}}(M) \cap \{x^* > a\}$ no vacío se tiene que $M \cap \{x^* > a\}$ es no vacío. En efecto, tomando $y \in \overline{\operatorname{conv}}(M) \cap \{x^* > a\}$, por ser $y \in \overline{\operatorname{conv}}(M)$ y la continuidad de x^*, existen $y_1, \ldots, y_n \in M$ y $t_1, \ldots, t_n \in (0, 1]$, con $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, tales que

$$x^*(t_1 y_1 + \ldots t_n y_n) = t_1 x^*(y_1) + \ldots + t_n x^*(y_n) > a$$

Esto implica que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x^*(y_i) > a$. Por tanto, $y_i \in M \cap \{x^* > a\}$. Así, $M \cap \{x^* > a\}$ es no vacío y $\operatorname{diam}(M \cap \{x^* > a\}) \leq \operatorname{diam}(\overline{\operatorname{conv}}(M) \cap \{x^* > a\}) < \varepsilon$. Por tanto, como vemos, se tiene (1). $\square$

De la demostración del teorema anterior se obtiene de forma inmediata el siguiente corolario:

Corolario 1.1.1. *Sea X un espacio de Banach dentable. Entonces, todo subconjunto cerrado, convexo y acotado de X coincide con la envoltura convexa cerrada del conjunto de sus puntos fuertemente expuestos.*

Dada $f : X \to (-\infty, \infty]$ función propia definiremos la función $f^*_* : X \to (-\infty, \infty]$ como:

$$f^*_*(x) = \sup_{x^* \in X^*} (x^*(x) - f^*(x^*))$$

Notar que si f^* es propia, podemos definir también $f^{**} := (f^*)^*$, la cual evidentemente cumple que $f^*_* = f^{**}|_X$.

Definición 1.1.6. Dado X espacio de Banach y $f : X \to (-\infty, \infty]$ función propia, llamamos *epigrafo* de f al conjunto:

$$\text{epi}(f) := \{(x, \alpha) : x \in \text{dom}(f);\ f(x) \leq \alpha\}$$

Vamos a proceder a enunciar y demostrar el *principio variacional de Stegall*, el cual nos da una primera caracterización de los espacios de Banach dentables. Para ello precisamos del siguiente lema técnico.

Lema 1.1.2. *Sea $f : X \to (-\infty, \infty]$ función propia semicontinua inferiormente definida en el espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ tal que $\inf f > -\infty$. Supongamos que f^* es diferenciable Fréchet en $x_0^* \in X^*$. Entonces, la derivada $(f^*)'(x_0^*) =: x_0$ pertenece a X, $f^*_*(x_0) = f(x_0) \in \mathbb{R}$ y para todo $\Delta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \Delta$ para todo $x \in X$ tal que $f(x) - f(x_0) - x_0^*(x - x_0) < \delta$.*

Demostración. Como la función f^* es convexa y débil*-semicontinua inferiormente (ver comentarios posteriores a la Definición 7.29 de [1]), la segunda afirmación del Lema 1.1.1 aplicada a f^* y x_0^* nos asegura que $x_0 \in X$. En vistas a comprobar que $f^*_*(x_0) = f(x_0)$, observamos primero que $\text{epi}(f^*_*) = \text{epi}(f^{**}) \cap (X \times \mathbb{R})$, al ser $f^*_* = f^{**}|_X$. Además, por la Proposición A.5, $\text{epi}(f^{**}) = \overline{\text{conv}}^{w^*}(\text{epi}(f))$. Así, se tiene que $\text{epi}(f^*_*) = \overline{\text{conv}}^{w^*}(\text{epi}(f)) \cap (X \times \mathbb{R}) = \overline{\text{conv}}^{w}(\text{epi}(f)) = \overline{\text{conv}}(\text{epi}(f))$, donde la penúltima igualdad es debida a que las topologías débil y débil* en X ($\subset X^{**}$) coinciden y la última igualdad es consecuencia del teorema de Mazur.

Entonces, como consecuencia directa de (1) de la Proposición A.6 se tiene la desigualdad $f^*_*(x_0) \leq f(x_0)$. Comprobaremos entonces la desigualdad opuesta. Sea $\varepsilon > 0$. Por la semicontinuidad inferior de f existe $\Delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ para todo $x \in X$ tal que $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ (ya que en caso contrario se podría construir una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergente a x tal que $f(x) > \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$). La diferenciabilidad Fréchet de f^* en x_0^* con derivada $x_0 \in X$ garantiza la existencia de un $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$f^*(x^*) - f^*(x_0^*) - (x^* - x_0^*)(x_0) < \Delta\beta, \text{ para todo } x^* \in X^* \text{ tal que } \|x^* - x_0^*\| \leq 2\beta$$

Como $(x_0, f^*_*(x_0)) \in \text{epi}(f^{**}) \subset \overline{\text{conv}}(\text{epi}(f))$, existe un elemento $(x, t) \in \text{conv}(\text{epi}(f))$ suficientemente próximo a $(x_0, f^*_*(x_0))$ tal que:

$$\begin{aligned} t - f^*_*(x_0) - x_0^*(x - x_0) &\leq |t - f^*_*(x_0)| + |x_0^*(x - x_0)| \leq \\ &\leq |t - f^*_*(x_0)| + \|x_0^*\| \, \|x - x_0\| \leq \\ &\leq (1 + \|x_0^*\|) \, \|(x - x_0, t - f^*_*(x_0))\| < \Delta\beta \end{aligned}$$

También, por ser $(x, t) \in \text{conv}(\text{epi}(f))$, existen $m \in \mathbb{N}$, $(\alpha_i)_{i=1}^m \subset [0, 1]$ y $(x_i, t_i)_{i=1}^m \subset \text{epi}(f)$ tales que $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ y $(x, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (x_i, t_i)$. Por definición de epigrafo se tiene que $\sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i t_i = t$ y por tanto tenemos que:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i) f^*_*(x_0) - x_0^*(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i - x_0) < \Delta\beta$$

Esto último implica, al ser $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, que existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$f(x_i) - f^*_*(x_0) - x_0^*(x_i - x_0) < \Delta\beta$$

Vamos a comprobar que $\|x_i - x_0\| < \Delta$. En efecto, como x_0 es la derivada de Fréchet de f^* en x_0^*, por la Proposición 1.1.1 $x_0 \in \partial f^*(x_0^*)$ y por tanto, por la Proposición A.7 se tiene que $f^*_*(x_0) + f^*(x_0^*) = x_0^*(x_0)$. Podemos entonces hacer la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
\Delta\beta &> f(x_i) + f^*(x_0^*) - x_0^*(x_i - x_0) \geq f^*_*(x_i) + f^*(x_0^*) - x_0^*(x_i) \geq \\
&\geq \sup(\{x^*(x_i) - f^*(x^*) : x^* \in X^*;\ \|x^* - x_0^*\| = 2\beta\} + f^*(x_0^*) - x_0^*(x_i) = \\
&= -\operatorname{ínf}(\{(f^*(x^*) - f^*(x_0^*) - (x^* - x_0^*)(x_0)) - (x^* - x_0^*)(x_i - x_0) : x^* \in X^*;\ \|x^* - x_0^*\| = 2\beta\} \geq \\
&\geq -(\Delta\beta - 2\beta \|x_i - x_0\|)
\end{aligned}$$

Notar que en la segunda desigualdad se ha tenido en cuenta que $f^*_*(x_i) \leq f(x_i)$. Se sigue entonces de esta última cadena de desigualdades el que $\|x_i - x_0\| < \Delta < \varepsilon$. Por tanto, teniendo en cuenta que $\Delta \in (0, \varepsilon)$ y $\beta \in (0, 1)$ se tiene que:

$$f(x_0) < f(x_i) + \varepsilon < \Delta\beta + f^*_*(x_0) + x_0^*(x_i - x_0) + \varepsilon < f^*_*(x_0) + \|x_0^*\| \varepsilon + 2\varepsilon$$

Así, haciendo tender $\varepsilon \downarrow 0$ se concluye que $f(x_0) \leq f^*_*(x_0)$.

A su vez hemos mostrado que se tiene la última afirmación del enunciado del lema para el valor $\delta = \Delta\beta$. □

Teorema 1.1.2. ***(Principio variacional de Stegall.)*** *Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es dentable si y sólo si se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ y para toda función propia semicontinua inferiormente, $f : X \to (-\infty, \infty]$, tal que* $\operatorname{ínf} f > -\infty$ *y* $\lim_{\|x\| \to \infty} (f(x)/\|x\|) > 0$*, existe $x_0 \in X$ y $x_0^* \in X^*$ tal que $\|x_0^*\| < \varepsilon$ y*

$$f(x) \geq f(x_0) + x_0^*(x - x_0)$$

para todo $x \in X$, y además, para todo $\Delta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \Delta$ para todo $x \in X$ tal que $f(x) - f(x_0) - x_0^*(x - x_0) < \delta$.

Demostración. Suponemos primero que X es dentable. Sea $\varepsilon > 0$ y f función en las condiciones del enunciado del teorema. Como $\lim_{\|x\| \to \infty} (f(x)/\|x\|) > 0$, existen $a, b > 0$ tales que $f(x) > a\|x\|$ para todo $x \in X$ tal que $\|x\| > b$. Así, para todo $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| \leq a$, se tiene que $f^*(x^*) \leq$ $\leq \max(\{0, b\|x^*\| - \operatorname{ínf} f\})$. Por tanto, $aB_{X^*} \subset \operatorname{dom} f^*$. Así, podemos aplicar (2) del Teorema 1.1.1 a $f^* : B \to \mathbb{R}$, siendo B cualquier bola abierta centrada en 0 de radio menor que a, obteniendo que el conjunto de puntos de B en los que f^* es diferenciable Fréchet es denso en B. Por tanto, existe un elemento $x_0^* \in X^*$ tal que $\|x_0^*\| < \varepsilon$ y f^* es diferenciable Fréchet en x_0^*. Llamamos $x_0 = (f^*)'(x_0^*)$. Por el Lema 1.1.2, $x_0 \in X$ y $f^*_*(x_0) = f(x_0) \in \mathbb{R}$. Por la Proposición 1.1.1 se tiene que $x_0 \in \partial f^*(x_0^*)$. Esto a su vez implica que $x_0^* \in \partial f^*_*(x_0)$, como consecuencia de (1) de la Proposición A.2 (al ser $f^*_* = f^{**}|_X$). Teniendo en cuenta esto se tiene:

$$f(x) - f(x_0) - x_0^*(x - x_0) \geq f^*_*(x) - f^*_*(x_0) - x_0^*(x - x_0) \geq 0$$

para todo $x \in X$ (notar que también se ha hecho uso del hecho de que $f(x) \geq f^*_*(x)$, para todo $x \in X$, como consecuencia directa de (1) de la Proposición A.6). Así, como vemos, $x_0 \in X^*$ cumple los requisitos buscados. El "además" del enunciado es consecuencia directa del Lema 1.1.2.

Comprobamos ahora la implicación inversa. Sea $\emptyset \neq M \subset B_X$. Definimos $f : X \to \{0, \infty\}$ como: $f(x) = 0$, si $x \in \overline{M}$, y $f(x) = \infty$, si $x \in X \setminus \overline{M}$. Es fácil comprobar que f cumple las hipótesis del enunciado. Sea $\varepsilon > 0$. De nuevo, es una sencilla comprobación el que si $x_0 \in X$ y $x_0^* \in X^*$ cumplen que $f(x) \geq f(x_0) + x_0^*(x - x_0)$ para todo $x \in X$, entonces $x_0 \in \overline{M}$ y $x_0^*(x - x_0) \leq 0$ para todo $x \in M$. Tomamos el $\delta > 0$ correspondiente al valor $\Delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Afirmamos que la rebanada $M \cap \{x_0^* > x_0^*(x_0) - \delta\}$ es no vacía y tiene diámetro menor o igual que ε. En efecto, dicha rebanada es no vacía ya que es claro que $x_0 \in X$ pertenece a ella. Si $x \in M \cap \{x_0^* > x_0^*(x_0) - \delta\}$, entonces, como $x \in M$, $f(x) = 0$ y por tanto:

$$f(x) - f(x_0) - x_0^*(x - x_0) = -x_0^*(x - x_0) < \delta$$

de donde se deduce por hipótesis que $\|x - x_0\| < \Delta = \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que para cualesquiera dos puntos $x, y \in M \cap \{x_0^* > x_0^*(x_0) - \delta\}$, $\|x - y\| < \varepsilon$ y así, concluimos el resultado. $\square$

1.2. Dentabilidad en X^*

La dentabilidad del espacio dual de un espacio de Banach tiene multiples caracterizaciones interesantes. Para exponerlas necesitamos introducir primero varios conceptos. Si $(X, \|\cdot\|)$ es espacio de Banach, decimos que su espacio dual, X^*, es *débil*-dentable* si para todo subconjunto acotado no vacío $M \subset X^*$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $u \in X$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que la rebanada $\{x^* \in M : x^*(u) > a\}$ es no vacía y tiene diámetro menor que ε. También, decimos que X^* es *débil*-fragmentable* si para todo subconjunto acotado no vacío $M \subset X^*$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto dé*bil**-abierto $V \subset X^*$ tal que la intersección $M \cap V$ es no vacía y tiene diámetro menor que ε. Dado $\emptyset \neq M \subset X^*$, si $x^* \in X^*$ y $x \in X$ son tales que $x^*(x) = \sup(\{y^*(x) : y^* \in M\})$ y los diametros de las rebanadas $\{y^* \in M : y^*(x) > x^*(x) - \delta\}$ tienden a 0 cuando $\delta \downarrow 0$, entonces se dice que x^* es un punto *débil*-fuertemente expuesto* de M (y decimos que x *expone fuertemente* M en x^*). Finalmente, recordamos que X se dice *espacio de Asplund* si para toda función continua y convexa $f : X \to \mathbb{R}$ existe un conjunto denso G_δ, $D \subset X$, tal que f es diferenciable Fréchet en todo punto $x \in D$.

Teorema 1.2.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X^* es débil*-dentable.*
2. *X^* es dentable.*
3. *X^* es débil*-fragmentable.*
4. *X es espacio de Asplund.*
5. *Todo subconjunto no vacío, convexo y débil*-compacto $M \subset X^*$ es igual a la envoltura convexa débil*-cerrada del conjunto E formado por todos los puntos de M débil*-fuertemente expuestos.*
6. *Todo subespacio separable de X tiene dual separable.*

Para probar este teorema, lo cual es el objetivo principal de esta sección, requerimos de numerosos resultados técnicos que pasamos a enunciar y demostrar:

Lema 1.2.1. *Sea f una función convexa definida en un subconjunto abierto convexo U de un espacio de Banach X. Entonces, dado un elemento $x_0 \in U$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es continua en x_0.*
2. *f es localmente acotada superiormente en x_0, es decir, es acotada superiormente en un entorno de x_0.*
3. *f es localmente Lipschitz en x_0, es decir, es Lipschitz en un entorno de x_0.*

Demostración. La cadena de implicaciones (3)$\Longrightarrow$(1)$\Longrightarrow$(2) es obvia. Así, pasamos a demostrar (2)$\Longrightarrow$(3). Mostraremos primero que si f es acotada superiormente en $B(x_0, r)$, entonces es acotada en $B(x_0, r)$. Trabajando con la función $x \mapsto f((x_0 + x)/r)$ si es necesario podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$ y $r = 1$. Llamamos K a una cota superior de f en B_X. Por la convexidad de f tenemos que

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}(x + (-x))\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x)$$

para todo $x \in B_X$. Por tanto, se tiene que

$$f(x) \geq 2f(0) - f(-x) \geq 2f(0) - K$$

para todo $x \in B_X$, y así se concluye que f es acotada inferiormente en B_X, por lo que f es acotada en B_X. Para finalizar la demostración del lema es claro que basta probar esta afirmación: *Si una función convexa f está acotada por 1 en B_X, entonces f es 5-Lipschitz en $\frac{1}{2}B_X$.*

En efecto, suponiendo lo contrario, existen $x, y \in \frac{1}{2}B_X$ tales que $f(y) - f(x) > 5\|y - x\|$. Tomamos el punto $z = y + (y - x)/(2\|y - x\|) \in B_X$. Se tiene que

$$y = \frac{\|y - x\|}{\|y - x\| + \frac{1}{2}}z + \frac{\frac{1}{2}}{\|y - x\| + \frac{1}{2}}x \tag{1.11}$$

Teniendo en cuenta además que $\|z - y\| = \frac{1}{2}$, (1.11) se puede escribir como

$$(\|y - x\| + \|z - y\|)y = \|y - x\| z + \|z - y\| x$$

de donde deducimos por la convexidad de f que

$$\frac{f(z) - f(y)}{\|z - y\|} \geq \frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|} > 5$$

Así, se sigue que $f(z) \geq f(y) + 5\|z - y\| = f(y) + 5/2 \geq -1 + 5/2 = 3/2$, lo que es contradictorio. Por tanto, queda probada la afirmación y consecuentemente el lema también. □

Lema 1.2.2. *Sea $C > 0$ y f una función C-Lipschitz definida en un subconjunto abierto U de un espacio de Banach X con valores reales. Entonces, si $x \in U$ y $x^* \in \partial f(x)$, $\|x^*\| \leq C$.*

Demostración. Sea $y \in S_X$. Tomamos $t > 0$ tal que $x + ty \in U$. Entonces, como $x^* \in \partial f(x)$ se tiene que

$$tx^*(y) = x^*(ty) \leq f(x + ty) - f(x) \leq |f(x + ty) - f(x)| \leq Ct$$

Así, como vemos, $x^*(y) \leq C$ para todo $y \in S_X$, por lo que $\|x^*\| \leq C$. □

Definición 1.2.1. Dado X espacio de Banach y $F : X \to \mathcal{P}(X^*)$ función, decimos que F es $\|\cdot\|$-*débil**-*semicontinua superiormente* en el punto $x_0 \in X$ si para todo entorno débil*-abierto, $W \subset X^*$, que contiene a $F(x_0)$, existe $\delta > 0$ tal que $F(x) \subset W$ para todo $x \in B(x_0, \delta)$. Decimos que F es $\|\cdot\|$-débil*-semicontinua superiormente si F es $\|\cdot\|$-débil*-semicontinua superiormente en todo punto $x \in X$.

Lema 1.2.3. *Sea X un espacio de Banach y f una función continua convexa definida en un subconjunto no vacío, abierto y convexo, $U \subset X$. Entonces, la subdiferencial ∂f definida en U es $\|\cdot\|$-débil*-semicontinua superiormente.*

Demostración. Sea $x_0 \in U$ y W un subconjunto débil*-abierto de X^* que contiene a $\partial f(x_0)$. Tenemos que comprobar que existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset U$ y $\partial f(x) \subset W$ para todo $x \in$ $\in B(x_0, \delta)$. Suponiendo que esto no se da, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ tal que $x_n \to x_0$ y existe $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset$ $\subset X^*$ tal que $x_n^* \in \partial f(x_n) \setminus W$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f es continua en x_0, por el Lema 1.2.1 existe $V \subset U$ entorno abierto de x_0 y una constante $C > 0$ tal que f es C-Lipschitz en V. Al ser $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_n \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 1.2.2, $\|x_n^*\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, por el teorema de Banach-Alaoglu existe $x_0^* \in X^*$ y una subred $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$. Al ser $(x_\alpha^*)_{\alpha\in A} \subset W^{\mathsf{c}}$

y W^c débil*-cerrado, $x_0^* \notin W$. Ahora bien, como $x_\alpha^* \in \partial f(x_\alpha)$ para todo $\alpha \in A$, se tiene que $x_\alpha^*(y) \leq f(x_\alpha + y) - f(x_\alpha)$ para cualesquiera $y \in X$ tal que $x_0 + y \in U$ y $\alpha \in A$ tal que $x_\alpha + y \in U$. Entonces, como $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$ y $x_\alpha \to x_0$, tomando límites en esta última desigualdad se obtiene que $x_0^* \in \partial f(x_0) \subset W$, lo que es contradictorio. Por tanto, se tiene el resultado. □

Definición 1.2.2. Sea X un espacio de Banach, $f : X \to (-\infty, \infty]$ función propia y $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Dado $\varepsilon \geq 0$ definimos la *ε-subdiferencial* de f en x_0 como el subconjunto de X^* dado por

$$\partial_\varepsilon f(x_0) := \{x^* \in X^* : f(x) \geq f(x_0) + x^*(x - x_0) - \varepsilon, \ \ \forall x \in X\}$$

Notar que la subdiferencial de una función propia en un punto x_0 (concepto introducido en la página 6) coincide con la 0-subdiferencial de dicha función en el punto x_0.

Lema 1.2.4. *Sea $C > 0$ y f una función C-Lipschitz definida en un subconjunto abierto U de un espacio de Banach X. Entonces, dados $x_0 \in U$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B(x_0, \varepsilon) \subset U$, se tiene que $\bigcup \partial f(B(x_0, \varepsilon)) \subset \partial_{2C\varepsilon} f(x_0)$.*

Demostración. Sea $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Si $x^* \in \partial f(x)$ e $y \in X$, teniendo en cuenta que por el Lema 1.2.2 se tiene que $\|x^*\| \leq C$, entonces:

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + x^*(y - x) = \\ &= f(x_0) + x^*(y - x_0) + (f(x) - f(x_0)) + x^*(x_0 - x) \geq \\ &\geq f(x_0) + x^*(y - x_0) - 2C\|x - x_0\| \geq f(x_0) + x^*(y - x_0) - 2C\varepsilon \end{aligned}$$

Así, como vemos, se concluye el resultado. □

Teorema 1.2.2. *Sea f una función convexa y continua definida en un subconjunto no vacío, abierto y convexo, U, de un espacio de Banach X, y sea $x_0 \in U$. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *f es diferenciable Fréchet en x_0 y $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.*
2. *$\|x_n^* - x_0^*\| \to 0$ siempre que $x_0^* \in \partial f(x_0)$ y $x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\varepsilon_n \downarrow 0$.*
3. *$\|x_n^* - x_0^*\| \to 0$ siempre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset U$ es tal que $x_n \to x_0$ y $x_n^* \in \partial f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Demostración. (1)$\Longrightarrow$(2). Suponiendo que (2) no se da, existen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$, $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ y $\eta > 0$ tales que $\varepsilon_n \downarrow 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_0)$ y $\|x_n^* - f'(x_0)\| \geq \eta$. Definimos: $t_n = \frac{4\varepsilon_n}{\eta}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $h_n \in S_X$ tal que

$$(x_n^* - f'(x_0))(h_n) \geq \frac{\eta}{2}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se tiene que $x_0 + t_n h_n \in U$ y por tanto:

$$\begin{aligned} &f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0) - f'(x_0)(t_n h_n) \geq \\ &\geq (x_n^* - f'(x_0))(t_n h_n) - \varepsilon_n \geq t_n \frac{\eta}{2} - \varepsilon_n = t_n \frac{\eta}{4} \end{aligned}$$

lo que es contradictorio con la diferenciabilidad Fréchet de f en x_0.

(2)$\Longrightarrow$(3). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \subset U$ tal que $x_n \to x_0$ y $x_n^* \in \partial f(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por la equivalencia (1)$\Longleftrightarrow$(3) del Lema 1.2.1 se tiene que existe $C > 0$ tal que f es C-Lipschitz en un entorno de x_0 contenido en U. Como $x_n \to x_0$, podemos suponer que todos los puntos x_n están en dicho entorno. Así, teniendo en cuenta de nuevo que $x_n \to x_0$, el Lema 1.2.4 nos asegura que existe una sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ tal que $\varepsilon_n \downarrow 0$ y $x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, aplicando (2) a la sucesión $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ se obtiene lo deseado.

(3)$\Longrightarrow$(1). Es claro que (3) implica que $\partial f(x_0)$ tiene un solo elemento. Llamamos $\partial f(x_0) = \{x_0^*\}$. Vamos a comprobar que f es diferenciable Frechet en x_0 con diferencial x_0^*. Suponiendo que no, existen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $t_n \downarrow 0$ y

$$f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0) - x_0^*(t_n h_n) > \varepsilon t_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $x_n^* \in \partial f(x_0 + t_n h_n)$. Se tiene que:

$$x_n^*(-t_n h_n) \leq f(x_0) - f(x_0 + t_n h_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que

$$x_n^*(t_n h_n) \geq f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0) > x_0^*(t_n h_n) + \varepsilon t_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De esto último se deduce que $\|x_n^* - x_0^*\| > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que es contradictorio con (3). $\square$

Nota: Dada f en las hipótesis del Teorema 1.2.2, se puede demostrar que f es diferenciable Gâteaux en x_0 si y sólo si $\partial f(x_0)$ es un conjunto de un solo elemento (ver teorema 7.17 de [1]). Esto junto a la Proposición 1.1.1 muestra que podemos reducir la afirmación (1) del teorema precedente al simple hecho de que f sea diferenciable Fréchet en x_0.

Definición 1.2.3. Dado X espacio de Banach y $U \subset X$ un subconjunto cerrado convexo que contenga a 0, definimos el *funcional de Minkowski* de U como la aplicación:

$$p_U(x) := \text{ínf}(\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\})$$

para todo $x \in X$.

Definición 1.2.4. Sea X espacio de Banach y $A \in \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(X^*)$. Definimos el *conjunto polar* de A como:

$$A^\circ := \begin{cases} \{x^* \in X^* : x^*(x) \leq 1, \ \ \forall x \in A\} & \text{si } A \subset X \\ \{x \in X : x^*(x) \leq 1, \ \ \forall x^* \in A\} & \text{si } A \subset X^* \end{cases}$$

Lema 1.2.5. *Sea X un espacio de Banach, U un entorno cerrado convexo de 0 en X y p_U el funcional de Minkowski en U. Entonces, $p_U(x) = \sup(\{u^*(x) : u^* \in U^\circ\})$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda U$. Existe $u \in U$ tal que $x = \lambda u$. Se tiene que $u^*(x) = u^*(\lambda u) = \lambda u^*(u) \leq \lambda$ para todo $u^* \in U^\circ$. Tomando supremos en esta última desigualdad obtenemos que $\sup(\{u^*(x) : u^* \in U^\circ\}) \leq \lambda$. Como esta desigualdad es válida para todo $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda U$, tomando ínfimos obtenemos que $\sup(\{u^*(x) : u^* \in U^\circ\}) \leq p_U(x)$. Suponemos ahora que existe $x \in X$ tal que $\sup(\{u^*(x) : u^* \in U^\circ\}) < p_U(x)$. Tomamos $t \in \mathbb{R}$ tal que $\sup(\{u^*(x) : u^* \in U^\circ\}) < t < p_U(x)$. Se tiene que $x \notin tU$. Por el teorema de separación, existe $x^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $tx^*(u) < \alpha < x^*(x)$ para todo $u \in U$. Como U es entorno convexo de 0, dividiendo la última cadena de desigualdades entre α si es necesario, podemos suponer que $\alpha = 1$ de donde se seguiría que $tx^* \in U^\circ$ y $(tx^*)(x) > t$, lo que es contradictorio con que $\sup(\{u^*(x) : u^* \in U^\circ\}) < t$. Así, se tiene también que $\sup(\{u^*(x) : u^* \in U^\circ\}) \geq p_U(x)$ para todo $x \in X$ y se concluye el lema. $\square$

Lema 1.2.6. *Sean X un espacio de Banach y U un entorno convexo cerrado de 0 en X. Entonces, para cualesquiera $\varepsilon \geq 0$ y $x_0 \in X$ se tiene que $\partial_\varepsilon p_U(x_0) = \{x^* \in U^\circ : x^*(x_0) \geq s - \varepsilon\}$ donde $s := \sup(\{u^*(x_0) : u^* \in U^\circ\})$.*

Demostración. Sea $x^* \in \partial_\varepsilon p_U(x_0)$. Como p_U es subaditiva se tiene que

$$p_U(x_0) + p_U(h) \geq p_U(x_0 + h) \geq p_U(x_0) + x^*(h) - \varepsilon, \ \forall h \in X \tag{1.12}$$

Así, por ser p_U positivamente homogéneo se tiene que $tp_U(h) = p_U(th) \geq x^*(th) - \varepsilon = tx^*(h) - \varepsilon$ para cualesquiera $h \in X$ y $t > 0$, o lo que es lo mismo, $p_U(h) \geq x^*(h) - \frac{\varepsilon}{t}$, para cualesquiera $h \in X$

y $t > 0$, por lo que $p_U(h) \geq x^*(h)$ para todo $h \in X$. Por tanto, $x^*(u) \leq p_U(u) \leq 1$ para todo $u \in U$, es decir, $x^* \in U^\circ$. Tomando ahora $h = -x_0$ en (1.12) se obtiene que $0 \geq p_U(x_0) - x^*(x_0) - \varepsilon$, es decir, $x^*(x_0) \geq p_U(x_0) - \varepsilon = s - \varepsilon$, donde la última igualdad se obtiene como consecuencia directa del Lema 1.2.5. Esto prueba que $\partial_\varepsilon p_U(x_0) \subset \{x^* \in U^\circ : x^*(x_0) \geq s - \varepsilon\}$.

Sea ahora $x^* \in \{x^* \in U^\circ : x^*(x_0) \geq s - \varepsilon\}$. Recordar de nuevo que el Lema 1.2.5 nos indica que $p_U(x) = \sup(\{u^*(x) : u^* \in U^\circ\})$ para todo $x \in X$ y por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} p_U(x) &\geq x^*(x) = x^*(x - x_0) + x^*(x_0) \geq \\ &\geq x^*(x - x_0) + s - \varepsilon = x^*(x - x_0) + p_U(x_0) - \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $x \in X$, donde en la primera desigualdad se ha hecho uso también de que $x^* \in U^\circ$. Se concluye así que $\partial_\varepsilon p_U(x_0) \supset \{x^* \in U^\circ : x^*(x_0) \geq s - \varepsilon\}$. □

Corolario 1.2.1. ***(Lema de Šmulyan.)*** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, U un entorno de 0 cerrado y convexo y $x \in X \setminus \{0\}$. Llamamos $s = \sup(\{u^*(x) : u^* \in U^\circ\})$. Entonces, p_U es diferenciable Fréchet en x si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\| = 0$ siempre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U^\circ$ sean tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = s$, si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U^\circ$ es convergente siempre que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = s$.*

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema 1.2.2 (teniendo en cuenta la nota inmediatamente posterior a dicho teorema) y el Lema 1.2.6. □

Dado un espacio vectorial real topológico (que no es más que un espacio vectorial real dotado de una topología Haussdorf que hace continua las operaciones de suma y producto por escalares), diremos que dicho espacio es *localmente convexo* si todo punto tiene una base de entornos convexos.

El siguiente resultado, en particular, generaliza los teoremas de separación usuales al contexto de los espacios vectoriales reales topológicos. Su demostración se puede encontrar en [1] (Teorema 3.32).

Teorema 1.2.3. *Sea E un espacio vectorial real topológico. Se tiene:*

1. *Si A es un subconjunto abierto convexo y no vacío de E y $x_0 \in E \setminus A$, entonces existe $f \in E^*$ tal que $f(a) < f(x_0)$, para todo $a \in A$.*
2. *Si E es localmente convexo, C es subconjunto cerrado convexo no vacío de E y $x_0 \in E \setminus C$, entonces existe $f \in E^*$ tal que $\sup(\{f(c) : c \in C\}) < f(x_0)$.*

Dado E espacio vectorial real topológico localmente convexo, el espacio (E^*, w^*), donde w^* denota como es usual la topología débil* en E^*, es espacio vectorial real topológico localmente convexo y su dual es E. Así, aplicando la afirmación (2) del teorema anterior a (E^*, w^*) se obtiene de forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 1.2.2. *Sea E un espacio vectorial real topológico localmente convexo y C subconjunto convexo débil*-cerrado no vacío de E^*. Entonces, dado un elemento $x_0^* \in E^* \setminus C$, existe $x \in E$ tal que $\sup(\{x^*(x) : x^* \in C\}) < x_0^*(x)$.*

Teorema 1.2.4. ***(Teorema bipolar.)*** *Sea X espacio de Banach y denotamos por w a la topología débil en X. Entonces, para todo subconjunto $A \subset X$, se tiene que $(A^\circ)^\circ = \overline{\mathrm{conv}}^w(A \cup \{0\})$.*

Demostración. Llamamos $C = \overline{conv}^w(A \cup \{0\})$. Podemos expresar

$$(A^\circ)^\circ = \bigcap_{x^* \in A^\circ} (x^*)^{-1}((-\infty, 1])$$

Como cada $x^* \in A^\circ$ es continua, deducimos que $(A^\circ)^\circ$ es cerrado en norma pues se trata de una intersección de cerrados. Así, como $(A^\circ)^\circ$ es convexo, por el teorema de Mazur deducimos que $(A^\circ)^\circ$ es también w-cerrado convexo. Esto último junto al claro hecho de que $A \cup \{0\} \subset (A^\circ)^\circ$

nos hace obtener el contenido $C \subset (A^\circ)^\circ$. Supongamos ahora que existe $x \in (A^\circ)^\circ \setminus C$. Por (2) del Teorema 1.2.3 (aplicado al espacio X equipado con la topología débil) existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x) > \sup(\{x^*(y) : y \in C\})$. Como $0 \in C$, $\sup(\{x^*(y) : y \in C\}) \geq 0$. Así, multiplicando por una constante si es necesario podemos suponer que $\sup(\{x^*(y) : y \in C\}) \leq 1 < x^*(x)$. Ahora bien, como $\sup(\{x^*(y) : y \in A\}) \leq \sup(\{x^*(y) : y \in C\}) \leq 1$, $x^* \in A^\circ$, y por tanto, como $x \in (A^\circ)^\circ$ se sigue que $x^*(x) \leq 1$, lo que es contradictorio. Por tanto, se tiene también el contenido $(A^\circ)^\circ \subset C$ y se concluye la demostración. □

Con esto estamos ya en condiciones de exponer la demostración del Teorema 1.2.1.

Demostración (del Teorema 1.2.1). (1)$\Longrightarrow$(2). Es trivial, teniendo en cuenta la inclusión $X \subset X^{**}$.

(2)$\Longrightarrow$(3). Supongamos que X^* es dentable pero no es débil*-fragmentable. Así, existe $M \subset X^*$ subconjunto acotado y $\varepsilon > 0$ tales que para todo $V \subset X^*$ subconjunto débil*-abierto satisfaciendo que $M \cap V \neq \emptyset$ se tiene que $\operatorname{diam}(M \cap V) > \varepsilon$, o lo que es lo mismo, que para todo subconjunto débil*-abierto relativo no vacío de M se tiene que el diámetro de dicho subconjunto es mayor que ε. Denotamos $\mathcal{D} = \{\emptyset\} \cup \{0,1\} \cup \{0,1\}^2 \cup \ldots$ Vamos a construir dos familias, $(U_d)_{d\in\mathcal{D}} \subset \mathcal{P}(M)$ y $(h_d)_{d\in\mathcal{D}} \subset S_X$, tales que se cumpla que para todo $d \in \mathcal{D}$ el subconjunto U_d sea débil*-abierto relativo no vacío de M y se tenga que $U_{d0} \cup U_{d1} \subset U_d$ e

$$\operatorname{ínf}(\{(x_0^* - x_1^*)(h_d) : x_i^* \in U_{di}, \ \ \forall i \in \{0,1\}\}) > \varepsilon$$

donde se denota $di = (d_1, \ldots, d_n, i)$ siendo $d = (d_1, \ldots, d_n)$, para todo $i \in \{0,1\}$. Denotamos por $|d|$ la "longitud"de d, es decir, $|d| = n$ si y sólo si $d \in \{0,1\}^n$. Tomamos $U_\emptyset = M$. Consideramos ahora cualquier $d \in \mathcal{D}$ y suponemos que tenemos construido el conjunto U_d. Sabemos que $\operatorname{diam}(U_d) > \varepsilon$. Así, podemos tomar $h_d \in S_X$ y $\xi_0, \xi_1 \in U_d$ tales que $(\xi_0 - \xi_1)(h_d) > \varepsilon$. Llamamos por un momento $t = (\xi_0 - \xi_1)(h_d) - \varepsilon > 0$. Definimos los conjuntos

$$U_{di} = \{x^* \in U_d : |x^*(h_d) - \xi_i(h_d)| < \frac{t}{2}\}$$

para todo $i \in \{0,1\}$. Es claro que dichos conjuntos son débil*-abiertos relativos en M, $U_{d0} \cup U_{d1} \subset$ $\subset U_d$ e $\operatorname{ínf}(\{(x_0^* - x_1^*)(h_d) : x_i^* \in U_{di}, \ \ \forall i \in \{0,1\}\}) > \varepsilon$. Así, como vemos, quedan completamente definidas las dos familias citadas de manera inductiva. Ahora, para cada $d \in \mathcal{D}$ denotamos por K_d a la envoltura convexa débil*-cerrada de U_d. Es claro que para todo $d \in \mathcal{D}$ se tiene que $K_{d0} \cup K_{d1} \subset K_d$ y por tanto, tomando envolturas convexas en esta inclusión se obtiene fácilmente que $\frac{1}{2}(K_{d0} + K_{d1}) \subset K_d$ para todo $d \in \mathcal{D}$. Afirmamos que existe $t = (t_d)_{d\in\mathcal{D}} \in \prod_{d\in\mathcal{D}} K_d$ tal que $t_d = \frac{1}{2}(t_{d0} + t_{d1})$ para todo $d \in \mathcal{D}$. Para probar esta afirmación basta comprobar que $\bigcap_{d\in\mathcal{D}} A_d \neq \emptyset$, donde

$$A_d = \{(t_d)_{d\in\mathcal{D}} \in \prod_{d\in\mathcal{D}} K_d : t_d = \frac{1}{2}(t_{d0} + t_{d1})\}$$

para todo $d \in \mathcal{D}$. Usando un argumento de compacidad[2], es suficiente con comprobar que se tiene que $\bigcap\{A_d : d \in \mathcal{D}; \ |d| \leq n\} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $d \in \mathcal{D}$ tal que $|d| > n$ tomamos puntos $t_d \in K_d$ arbitrarios. Ahora, por un proceso de "inducción decreciente", si $d \in \mathcal{D}$ es tal que $|d| \leq n$, suponiendo que tenemos definidos los puntos $t_{di} \in K_{di}$ para todo $i \in \{0,1\}$, definimos el punto $t_d = \frac{1}{2}(t_{d0} + t_{d1}) \in K_d$. Así, como vemos, la sucesión $(t_d)_{d\in\mathcal{D}}$ construida de esta forma pertenece al conjunto $\bigcap\{A_d : d \in \mathcal{D}; \ |d| \leq n\}$ y por tanto queda probada la afirmación.

Tomamos entonces $(t_d)_{d\in\mathcal{D}} \in \bigcap_{d\in\mathcal{D}} A_d$. Por (2), existen $x^{**} \in X^{**}$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que la rebanada $\{t_d : d \in \mathcal{D}\} \cap \{x^{**} > a\}$ es no vacía y tiene diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Tomamos $d \in \mathcal{D}$ tal que $x^{**}(t_d) > a$. Es claro por la construcción de la sucesión $(t_d)_{d\in\mathcal{D}}$ que existe $i \in \{0,1\}$ tal que

[2]Cada K_d es débil*-compacto como consecuencia del teorema de Banach-Alaoglu y por tanto, $\prod_{d\in\mathcal{D}} K_d$ es compacto en la topología producto. Además, es fácil comprobar que cada A_d ($\subset \prod_{d\in\mathcal{D}} K_d$) es cerrado en dicha topología, por lo que también es compacto. Se seguiría entonces que cada $H_n := \bigcap\{A_d : d \in D; \ |d| \leq n\}$ es compacto. Por tanto, $\bigcap_{d\in D} A_d = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$ sería no vacía al tratarse de una intersección de una sucesión decreciente por la inclusión de compactos no vacíos (teorema de la intersección de Cantor).

$x^{**}(t_{di}) > a$. Por tanto, como el diametro de la rebanada mencionada es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ se tiene que $\|t_d - t_{di}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora bien, teniendo en cuenta también la construcción de los conjuntos U_{d0} y U_{d1} se tiene que:

$$\varepsilon < (t_{d0} - t_{d1})(h_d) = 2|(t_d - t_{di})(h_d)| \leq 2\,\|t_d - t_{di}\| < \varepsilon$$

lo que es contradictorio. Por tanto, como vemos, se tiene (3).

(3)$\Longrightarrow$(4). Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y convexa. Para todo $n \in \mathbb{N}$ denotamos G_n al conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que

$$\frac{1}{t}\sup(\{f(x+th) + f(x-th) - 2f(x) : h \in B_X\}) < \frac{1}{n}$$

para algún $t > 0$. Comprobaremos que cada G_n es abierto y denso. Probamos primero la densidad. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $U \subset X$ subconjunto abierto no vacío. Consideramos $\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*)$ la subdiferencial de f. Sabemos por el Lema 1.2.3 que ∂f es $\|\cdot\|$-débil*-semicontinua superiormente. Llamamos A al conjunto de todas las funciones $F : X \to \mathcal{P}(X^*)$ $\|\cdot\|$-débil*-semicontinuas superiormente tales que $\emptyset \neq F(x) \subset \partial f(x)$ para todo $x \in X$ y con la propiedad de que $F(x)$ es débil*-compacto para todo $x \in X$. Por el lema de Zorn (y el teorema de la intersección de Cantor) es fácil comprobar que existe $F \in A$ elemento minimal en el sentido de que $F(x) \subset H(x)$ para cualesquiera $H \in A$ y $x \in X$. Como f es continua, por el Lema 1.2.1, existe $V \subset U$ subconjunto abierto tal que f es Lipschitz en V. Por el Lema 1.2.2, $\bigcup F(V)$ es un conjunto acotado. Ahora, por (3) existe un conjunto débil*-abierto $W \subset X^*$ tal que $\bigcup F(V) \cap W$ es no vacío y tiene diámetro menor que $\frac{1}{n}$. Afirmamos que existe $x \in V$ tal que $F(x) \subset W$. En efecto, supongamos lo contrario, es decir, que $F(x) \setminus W \neq \emptyset$ para todo $x \in V$. Definimos entonces la aplicación:

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in X \setminus V \\ F(x) \setminus W & \text{si } x \in V \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $H \in A$ y $H(x) \subset F(x)$ para todo $x \in X$, con inclusión estricta en algún elemento de V, lo que contradice la "minimalidad"de F. Así, existe $x \in V$ tal que $F(x) \subset W$ y queda probada la afirmación. Como F es $\|\cdot\|$-débil*-semicontinua superiormente, existe un conjunto abierto $\Omega \subset V$ tal que $x \in \Omega$ y $\bigcup F(\Omega) \subset W$. Así, como $\bigcup F(\Omega) \subset \bigcup F(V) \cap W$, $\operatorname{diam}(\bigcup F(\Omega)) < \frac{1}{n}$. Tomamos $t > 0$ suficientemente pequeño para que $x + tB_X \subset \Omega$. Si $h \in B_X$, tomamos $\eta_1 \in F(x+th)$ $(\subset \partial f(x+th))$ y $\eta_2 \in F(x-th)$ $(\subset \partial f(x-th))$. Se tiene entonces que para todo $h \in B_X$:

$$\frac{1}{t}(f(x+th) + f(x-th) - 2f(x)) \leq (\eta_1 - \eta_2)(h) \leq \operatorname{diam}(\bigcup F(\Omega)) < \frac{1}{n}$$

Así, como vemos $x \in \Omega \cap G_n \subset U \cap G_n$. Esto prueba la densidad de G_n. El que G_n es abierto se deduce fácilmente del hecho de que la función f es localmente Lipschitz. Definimos $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Por el teorema de categoría de Baire, D es un conjunto denso G_δ. Por ser f convexa, la función

$$t \mapsto \frac{f(x+th) + f(x-th) - 2f(x)}{t}$$

es no decreciente en $(0, \infty)$, para cualesquiera $x \in X$ y $h \in B_X$. Por tanto, la función

$$t \mapsto \frac{\sup(\{f(x+th) + f(x-th) - 2f(x) : h \in B_X\})}{t}$$

es no decreciente en $(0, \infty)$, para todo $x \in X$. Esto último junto con la definición de los conjuntos G_n nos permite concluir que f es diferenciable Fréchet en cada punto $x \in D$. Así, se tiene (4).

(4)$\Longrightarrow$(5). Sean M y E conjuntos en las condiciones de (5). Considerando una traslación si es necesario podemos suponer que $0 \in M$. Definimos la función: $f(x) = \sup(\{x^*(x) : x^* \in M\})$, para todo $x \in X$. Llamamos $U = f^{-1}((-\infty, 1])$. Es fácil comprobar que f es continua y convexa en X

y por tanto, U es entorno cerrado convexo de 0. Por definición de conjunto polar, $U = M^{\circ}$. El teorema bipolar (Teorema 1.2.4) nos asegura que $(M^{\circ})^{\circ} = M$, por lo que $U^{\circ} = M$. Esto último junto con el Lema 1.2.5 nos indica que f es el funcional de Minkowski de U. Entonces, si $x \in X$ es tal que f es diferenciable Fréchet en x, llamando $\xi = f'(x)$, como consecuencia de la Proposición 1.1.1, el Lema 1.2.6 (para $\varepsilon = 0$) y el Corolario 1.2.1 se obtiene que $\xi \in E$ (y además, $\xi(x) = \sup(\{x^*(x) : x^* \in U^{\circ}\}) = p_U(x) = f(x)$).

Sabido esto, comprobemos finalmente que la envoltura convexa débil*-cerrada del conjunto E es igual a M. Suponiendo lo contrario se tendría que existe $x^* \in M \setminus \overline{\text{conv}}^{w^*}(E)$. Por el Corolario 1.2.2, existe $h \in X$ tal que $x^*(h) > \sup(\{y^*(h) : y^* \in \overline{\text{conv}}^{w^*}(E)\}) \geq \sup(\{y^*(h) : y^* \in E\})$. Por (4), existe $u \in X$ suficientemente cercano a h tal que f es diferenciable Fréchet en u y se da también que $x^*(u) > \sup(\{y^*(u) : y^* \in E\})$. Llamamos $\eta = f'(u)$. Sabemos entonces que $\eta \in E$ y $\eta(u) = f(u)$. Por tanto se tendría que: $f(u) = \eta(u) < x^*(u) \leq f(u)$, lo que es contradictorio. Así, se tiene (5).

(5)$\Longrightarrow$(1). Sea $M \subset X^*$ subconjunto acotado y no vacío y $\varepsilon > 0$. Por ser M acotado, teniendo en cuenta el teorema de Banach-Alaoglu, se tiene que el conjunto $\overline{\text{conv}}^{w^*}(M)$ cumple las hipótesis de (5). Así, por (5), al ser M no vacío, necesariamente el conjunto de los puntos débil*-fuertemente expuestos de $\overline{\text{conv}}^{w^*}(M)$ es no vacío. Esto indica que existen $x^* \in \overline{\text{conv}}^{w^*}(M)$, $x \in X$ y $\delta > 0$ tales que la rebanada $\{y^* \in \overline{\text{conv}}^{w^*}(M) : y^*(x) > x^*(x) - \delta\}$ es no vacía y tiene diámetro menor que ε. Así, es claro que para obtener el resultado sería suficiente con comprobar que la rebanada $\{y^* \in M : y^*(x) > x^*(x) - \delta\}$ es no vacía. Tomamos $y^* \in \overline{\text{conv}}^{w^*}(M)$ tal que $y^*(x) > x^*(x) - \delta$. Llamamos $t = y^*(x) - x^*(x) + \delta > 0$. El conjunto $V = \{z^* \in X^* : |z^*(x) - y^*(x)| < \frac{t}{2}\}$ es un entorno débil*-abierto de y^*, por lo que al ser $y^* \in \overline{\text{conv}}^{w^*}(M)$ existe $z^* \in \text{conv}(M) \cap V$. Es claro que $z^*(x) > x^*(x) - \delta$ y entonces, razonando de igual forma que en la demostración de la implicación (4)$\Longrightarrow$(1) del Teorema 1.1.1 se obtiene la existencia de un elemento $h^* \in M$ tal que $h^*(x) > x^*(x) - \delta$. Esto último, como anunciamos anteriormente, nos hace concluir el resultado.

(3)$\Longrightarrow$(6). Sea $Y \subset X$ subespacio separable y consideramos $q : X^* \to Y^*$ la aplicación "restricción" canónica. Sea $\varepsilon > 0$. Como consecuencia del lema de Zorn se obtiene la existencia de un subconjunto $S \subset B_{Y^*}$ ε-separado (es decir, que $\|y_1^* - y_2^*\| \geq \varepsilon$, para cualesquiera $y_1^*, y_2^* \in S$) maximal. La maximalidad de S implica que para todo $y^* \in B_{Y^*}$ existe $s^* \in S$ tal que $\|y^* - s^*\| < \varepsilon$. Vamos a comprobar que S es numerable, lo que nos haría concluir que Y^* es separable. Supongamos que S no es numerable. Sabemos que la topología débil* en B_{Y^*} tiene una base numerable. Sea S_0 el conjunto de todos los elementos $y^* \in S$ tales que para todo subconjunto débil*-abierto $V \subset Y^*$ tal que $y^* \in V$, la intersección $S \cap V$ es no numerable. Afirmamos que S_0 es no numerable. En efecto, si $y^* \in S \setminus S_0$, existe un subconjunto débil*-abierto $V_{y^*} \subset Y^*$ tal que $y^* \in V_{y^*}$ y $S \cap V_{y^*}$ es numerable. Llamando B a una base numerable de la topología débil* en B_{Y^*}, se tiene que para todo $y^* \in S \setminus S_0$, existe $A_{y^*} \in B$ tal que $y^* \in A_{y^*} \subset V_{y^*}$. Ahora, como $\{A_{y^*} : y^* \in S \setminus S_0\}$ es numerable (al ser subconjunto de B) y cada $(S \setminus S_0) \cap A_{y^*}$ es numerable se sigue que $S \setminus S_0$ es numerable al tenerse que

$$S \setminus S_0 = \bigcup \{(S \setminus S_0) \cap A_{y^*} : y^* \in S \setminus S_0\}$$

lo que constituye una unión numerable de conjuntos numerables. De esto se concluye la afirmación ya que si S_0 fuera numerable, $S = (S \setminus S_0) \cup S_0$ también, lo que es contradictorio. En particular, S_0 es no vacío, y por tanto, por el teorema de Hahn-Banach, $q^{-1}(S_0) \cap B_{X^*}$ también. Así, por (3), existe un conjunto débil*-abierto $W \subset X^*$ tal que $q^{-1}(S_0) \cap B_{X^*} \cap W$ es no vacío y tiene diámetro menor que ε. De esto último se sigue fácilmente que $S_0 \cap q(W) \neq \emptyset$ y $\text{diam}(S_0 \cap q(W)) < \varepsilon$ (ya que $\|q\| \leq 1$), y por tanto al ser S ε-separada, $S_0 \cap q(W)$ está constituido por un único elemento. Esto es contradictorio ya que como $S_0 \cap q(W) \neq \emptyset$, de la definición de S_0 y del hecho de que q transforma conjuntos débil*-abiertos en X^* en conjuntos débil*-abiertos en Y^* (ver Corolario 3.51 de [1]) se sigue que $S_0 \cap q(W)$ es no numerable. Por tanto, S es numerable y se tiene (6).

(6)$\Longrightarrow$(3). Sea $M \subset X^*$ conjunto no vacío y acotado. Es claro que podemos suponer que $M \subset B_{X^*}$.

Tomamos $\{0\} \neq Y_0$ subespacio separable de X. Considerando un subconjunto denso y numerable de Y_0 podemos encontrar una base numerable, $W^0 = \{W_i^0 : i \in \mathbb{N}\}$, de la topología de B_{X^*} de la convergencia puntual en Y_0. Es fácil comprobar que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto numerable $A_i^0 \subset B_X$ tal que A_i^0-diam$(M \cap W_i^0) = \text{diam}(M \cap W_i^0)$, donde A-diam denota el diámetro en la seminorma $X^* \ni x^* \to \sup(\{|x^*(x)| : x \in A\})$. Tomamos $Y_1 = \overline{\text{span}}(Y_0 \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^0)$. Procediendo por inducción, supongamos que dado $n \in \mathbb{N}$ hemos encontrado subespacios separables $Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_n \subset X$, conjuntos numerables $A_i^k \subset B_X$ con $i \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ y subconjuntos débil*-abiertos relativos $W_i^k \subset B_{X^*}$ con $i \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Tomamos $W^n = \{W_i^n : i \in \mathbb{N}\}$ base numerable de la topología de B_{X^*} de la convergencia puntual en Y_n. Para todo $i \in \mathbb{N}$ tomamos un conjunto numerable $A_i^n \subset B_X$ tal que A_i^n-diam$(M\cap W_i^n) = \text{diam}(M\cap W_i^n)$. Finalmente, tomamos $Y_{n+1} = \overline{\text{span}}(Y_n \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^n)$. Esto finaliza el proceso inductivo. Denotamos como Y a la clausura de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ y $A = \bigcup_{i,n\in\mathbb{N}} A_i^n$. Observamos que Y es un subespacio separable de X y A es un conjunto numerable.

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Tenemos que comprobar que diam$(M\cap W) \leq \varepsilon$ para algún subconjunto débil*-abierto $W \subset X^*$. Por (6) (junto a un uso implícito del teorema de Hahn-Banach), existe $C \subset B_{X^*}$ numerable tal que para todo $x^* \in B_{X^*}$ existe $c \in C$ tal que $\sup(\{(x^* - c)(y) : y \in B_Y\}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Denotamos por $\mathcal{T}$ a la topología de B_{X^*} de la convergencia puntual en Y, y llamamos $\overline{M}^{\mathcal{T}}$ a la $\mathcal{T}$-clausura de M. Como la topología débil* es más fina que $\mathcal{T}$, como consecuencia del teorema de Banach-Alaoglu se tiene que $(B_{X^*}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico compacto. Por tanto, $\overline{M}^{\mathcal{T}} \cap B_{X^*}$ es $\mathcal{T}$-compacto. Podemos expresar:

$$\overline{M}^{\mathcal{T}} \cap B_{X^*} = \bigcup_{c\in C} \{x^* \in \overline{M}^{\mathcal{T}} \cap B_{X^*} : \sup(\{(x^* - c)(y) : y \in B_Y\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

Por el teorema de categoría de Baire, existe $c \in C$ y un conjunto $\mathcal{T}$-abierto $V \subset B_{X^*}$ tal que $\emptyset \neq \overline{M}^{\mathcal{T}} \cap V \subset \{x^* \in \overline{M}^{\mathcal{T}} \cap B_{X^*} : \sup(\{(x^* - c)(y) : y \in B_Y\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$. Así, como $\overline{M}^{\mathcal{T}} \cap V \neq \emptyset$, $M \cap V$ es no vacío también y además A-diam$(M \cap V) \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Al ser la sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente con respecto a la inclusión podemos asumir que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que existen $l \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_l \in Y_n$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $V = \{x^* \in B_{X^*} : x^*(y_i) < \alpha_i, \ \forall i \in \{1, .., l\}\}$. Así, V es un abierto de la topología de B_{X^*} de la convergencia puntual en Y_n. Por tanto, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\emptyset \neq M \cap W_i^n \subset M \cap V$. Tomamos un subconjunto débil*-abierto $W \subset X^*$ tal que $W_i^n = W \cap B_{X^*}$. Se tiene entonces que $M \cap W = M \cap W_i^n$ y por tanto:

$$\begin{aligned} \text{diam}(M \cap W) &= \text{diam}(M \cap W_i^n) = A_i^n{-}\text{diam}(M \cap W_i^n) \leq \\ &\leq A{-}\text{diam}(M \cap W_i^n) \leq A{-}\text{diam}(M \cap V) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto, como vemos, se tiene lo deseado. □

Corolario 1.2.3. *Sea X un espacio de Banach. Entonces, X es un espacio de Asplund si y sólo si todo conjunto cerrado, convexo y acotado en X^* coincide con la envoltura convexa cerrada del conjunto de sus puntos fuertemente expuestos.*

Corolario 1.2.4. *Los espacios de Banach reflexivos son dentables y Asplund.*

Demostración. Sea X espacio de Banach reflexivo. Sabemos que todo subespacio reflexivo de un espacio de Banach reflexivo es también reflexivo. Así, en particular, todo subespacio separable de X es reflexivo y por tanto, tiene dual separable. Por el Teorema 1.2.1 se tiene que X es Asplund y X^* es dentable. Argumentando de forma análoga para el espacio reflexivo X^* obtenemos que $X^{**} = X$ es dentable. □

Teorema 1.2.5. *Todo subconjunto débilmente compacto y convexo W de un espacio de Banach X es dentable. Además, W coincide con la envoltura convexa cerrada de sus puntos fuertemente expuestos.*

Demostración. Llamamos $Z = \overline{\text{span}}(W)$. Como consecuencia del teorema de Hahn-Banach se tiene que W es dentable en X si y sólo si es dentable en Z. Por tanto podemos suponer que $X = \overline{\text{span}}(W)$.

Entonces, por el Teorema A.2, existe un espacio de Banach reflexivo Y y un operador acotado e inyectivo $T : Y \to X$ tal que $W \subset T(B_Y)$. Además, $T^*(X^*)$ es denso en Y^*. En efecto, al ser Y reflexivo los operadores T y T^{**} se identifican y por tanto, T^{**} es inyectivo. Así, suponiendo que $\overline{T^*(X^*)} \neq Y^*$, existiría $y^{**} \in Y^{**} \setminus \{0\}$ tal que $y^{**}(y^*) = 0$ para todo $y^* \in T^*(X^*)$. Se tendría entonces que $T^{**}(y^{**}) = 0$, lo que es contradictorio con la inyectividad de T^{**}. Sabiendo esto, sea un subconjunto no vacío $M \subset W$. El espacio Y es dentable por el Corolario 1.2.4. Así, dado $\varepsilon > 0$ existen $y^* \in Y^*$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que la rebanada $T^{-1}(M) \cap \{y^* > a\}$ es no vacía y tiene diámetro menor que ε. Por la densidad de $T^*(X^*)$ en Y^*, existe $x^* \in X^*$ tal que $\|T^*(x^*) - y^*\| < 1$. Por tanto, como $T^{-1}(M) \subset B_Y$ se tiene que

$$\emptyset \neq T^{-1}(M) \cap \{T^*(x^*) > a + 1\} \subset T^{-1}(M) \cap \{y^* > a\}$$

Así, la rebanada $M \cap \{x^* > a + 1\} = T(T^{-1}(M) \cap \{T^*(x^*) > a\})$ es no vacía y tiene diámetro menor que $\varepsilon \|T\|$. Esto prueba la dentabilidad de M. El "además" del enunciado se obtiene como consecuencia de la equivalencia (1)$\Longleftrightarrow$(4) del Teorema 1.1.1. $\square$

Capítulo 2

La propiedad de Radon-Nikodým

A lo largo de este capítulo denotaremos por λ a la medida de Lebesgue en el intervalo $[0,1)$ y $\mathcal{L}$ la σ-álgebra de todos los subconjuntos medibles Lebesgue de $[0,1)$. También, la expresión "en casi todo punto" irá siempre ligada a la medida λ. Denotaremos $\mathcal{L}^+ = \{E \in \mathcal{L} : \lambda(E) > 0\}$. Si $A \in \mathcal{L}^+$, denotamos $\mathcal{L}^+(A) = \{E \in \mathcal{L}^+ : E \subset A\}$. Todas las integrales de funciones reales que aparezcan a lo largo del capítulo serán consideradas también con respecto a la medida de Lebesgue. Se harán uso de los principales resultados de la teoría de la medida de Lebesgue y las funciones medibles Lebesgue, los cuales pueden verse en [4].

2.1. Medidas vectoriales. La propiedad de Radon-Nikodým

Definición 2.1.1. Sean A un conjunto no vacío y $\mathcal{Q}, \mathcal{R} \subset \mathcal{P}(A)$. Diremos que $\mathcal{Q}$ es *cofinal* en $\mathcal{R}$ si $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$ y para todo $R \in \mathcal{R}$ existe $Q \in \mathcal{Q}$ tal que $Q \subset R$.

El siguiente lema será usado en la demostración de varios resultados posteriores:

Lema 2.1.1. ***(Principio exhaustivo.)*** *Sea $J \in \mathcal{L}^+$ y $\mathcal{P}$ familia de subconjuntos cofinal en $\mathcal{L}^+(J)$. Entonces existe una subfamilia numerable $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ formada por conjuntos disjuntos dos a dos tal que $\sum_{B \in \mathcal{B}} \lambda(B) = \lambda(J)$.*

Demostración. Podemos suponer que no existe una familia finita $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ formada por conjuntos disjuntos dos a dos tal que $\sum_{B \in \mathcal{B}} \lambda(B) = \lambda(J)$, pues en este caso habríamos terminado. Vamos a construir por inducción una sucesión infinita $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$ disjunta tal como sigue. Tomamos $B_1 \in \mathcal{P}$ arbitrario. Consideramos ahora $i \in \mathbb{N}$ y suponemos que ya tenemos elegidos $B_1, \ldots, B_i \in \mathcal{P}$ disjuntos dos a dos, y $a_1, \ldots, a_{i-1} > 0$. Llamamos:

$$a_i = \sup(\{\lambda(B) : B \in \mathcal{L}^+(J \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_i)) \cap \mathcal{P}\})$$

Observar que por ser $\mathcal{P}$ cofinal en $\mathcal{L}^+(J)$ y la hipótesis extra expresada al principio de la demostración, el conjunto del cual se toma el supremo en la definición de a_i es no vacío. Tomamos $B_{i+1} \in \mathcal{L}^+(J \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_i)) \cap \mathcal{P}$ tal que $\lambda(B_{i+1}) > \frac{1}{2} a_i$. Así queda descrito por completo el método inductivo. Falta comprobar que $\mathcal{B} := \{B_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}$ cumple lo deseado. Es claro que los conjuntos de $\mathcal{B}$ son disjuntos dos a dos tal y como se han elegido estos mismos. Supongamos que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(B_i) < \lambda(J)$. Entonces, de nuevo por la cofinalidad de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{L}^+(J)$, existe $B \in \mathcal{L}^+(J \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots)) \cap \mathcal{P}$. Por la definición de los a_i se tiene que $0 < \lambda(B) \leq a_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y por tanto:

$$\lambda(J) > \sum_{i=2}^{\infty} \lambda(B_i) > \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \geq \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(B) = \infty$$

lo que es contradictorio. Por tanto, $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(B_i) = \lambda(J)$ y se concluye el resultado. $\square$

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $f : [0,1) \to X$ una función, definimos:

$$v_f(t) = \sup(\{\sum_{i=1}^{n} \|f(a_i) - f(a_{i-1})\| : 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < t;\ n \in \mathbb{N}\})$$

para todo $t \in (0,1]$ y $v_f(0) = 0$. A la función $v_f : [0,1] \to [0,\infty]$ se le denomina *variación* de f. Decimos que la función f es *absolutamente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon$ para cualesquiera números $0 \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n < 1$, siendo n cualquier natural, tales que $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$. Notar que, en particular, las funciones Lipschitz son absolutamente continuas.

Procedemos ahora a hacer un breve repaso del concepto de medidas vectoriales, las cuales constituyen una generalización de las medidas reales usuales y estarán muy presentes en los resultados restantes de la sección.

Definición 2.1.2. Sea X espacio de Banach, Ω conjunto no vacío y Σ una σ-álgebra en Ω. Una función $\tau : \Sigma \to X$ se dice *medida vectorial* si se tiene que

1. $\tau(\emptyset) = 0$
2. $\tau(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau(E_n)$ para toda sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$.

Notar que para la consistencia de esta última definición es necesario que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(E_n)$ sea incondicionalmente convergente al ser $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{\sigma(n)}$ para toda función biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dada $\tau : \Sigma \to X$ medida vectorial llamamos *variación* de τ a la aplicación definida como:

$$|\tau|(E) = \sup(\{\sum_{i=1}^{n} \|\tau(E_i)\| : (E_i)_{i=1}^{n} \text{ particion medible de } E\})$$

para todo $E \in \Sigma$, siendo $\|\cdot\|$ la norma de X. Se comprueba fácilmente que $|\tau|$ es una medida no negativa definida en la σ-álgebra Σ. La medida vectorial τ se dice de *variación acotada* si $|\tau|$ es medida finita.

Definición 2.1.3. Si τ es una medida vectorial de variación acotada definida en la σ-álgebra Σ y μ es una medida positiva y σ-finita definida en la misma σ-álgebra, se dice que τ es *absolutamente continua* con respecto a μ (o μ-absolutamente continua), y lo denotamos por $\tau \prec \mu$, si $\tau(E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$.

Esta condición es equivalente a que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\tau(E)\| < \varepsilon$ para todo $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) < \delta$.

Proposición 2.1.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $f : [0,1) \to X$ función absolutamente continua. Entonces existe una única medida $\tau : \mathcal{L} \to X$ λ-absolutamente continua tal que para todo $t \in (0,1)$ se tiene que $f(t) = f(0) + \tau([0,t))$ y $|\tau|([0,t)) = v_f(t) \leq v_f(1) < \infty$.*

Demostración. Vamos a definir una aplicación $\tau : \mathcal{L} \to X$ que sea una medida λ-absolutamente continua y de variación acotada. Definimos las imágenes $\tau(\emptyset) = 0$ y $\tau((a,b)) = f(b) - f(a)$, para cualesquiera $a, b \in [0,1]$ tales que $a < b$. Sea $G \subset (0,1)$ abierto no vacío. Entonces, es sabido que existe una única familia numerable, $\mathcal{J}$, de intervalos abiertos contenidos en $(0,1)$ disjuntos dos a dos tal que $G = \bigcup \mathcal{J}$. Llamamos $J = (a_J, b_J)$ para todo $J \in \mathcal{J}$. Definimos:

$$\tau(G) = \sum_{J\in\mathcal{J}} \tau((a_J, b_J)) \tag{2.1}$$

La continuidad absoluta de la función f asegura que para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia finita $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}$ tal que $\sum_{J\in\mathcal{J}\setminus\mathcal{F}} \|f(b_J) - f(a_J)\| < \varepsilon$. Así, la serie (2.1) converge absolutamente.

Sea ahora un elemento $E \in \mathcal{L}$ arbitrario. Por la regularidad de la medida de Lebesgue λ

sabemos que existe una sucesión de abiertos $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(0,1) \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset E \setminus \{0\}$ y $\lambda(G_n) \to \lambda(E)$ cuando $n \to \infty$. Definimos:

$$\tau(E) = \lim_{n\to\infty} \tau(G_n) \tag{2.2}$$

En lo que sigue nos centraremos en comprobar que la definición de (2.2) es consistente, es decir, que el límite en cuestión existe, que no depende de la sucesión $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escogida y que en el caso particular en que el conjunto E sea abierto el valor dado en (2.2) coincide con el dado en (2.1).

Afirmación 1: *Para todo $\Delta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\tau(G) - \tau(G')\| < \Delta$ para cualesquiera $G, G' \subset (0,1)$ subconjuntos abiertos tales que $G' \subset G$ y $\lambda(G \setminus G') < \delta$.*

Demostración: Sea $\Delta > 0$. Por la continuidad absoluta de f existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\| < \frac{\Delta}{3} \text{ para cualesquiera } n \in \mathbb{N}, \\ &0 \le a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n < 1, \text{ con } \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < 2\delta \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sean $G, G' \subset (0,1)$ abiertos tales que $G' \subset G$ y $\lambda(G \setminus G') < \delta$. Tomamos $\mathcal{J}$ y $\mathcal{J}'$ las únicas familias numerables de intervalos abiertos disjuntos dos a dos tales que $G = \bigcup \mathcal{J}$ y $G' = \bigcup \mathcal{J}'$. Sea $\mathcal{F}' \subset \mathcal{J}'$ subfamilia finita tal que $\sum_{J'\in\mathcal{J}'\setminus\mathcal{F}'} \lambda(J') < \delta$. Entonces, por (2.1) y (2.3) se tiene:

$$\left\| \tau(G') - \sum_{J'\in\mathcal{F}'} \tau(J') \right\| = \left\| \sum_{J'\in\mathcal{J}'\setminus\mathcal{F}'} \tau(J') \right\| \le \sum_{J'\in\mathcal{J}'\setminus\mathcal{F}'} \|\tau(J')\| \le \frac{\Delta}{3}$$

Ahora, es claro que para todo $J' \in \mathcal{F}'$ existe $J \in \mathcal{J}$ tal que $J' \subset J$. Entonces, para cada $J' \in \mathcal{F}'$ escogemos un intervalo $J \in \mathcal{J}$ de estas características y llamamos $\mathcal{F}$ a la familia formada por todos estos intervalos J. Añadimos a la familia $\mathcal{F}$ suficientes elementos de $\mathcal{J}$ como para que la nueva familia resultante, la cual seguiremos denotando por $\mathcal{F}$ cumpla que $\sum_{J\in\mathcal{J}\setminus\mathcal{F}} \lambda(J) < \delta$. Así, razonando de la misma forma que con la familia $\mathcal{F}'$ se obtiene que

$$\left\| \tau(G) - \sum_{J\in\mathcal{F}} \tau(J) \right\| \le \frac{\Delta}{3}$$

y por tanto:

$$\|\tau(G) - \tau(G')\| \le \frac{2}{3}\Delta + \left\| \sum_{J\in\mathcal{F}} \tau(J) - \sum_{J'\in\mathcal{F}'} \tau(J') \right\| \tag{2.4}$$

Así, para terminar bastaría con comprobar que el último término de la desigualdad (2.4) es menor o igual que $\Delta/3$. Llamamos $J = (a_J, b_J)$ y $\mathcal{F}'_J = \{J' \in \mathcal{F}' : J' \subset J\}$, para todo $J \in \mathcal{F}$. Claramente, las familias $\mathcal{F}'_J$ son disjuntas dos a dos y $\bigcup_{J\in\mathcal{F}} \mathcal{F}'_J = \mathcal{F}'$. Llamamos, para todo $J \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}'_J =$ $= \{(a_1^J, b_1^J), \ldots, (a_{k_J}^J, b_{k_J}^J)\}$, cumpliéndose:

$$a_J \le a_1^J < b_1^J < a_2^J < b_2^J < \ldots < a_{k_J}^J < b_{k_J}^J \le b_J$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} &\sum_{J\in\mathcal{F}} \left((a_1^J - a_J) + (a_2^J - b_1^J) + \ldots + (a_{k_J}^J - b_{k_J-1}^J) + (b_J - b_{k_J}^J) \right) = \\ =&\sum_{J\in\mathcal{F}} (\lambda(J) - \sum_{J'\in\mathcal{F}'_J} \lambda(J')) = \sum_{J\in\mathcal{F}} \lambda(J) - \sum_{J'\in\mathcal{F}'} \lambda(J') = \\ =&\lambda(G) - \lambda(G') - \sum_{J\in\mathcal{J}\setminus\mathcal{F}} \lambda(J) + \sum_{J'\in\mathcal{J}'\setminus\mathcal{F}'} \lambda(J') < \delta + \delta = 2\delta \end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2.3) se tiene:

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{J\in\mathcal{F}} \tau(J) - \sum_{J'\in\mathcal{F}'} \tau(J') \right\| \leq \sum_{J\in\mathcal{F}} \left\| \tau(J) - \sum_{J'\in\mathcal{F}'_J} \tau(J') \right\| = \\
&= \sum_{J\in\mathcal{F}} \left\| f(b_J) - f(a_J) - \sum_{i=1}^{k_J} \left(f(b_i^J) - f(a_i^J) \right) \right\| \leq \\
&\leq \sum_{J\in\mathcal{F}} (\left\| f(a_1^J) - f(a_J) \right\| + \left\| f(a_2^J) - f(b_1^J) \right\| + \\
&\quad + \ldots + \left\| f(a_{k_J}^J) - f(b_{k_J-1}^J) \right\| + \left\| f(b_J) - f(b_{k_J}^J) \right\|) < \frac{\Delta}{3}
\end{aligned}$$

Por tanto, como vemos, se tiene lo deseado.

Afirmación 2: *El límite definido en (2.2) existe y no depende de la sucesión $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escogida. Además, si $E \subset (0,1)$ es abierto, entonces los valores definidos en (2.1) y (2.2) coinciden.*

Demostración: Al ser $(\lambda(G_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente se tiene que $\lambda(G_n \setminus G_{n+m}) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Así, la afirmación 1 nos indica que $\|\tau(G_n) - \tau(G_{n+m})\| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$ por lo que, al ser X espacio de Banach, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \tau(G_n)$. Ahora, si $(G'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ es otra sucesión de abiertos tales que $(0,1) \supset G'_1 \supset G'_2 \supset \ldots \supset E \setminus \{0\}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(G'_n) = \lambda(E)$, se tiene que $G_1 \cap G'_1 \supset G_2 \cap G'_2 \supset \ldots \supset E \setminus \{0\}$ y por tanto:

$$\lambda(G_n \setminus (G_n \cap G'_n)) \leq \lambda(G_n \setminus E) \to 0$$

y de igual forma $\lambda(G'_n \setminus (G_n \cap G'_n)) \to 0$. Por tanto:

$$\|\tau(G_n) - \tau(G'_n)\| \leq \|\tau(G_n) - \tau(G_n \cap G'_n)\| + \|\tau(G'_n) - \tau(G_n \cap G'_n)\| \to 0$$

de donde se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(G_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \tau(G'_n)$. Para comprobar que si E es un abierto de $(0,1)$ las definiciones en (2.1) y (2.2) coinciden basta tomar la sucesión $G_n = E$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 3: *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\tau(E) - \tau(F)\| < \varepsilon$ para cualesquiera $E, F \in \mathcal{L}$ tales que $F \subset E$ y $\lambda(E \setminus F) < \delta$. En particular, $\|\tau(E)\| < \varepsilon$ para todo $E \in \mathcal{L}$ tal que $\lambda(E) < \delta$.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos $\delta > 0$ el valor correspondiente a $\Delta = \frac{\varepsilon}{2}$ en la afirmación 1. Sean $E, F \in \mathcal{L}$ tales que $F \subset E$ y $\lambda(E \setminus F) < \delta$. Tomamos $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}((0,1))$ sucesiones de abiertos tales que $(0,1) \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset E\setminus\{0\}$, $(0,1) \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset F\setminus\{0\}$, $\lambda(G_n) \downarrow \lambda(E)$ cuando $n \to \infty$ y $\lambda(H_n) \downarrow \lambda(F)$ cuando $n \to \infty$. Como $\lambda(G_n \setminus (G_n \cap H_n)) \leq \lambda(G_n) - \lambda(F)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, la afirmación 1 nos asegura que para los n suficientemente grandes se tiene que $\|\tau(G_n) - \tau(G_n \cap H_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, como además se tiene claramente que $\lambda(G_n \cap H_n) \downarrow \lambda(F)$ cuando $n \to \infty$, por la afirmación 2 se concluye que:

$$\|\tau(E) - \tau(F)\| = \lim_{n\to\infty} \|\tau(G_n) - \tau(G_n \cap H_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Afirmación 4: *τ es aditiva, es decir, $\tau(E_1 \cup E_2) = \tau(E_1) + \tau(E_2)$ para cualesquiera $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$ tales que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. En particular, $\tau([0,1) \setminus E) = f(1) - f(0) - \tau(E)$ para todo $E \in \mathcal{L}$.*

Demostración: Sean E_1, E_2 conjuntos en las hipótesis de la afirmación. Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos el valor $\delta > 0$ de la afirmación 3 correspondiente a ε. La regularidad de la medida λ nos asegura la existencia de conjuntos cerrados $C_1 \subset E_1$ y $C_2 \subset E_2$ tales que $0 \notin C_i$ y $\lambda(E_i \setminus C_i) < \frac{\delta}{2}$ para todo $i \in \{1,2\}$. Así, $\lambda(E_1 \cup E_2 \setminus (C_1 \cup C_2)) < \delta$ y por tanto, por la afirmación 3 se obtiene:

$$\|\tau(E_1 \cup E_2) - \tau(C_1 \cup C_2)\| < \varepsilon \ \text{ y } \ \|\tau(E_i) - \tau(C_i)\| < \varepsilon, \ \forall i \in \{1,2\} \tag{2.5}$$

Ahora, como C_1 y C_2 son dos conjuntos compactos disjuntos existen $G_1, G_2 \subset (0,1)$ abiertos disjuntos tales que $C_i \subset G_i$ para todo $i \in \{1,2\}$. Además, disminuyendo estos últimos conjuntos si fuera necesario podemos suponer que $\lambda(G_i \setminus C_i) < \frac{\delta}{2}$ para todo $i \in \{1,2\}$. Así, de nuevo por la afirmación 3 se tiene que:

$$\|\tau(G_1 \cup G_2) - \tau(C_1 \cup C_2)\| < \varepsilon \text{ y } \|\tau(G_i) - \tau(C_i)\| < \varepsilon, \ \forall i \in \{1,2\} \tag{2.6}$$

Combinando (2.5) y (2.6) se obtiene que:

$$\|\tau(E_1 \cup E_2) - \tau(E_1) - \tau(E_2)\| < 6\varepsilon + \|\tau(G_1 \cup G_2) - \tau(G_1) - \tau(G_2)\| = 6\varepsilon$$

donde la última igualdad se obtiene de forma inmediata de la propia definición (2.1). La arbitrariedad de ε nos hace obtener el resultado.

Afirmación 5: τ *es una medida vectorial.*

Demostración: Basta comprobar que τ es σ-aditiva. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos. Hay que comprobar que $\tau(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(E_n)$. Por la afirmación 4 se tiene que:

$$\left\|\tau\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \tau(E_i)\right\| = \left\|\tau\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right)\right\|, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

Ahora bien, como λ es σ-aditiva, se tiene que $\lambda(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(E_i) \in [0,1]$, y por tanto $\lambda(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda(E_i) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así, por la afirmación 3, se tiene que $\left\|\tau(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i)\right\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto último junto a (2.7) nos hace obtener lo deseado.

Afirmación 6: τ *es λ-absolutamente continua.*

Demostración: Sea $E \in \mathcal{L}$ tal que $\lambda(E) = 0$. Por la afirmación 3, $\tau(F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{L}$ tal que $F \subset E$. Por tanto, se sigue que $|\tau|(E) = 0$ y se concluye lo deseado.

Falta comprobar que para todo $t \in (0,1)$ se tiene que $f(t) = f(0) + \tau([0,t))$ y $|\tau|([0,t)) = v_f(t) \leq \leq v_f(1) < \infty$. La primera igualdad se sigue de forma inmediata de la definición (2.1), la aditividad de τ y el hecho de que $\tau(\{0\}) = 0$ como consecuencia de la afirmación 6. Para comprobar la segunda desigualdad, dado $t \in (0,1)$, observamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera puntos $0 \leq a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n < t$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \|\tau((a_i,b_i))\| \leq |\tau|((0,t))$$

Por tanto, $v_f(t) \leq |\tau|((0,t))$. Sea ahora $\varepsilon > 0$. Sea una familia finita $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ de subconjuntos disjuntos de $(0,t)$. Por la regularidad de la medida λ y la afirmación 3 se tiene que existe una familia de conjuntos cerrados $\{C_E : E \in \mathcal{F}\}$ tal que $C_E \subset E$ para todo $E \in \mathcal{F}$ y $\sum_{E\in\mathcal{F}} \|\tau(E)\| < < \sum_{E\in\mathcal{F}} \|\tau(C_E)\| + \varepsilon$. También, es fácil comprobar que existe una familia de conjuntos abiertos $\{G_E : E \in \mathcal{F}\}$ disjuntos dos a dos tal que $C_E \subset G_E \subset (0,t)$ para todo $E \in \mathcal{F}$ y $\sum_{E\in\mathcal{F}} \|\tau(E)\| < < \sum_{E\in\mathcal{F}} \|\tau(G_E)\| + \varepsilon$. Ahora bien, como para cada $E \in \mathcal{F}$ el abierto G_E es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, la compacidad de C_E nos permite suponer sin pérdida de generalidad que de hecho G_E es la unión de una familia finita, $\mathcal{J}_E$, de intervalos abiertos disjuntos dos a dos. Así, $\bigcup_{E\in\mathcal{F}} \mathcal{J}_E$ constituye una familia numerable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos contenidos en $(0,t)$. Por tanto:

$$\sum_{E\in\mathcal{F}} \|\tau(E)\| < \sum_{E\in\mathcal{F}} \|\tau(G_E)\| + \varepsilon \leq \sum_{E\in\mathcal{F}} \sum_{J\in\mathcal{J}_E} \|\tau(J)\| + \varepsilon \leq v_f(t) + \varepsilon$$

La arbitrariedad del valor $\varepsilon > 0$ y la familia $\mathcal{F}$ nos permiten concluir que $v_f(t) = |\tau|((0,t))$.
Comprobamos ahora que $v_f(1) < \infty$. Tomamos el valor $\delta > 0$ correspondiente al valor $\varepsilon = 1$

de la definición de continuidad absoluta de la función f. Sea $n \in \mathbb{N}$ y una colección de puntos $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 1$. Tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \delta$. Tomamos una colección de puntos $0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_m < 1$ tal que $\{b_0, b_1, \ldots, b_m\} = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \cup \{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}\}$. Se tiene entonces que:

$$\sum_{i=1}^{n} \|f(a_i) - f(a_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|f(b_i) - f(b_{i-1})\| < k$$

La arbitrariedad de $n \in \mathbb{N}$ y de la colección de puntos $(a_i)_{i=1}^n$ escogida nos hacen concluir que $v_f(1) \leq k < \infty$.

Por último, si $\nu : \mathcal{L} \to X$ es otra aplicación que cumple las hipótesis del enunciado, la condición de que $\nu([0,t)) = f(t) - f(0)$ para todo $t \in (0,1)$ junto con la aditividad de ν y su continuidad absoluta con respecto a λ implican que $\nu((a,b)) = f(b) - f(a)$ para cualesquiera $a, b \in [0,1]$ tales que $a < b$. Así, se sigue que ν cumple también (2.1) cambiando τ por ν, y por tanto ν y τ coinciden en los conjuntos abiertos de $(0,1)$. Una vez sabido esto, teniendo en cuenta de nuevo la continuidad absoluta de ν con respecto a λ se comprueba fácilmente que ν cumple (2.2) cambiando τ por ν y por tanto

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu(G_n) = \lim_{n\to\infty} \tau(G_n) = \tau(E)$$

para todo $E \in \mathcal{L}$. □

Definición 2.1.4. Dado X espacio de Banach, decimos que una $f : [0,1) \to X$ es una *función medible* si existe un subconjunto $N \subset [0,1)$, con $\lambda(N) = 0$, y una sucesión de funciones simples, $f_n : [0,1) \to X$, con $n \in \mathbb{N}$, tal que $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$, para todo $t \in [0,1) \setminus N$.

Definición 2.1.5. Decimos que un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ tiene la *propiedad de Radon-Nikodým* (RNP) si para toda medida vectorial $\tau : \mathcal{L} \to X$ λ-absolutamente continua y de variación acotada existe una función medible $g : [0,1) \to X$ tal que $\|g\|$ es integrable Lebesgue en $[0,1)$, para todo $x^* \in X^*$ se tiene que $x^* \circ g$ es integrable Lebesgue y para todo $E \in \mathcal{L}$ se da la igualdad:

$$x^*(\tau(E)) = \int_E x^*(g(t))d\lambda(t) \tag{2.8}$$

En este caso, a la función g se le denomina la *derivada de Radon-Nikodým* de τ.

Lema 2.1.2. *En las condiciones de la Definición 2.1.5, se tiene que $|\tau|(E) = \int_E \|g(t)\| \, d\lambda(t)$ para cualesquiera $E \in \mathcal{L}$ y $\tau : \mathcal{L} \to X$ medida vectorial λ-absolutamente continua y de variación acotada.*

Demostración. Sea $E \in \mathcal{L}$ y $\tau : \mathcal{L} \to X$ medida vectorial λ-absolutamente continua y de variación acotada. Sea $(E_i)_{i=1}^n \subset \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{L}$ partición de E. Como consecuencia del teorema de Hahn-Banach sabemos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $x_i^* \in S_{X^*}$ tal que $x_i^*(\tau(E_i)) = \|\tau(E_i)\|$. Se tiene entonces que:

$$\sum_{i=1}^{n} \|\tau(E_i)\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(\tau(E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} x_i^*(g(t))d\lambda(t) \leq \int_E \|g(t)\| \, d\lambda(t)$$

Por tanto, tomando supremos sobre todas las posibles particiones $(E_i)_{i=1}^n$ se sigue la desigualdad $|\tau|(E) \leq \int_E \|g(t)\| \, d\lambda(t)$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Es claro que podemos suponer que $E \subset (0,1)$. Es sabido que como $\|g\|$ es integrable Lebesgue en el abierto $(0,1)$, existe $h : (0,1) \to X$ continua tal que $\int_{(0,1)} \|g - h\| \, d\lambda < \varepsilon$ (ver Teorema 18 de [7]). También, por la regularidad de la integral de Lebesgue, al ser $\|h\|$ integrable en $(0,1)$ se tiene que existe $\delta > 0$ tal que si $A \in \mathcal{L}$ es tal que $\lambda(A) < \delta$, entonces $\int_A \|h\| \, d\lambda < \varepsilon$. Tomamos puntos $0 < a < b < 1$ tales que $\lambda((0,1) \setminus [a,b)) < \delta$. Por la continuidad uniforme de h en el compacto $[a,b]$ sabemos que existe $\Delta > 0$ tal que para cualesquiera $t_1, t_2 \in [a,b]$ tales que $|t_1 - t_2| \leq \Delta$ se tiene que $\|h(t_1) - h(t_2)\| < \varepsilon$. Tomamos una partición de puntos $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b$ de forma que la distancia entre dos puntos consecutivos sea menor que Δ.

Recordamos que la integral de Lebesgue en un conjunto $E \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}((0,1))$ de una función $f : (0,1) \to [0,\infty]$ se define como:

$$\int_E f d\lambda = \sup(\{\sum_{i=1}^{n} C_i \lambda(E_i) : (E_i)_{i=1}^n \text{ particion medible de } E; \; C_i \leq f|_{E_i}, \forall i \in \{1,\ldots,n\}\})$$

Entonces, sea $(E_i)_{i=1}^n \subset \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{L}$ partición de E y $(C_i)_{i=1}^n \subset [0,\infty)$ constantes tales que $\|h(t)\| \geq$ $\geq C_i$ para todo $t \in E_i$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ y cada $j \in \{1,\ldots,m-1\}$ tomamos $t_{ij} \in E_{ij} := E_i \cap [t_j, t_{j+1})$ (por la argumentación que vamos a hacer se observará de forma clara que se puede suponer que $E_{ij} \neq \emptyset$). De nuevo, sabemos que para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ y cada $j \in \{1,\ldots,m-1\}$ existe $x_{ij}^* \in S_{X^*}$ tal que $x_{ij}^*(h(t_{ij})) = \|h(t_{ij})\|$. Se tiene que

$$|x_{ij}^*(h(t)) - x_{ij}^*(h(t_{ij}))| \leq \|h(t) - h(t_{ij})\| < \varepsilon$$

para todo $t \in E_{ij}$, para cualesquiera $i \in \{1,\ldots,n\}$ y $j \in \{1,\ldots,m-1\}$. Por tanto, para cada i y cada j se tiene que

$$C_i \leq \|h(t_{ij})\| = x_{ij}^*(h(t_{ij})) < x_{ij}^*(h(t)) + \varepsilon$$

para todo $t \in E_{ij}$. Así, integrando esta última desigualdad se obtiene que

$$C_i \lambda(E_{ij}) \leq \int_{E_{ij}} x_{ij}^*(h(t)) d\lambda(t) + \varepsilon \lambda(E_{ij})$$

para todo i y todo j. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
&\sum_i C_i \lambda(E_i) = \sum_{i,j} C_i \lambda(E_{ij}) + \sum_i C_i \lambda(E_i \setminus [a,b)) \leq \\
&\leq \sum_{i,j} (\int_{E_{ij}} x_{ij}^*(h(t)) d\lambda(t) + \varepsilon \lambda(E_{ij})) + \int_{(0,1)\setminus[a,b)} \|h(t)\| \, d\lambda(t) \leq \\
&\leq \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} x_{ij}^*(g(t)) d\lambda(t) + \int_{E \cap [a,b)} \|h(t) - g(t)\| \, d\lambda(t) + 2\varepsilon \leq \\
&\leq \sum_{i,j} x_{ij}^*(\tau(E_{ij})) + 3\varepsilon \leq \sum_{i,j} \|\tau(E_{ij})\| + 3\varepsilon \leq |\tau|(E) + 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Tomando supremos en esta última desigualdad se deduce que

$$\int_E \|h(t)\| \, d\lambda(t) \leq |\tau|(E) + 3\varepsilon$$

Por tanto, se tiene:

$$\int_E \|g(t)\| \, d\lambda(t) \leq \int_E \|h(t)\| \, d\lambda(t) + \int_E \|g(t) - h(t)\| \, d\lambda(t) \leq |\tau|(E) + 4\varepsilon$$

La arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ nos hace concluir que $\int_E \|g(t)\| \, d\lambda(t) \leq |\tau|(E)$, desigualdad deseada. □

Nota: Se puede comprobar que el Lema 2.1.2 sigue siendo cierto si suprimimos la hipótesis de que la función $\|g\|$ sea integrable. Esto indica que en la Definición 2.1.5 podríamos suprimir también esa hipótesis ya que debido a que las medidas τ son de variación acotada se obtendría una definición equivalente.

Definición 2.1.6. Sea $f : [0,1) \to X$ función con valores en el espacio de Banach X. Diremos que f es *diferenciable* en el punto $t \in (0,1)$ si el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

existe en la norma de X. En caso de que exista, a dicho límite se le denota por $f'(t)$ y se le denomina *derivada* de f en t.

Pasamos a enunciar y demostrar el resultado central de este capítulo el cual nos revela tres importantes caracterizaciones del hecho de tener la propiedad de Radon-Nikodým.

Teorema 2.1.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es dentable.*

2. *X tiene la propiedad de Radon-Nikodým.*

3. *Toda función absolutamente continua $f : [0,1) \to X$ es diferenciable en casi todo punto, la derivada f' es una función medible y para todo $t \in [0,1)$ y todo $x^* \in X$ se tiene que*

$$\int_0^t \|f'(u)\| \, d\lambda(u) = v_f(t) < \infty \text{ y } x^*(f(t)) = x^*(f(0)) + \int_0^t x^*(f'(u)) d\lambda(u) \tag{2.9}$$

4. *Para toda función Lipschitz $f : [0,1) \to X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $t \in (0,1)$, $y \in X$ y $\delta > 0$ tal que $\left\|\frac{1}{s}(f(t+s) - f(t)) - y\right\| < \varepsilon$ para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $|s| < \delta$.*

Demostración. (1)$\Longrightarrow$(2). Sea $\tau : \mathcal{L} \to X$ medida vectorial λ-absolutamente continua de variación acotada. Dividiremos la demostración en varios pasos.

Afirmación 1: *Para todo $J \in \mathcal{L}^+$ existe $A \in \mathcal{L}^+(J)$ tal que* $\sup(\{|\tau|(E)/\lambda(E) : E \in \mathcal{L}^+(A)\}) < \infty$.

Demostración: Sea $J \in \mathcal{L}^+$ y supongamos que $\sup(\{|\tau|(E)/\lambda(E) : E \in \mathcal{L}^+(A)\}) = \infty$ para todo $A \in \mathcal{L}^+(J)$. Llamamos $\mathcal{P} = \{E \in \mathcal{L}^+(J) : |\tau|(E)/\lambda(E) > 2|\tau|(J)/\lambda(J)\}$. Es claro que $\mathcal{P}$ es cofinal en $\mathcal{L}^+(J)$ al ser $\sup(\{|\tau|(E)/\lambda(E) : E \in \mathcal{L}^+(A)\}) = \infty$ para todo $A \in \mathcal{L}^+(J)$. Así, por el Lema 2.1.1 sabemos que exite una familia numerable disjunta $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ tal que $\sum_{E\in\mathcal{B}} \lambda(E) = \lambda(J)$. Ahora bien, esto último nos indica que $\lambda\left(J \setminus \bigcup \mathcal{B}\right) = 0$ y por tanto, usando la continuidad absoluta de τ con respecto a λ se tiene:

$$|\tau|(J) = \sum_{E\in\mathcal{B}} |\tau|(E) > \frac{2|\tau|(J)}{\lambda(J)} \sum_{E\in\mathcal{B}} \lambda(E) = 2|\tau|(J)$$

lo que es contradictorio. Por tanto, se tiene lo deseado.

Afirmación 2: *Sea $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathcal{L}^+$ tal que el conjunto $\{\tau(E)/\lambda(E) : E \in \mathcal{L}^+(A)\}$ es acotado. Entonces existe $B \in \mathcal{L}^+(A)$ tal que* $\operatorname{diam}(\{\tau(E)/\lambda(E) : E \in \mathcal{L}^+(B)\}) \leq 2\varepsilon$.

Demostración: Llamamos $\hat{\tau}(E) = \tau(E)/\lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{L}^+$. Supongamos que para todo $B \in \mathcal{L}^+(A)$ se tiene que $\operatorname{diam}(\{\hat{\tau}(E) : E \in \mathcal{L}^+(B)\}) > 2\varepsilon$. Por la dentabilidad de X, como $M := \{\hat{\tau}(E) : E \in \mathcal{L}^+(A)\}$ es un conjunto acotado por hipótesis, se tiene que existe $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que la rebanada $M \cap \{x^* > a\}$ es no vacía y tiene diámetro menor que ε. Tomamos $x \in M \cap \{x^* > a\}$. Como $M \setminus B(x, \varepsilon) \subset \{x^* \leq a\}$, se sigue que $\overline{\operatorname{conv}}(M \setminus B(x, \varepsilon)) \subset \{x^* \leq a\}$ y en consecuencia, $x \notin \overline{\operatorname{conv}}(M \setminus B(x, \varepsilon))$. Consideramos $J \in \mathcal{L}^+(A)$ tal que $\hat{\tau}(J) = x$. Se tiene que la familia $\mathcal{P} := \{E \in \mathcal{L}^+(J) : \|\hat{\tau}(E) - \hat{\tau}(J)\| > \varepsilon\}$ es cofinal en $\mathcal{L}^+(J)$. En efecto, dado $B \in \mathcal{L}^+(J)$, sabemos que $\operatorname{diam}(\{\hat{\tau}(E) : E \in \mathcal{L}^+(B)\}) > 2\varepsilon$, por lo que es claro que necesariamente existe $E \in \mathcal{L}^+(B) \subset \mathcal{L}^+(J)$ tal que $\|\hat{\tau}(E) - \hat{\tau}(J)\| > \varepsilon$, y por tanto $E \in \mathcal{P}$. Así, de nuevo por el principio exhaustivo (Lema 2.1.1), se tiene que existe una familia numerable disjunta $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ tal que $\sum_{E\in\mathcal{Q}} \lambda(E) = \lambda(J)$. La continuidad absoluta de τ con respecto a λ nos asegura entonces que:

$$\hat{\tau}(J) = \frac{1}{\lambda(J)} \sum_{E\in\mathcal{Q}} \tau(E) = \sum_{E\in\mathcal{Q}} \frac{\lambda(E)}{\lambda(J)} \hat{\tau}(E)$$

Por tanto, como $\hat{\tau}(E) \in M \setminus B(\hat{\tau}(J), \varepsilon)$ para todo $E \in \mathcal{Q}$, $x = \hat{\tau}(J) \in \operatorname{sconv}(M \setminus B(\hat{\tau}(J), \varepsilon)) \subset$ $\subset \overline{\operatorname{conv}}(M \setminus B(\hat{\tau}(J), \varepsilon))$, lo que es contradictorio.[1]

[1]Dado A un subconjunto de un espacio de Banach X, se denota por $\operatorname{sconv}(A)$ al conjunto de todos los puntos x de X tales que se pueden expresar como $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i x_i$, donde los x_i son elementos de A y los λ_i numeros reales no negativos tales que $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i = 1$. El que $\operatorname{sconv}(A) \subset \overline{\operatorname{conv}}(A)$ se comprueba en el ejercicio 1.67 de [1].

Afirmación 3: *Para cualesquiera* $\varepsilon > 0$ *y* $J \in \mathcal{L}^+$ *existe* $B \in \mathcal{L}^+(J)$ *tal que* $\operatorname{diam}(\{\tau(E)/\lambda(E) : E \in \mathcal{L}^+(B)\}) < \varepsilon$.

Demostración: Es consecuencia directa de las afirmaciones 1 y 2.

Afirmación 4: *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe una familia numerable disjunta* $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}^+$ *tal que* $\sum_{B\in\mathcal{B}} \lambda(B) = 1$ *y* $\operatorname{diam}(\{\tau(E)/\lambda(E) : E \in \mathcal{L}^+(B)\}) < \varepsilon$ *para todo* $B \in \mathcal{B}$.

Demostración: La familia $\mathcal{P} := \{B \in \mathcal{L}^+ : \operatorname{diam}(\{\tau(E)/\lambda(E) : E \in \mathcal{L}^+(B)\}) < \varepsilon\}$ es cofinal en $\mathcal{L}^+$. En efecto, por la afirmación 3, para todo $J \in \mathcal{L}^+$ existe $B \in \mathcal{L}^+(J)$ tal que $B \in \mathcal{P}$. Por tanto, por el Lema 2.1.1 aplicado al conjunto $J = [0, 1)$ se concluye lo deseado.

Afirmación 5: *Existe una sucesión de familias numerables* $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L}^+)$ *cada una de ellas disjunta tal que se cumple:*

1. $\sum\limits_{C\in\mathcal{C}_n} \lambda(C) = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$
2. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{diam}(\{\tau(E)/\lambda(E) : E \in \mathcal{L}^+(C)\}) < \frac{1}{n}$ *para todo* $C \in \mathcal{C}_n$
3. *Para cualesquiera* $n, m \in \mathbb{N}$ *tales que* $n < m$ *se tiene que para todo* $C \in \mathcal{C}_m$ *existe* $C' \in \mathcal{C}_n$ *tal que* $C \subset C'$.

Demostración: Para todo $n \in \mathbb{N}$ consideramos $\mathcal{B}_n$ la familia dada en la afirmación 4 para el valor $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Así, es fácil comprobar que basta definir:

$$\mathcal{C}_n = \{B_1 \cap \ldots \cap B_n : B_i \in \mathcal{B}_i,\ \ \forall i \in \{1, .., n\}\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ para obtener lo deseado.

Afirmación 6: *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *definimos* $g_n = \sum_{C\in\mathcal{C}_n} (\tau(C)/\lambda(C))\chi_C$, *donde* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es la sucesión dada en la afirmación 5. Entonces existe* $N \subset [0, 1)$, *con* $\lambda(N) = 0$, *tal que* $\|g_n(t) - g_m(t)\| < \frac{1}{n}$ *para cualesquiera* $n, m \in \mathbb{N}$ *tales que* $n < m$, *para todo* $t \in [0, 1) \setminus N$.

Demostración: Teniendo en cuenta la afirmación 5, es fácil comprobar que basta tomar $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}([0, 1) \setminus \bigcup C_n)$.

Afirmación 7: *La función* $g : [0, 1) \to X$ *es medible, siendo* $g(t) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(t)$ *si* $t \in [0, 1) \setminus N$ *y* $g(t) = 0$ *si* $t \in N$.

Demostración: Por la afirmación 5, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $E_n \in \mathcal{L}$ tal que $\lambda(E_n) < 2^{-n}$ y la función $h_n := g_n - g_n\chi_{E_n}$ es simple (basta tomar $E_n = \bigcup(\mathcal{C}_n \setminus \{C_1, \ldots, C_m\})$ para ciertos conjuntos $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{C}_n$). Llamamos:

$$M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

Se tiene que $\lambda(M) = 0$. Comprobaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(t) = g(t)$ para todo $t \in [0, 1) \setminus (N \cup M)$ lo que nos hará obtener lo deseado. Así, sea $t \in [0, 1) \setminus (N \cup M)$. Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $\frac{1}{m} < \varepsilon$ y $t \notin \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k$. Así, como $t \notin E_n$ para todo $n \geq m$ se tiene que $h_n(t) = g_n(t)$ para todo $n \geq m$ y por tanto, teniendo en cuenta la afirmación 6:

$$\|h_n(t) - g(t)\| = \|g_n(t) - g(t)\| = \lim_{i\to\infty} \|g_n(t) - g_i(t)\| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$$

Por tanto, como vemos, se tiene que efectivamente g coincide en casi todo punto con el límite puntual de una sucesión de funciones simples, por lo que g es medible.

Afirmación 8: *Para cualesquiera $x^* \in X^*$ y $E \in \mathcal{L}$ se da la igualdad (2.8).*

Demostración: Sea $x^* \in X^*$ y $E \in \mathcal{L}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\left|x^*(\tau(E)) - \int_E x^*(g_n(t))d\lambda(t)\right| = \left|x^*(\tau(E)) - \sum_{C\in\mathcal{C}_n} x^*(\hat{\tau}(C))\lambda(C\cap E)\right| \leq$$

$$\leq \|x^*\| \left\|\tau(E) - \sum_{C\in\mathcal{C}_n} \hat{\tau}(C)\lambda(C\cap E)\right\| \leq \|x^*\| \sum_{C\in\mathcal{C}_n} \|\hat{\tau}(C\cap E) - \hat{\tau}(C)\| \lambda(C\cap E) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \|x^*\| \sum_{C\in\mathcal{C}_n} \lambda(C\cap E) = \frac{1}{n} \|x^*\| \lambda(E)$$

donde en la penúltima desigualdad se ha hecho uso de (2) de la afirmación 5. Por otra parte, teniendo en cuenta las afirmaciones 6 y 7, se tiene:

$$\left|\int_E x^*(g_n(t))d\lambda(t) - \int_E x^*(g(t))d\lambda(t)\right| \leq \|x^*\| \int_E \|g_n(t) - g(t)\| d\lambda(t) \leq \frac{1}{n} \|x^*\| \lambda(E)$$

Por tanto, se tiene que $\left|x^*(\tau(E)) - \int_E x^*(g(t))d\lambda(t)\right| \leq \frac{2}{n} \|x^*\| \lambda(E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de donde se sigue la igualdad (2.8). Así, como vemos, se tiene (2).

(2)$\Longrightarrow$(3). Sea $f : [0,1) \to X$ función absolutamente continua. Consideramos $\tau : \mathcal{L} \to X$ la medida vectorial que nos proporciona la Proposición 2.1.1 correspondiente a la función f. Notar que τ es λ-absolutamente continua y de variación acotada y por tanto, por (2) existe $g : [0,1) \to X$ función medible tal que $\|g\|$ es integrable Lebesgue y para todo $x^* \in X^*$ y $E \in \mathcal{L}$ se tiene la igualdad (2.8). Se tiene entonces que para cualesquiera $x^* \in X^*$ y $t \in [0,1)$:

$$x^*(f(t)) - x^*(f(0)) = x^*(\tau((0,t))) = \int_0^t x^*(g(u))d\lambda(u) \tag{2.10}$$

y también, por el Lema 2.1.2, para todo $t \in [0,1)$:

$$|\tau|([0,t)) = \int_0^t \|g(u)\| d\lambda(u) \tag{2.11}$$

El que g sea medible implica que existe un conjunto $N \subset [0,1)$ medible tal que $\lambda(N) = 0$ y $g([0,1) \setminus N)$ es separable.[2] Sea D un subconjunto denso numerable de $g([0,1) \setminus N)$. Tomamos $y \in D$. Como la función $[0,1) \ni t \to g(t) - y$ es el límite puntual de una sucesión de funciones simples en casi todo punto, la función $[0,1) \ni t \to \|g(t) - y\|$ es medible Lebesgue. Además, esta última función es también integrable Lebesgue por (2.11). Ahora, usaremos el siguiente conocido resultado:

Sea $\varphi : [0,1) \to \mathbb{R}$ una función integrable Lebesgue y llamamos $\phi(t) = \int_0^t \varphi d\lambda$, para todo $t \in [0,1)$. Entonces, ϕ es diferenciable en casi todo punto de $(0,1)$, y además $\phi'(t) = \varphi(t)$ para casi todo $t \in (0,1)$.

Se tiene entonces que

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|g(u) - y\| d\lambda(u) \to \|g(t) - y\| \quad \text{cuando } 0 \neq h \to 0 \tag{2.12}$$

[2] Por ser g medible existen $N \subset [0,1)$ medible, con $\lambda(N) = 0$, y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones simples tal que g es el límite puntual de las g_n en $[0,1) \setminus N$. Llamamos A a la clausura del conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n([0,1))$. Es claro que A es separable (al ser cada g_n simple) y $g([0,1) \setminus N) \subset A$, de lo que se deduce que $g([0,1) \setminus N)$ es separable.

para casi todo $t \in (0,1)$. Sabiendo esto es fácil comprobar que existe $M \subset (0,1)$ conjunto medible Lebesgue tal que $\lambda(M) = 0$ y para todo $t \in (0,1) \setminus M$ se cumple (2.12) para todo $y \in D$. Como consecuencia de esto último y de la densidad de D en $g([0,1) \setminus N)$ se tiene que

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|g(u) - g(t)\| \, d\lambda(u) \to 0 \text{ cuando } 0 \neq h \to 0 \tag{2.13}$$

para todo $t \in (0,1) \setminus (N \cup M)$. Sea ahora $t \in (0,1) \setminus (N \cup M)$. Para todo $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $t \pm h \in (0,1)$, por (2.10) y (2.13) se tiene:

$$\left\| \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) - g(t) \right\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} x^*(\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) - g(t)) =$$

$$= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} x^*(g(u) - g(t)) d\lambda(u) \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|g(u) - g(t)\| \, d\lambda(u) \to 0$$

cuando $0 \neq h \to 0$. Esto nos indica que f es diferenciable en t y $f'(t) = g(t)$. Así, $f'(t) = g(t)$ para casi todo $t \in [0,1)$. Por tanto, f' es medible y (2.10) se traduce en la segunda igualdad de (2.9). Finalmente, por (2.11) junto con la Proposición 2.1.1 se obtiene la primera igualdad de (2.9). Por tanto, como vemos, se tiene (3).

(3)$\Longrightarrow$(4). Es evidente.

(4)$\Longrightarrow$(1). Supongamos que X no es dentable. Entonces existe un conjunto $M \subset B_X$ no vacío y $\varepsilon > 0$ tal que toda rebanada del conjunto M tiene diámetro mayor que 2ε. Se tiene así que para todo $x \in M$, $x \in \overline{\text{conv}}(M \setminus B(x,\varepsilon))$. En efecto, supongamos que existe $x \in M$ tal que $x \notin \overline{\text{conv}}(M \setminus B(x,\varepsilon))$. Por el teorema de separación, existe $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que $x^*(x) > a >$ $> \sup(\{x^*(y) : y \in \overline{\text{conv}}(M \setminus B(x,\varepsilon))\})$. Así, para todo $y \in M \cap \{x^* > a\}$, $y \notin M \setminus B(x,\varepsilon)$, o lo que es lo mismo $y \in B(x,\varepsilon)$ y por tanto se tendría que $\text{diam}(M \cap \{x^* > a\}) \leq 2\varepsilon$, lo que es contradictorio.

Vamos a construir ahora una sucesión de funciones simples $g_1, g_2, \ldots : [0,1) \to X$ y una sucesión de funciones Lipschitz $f_1, f_2, \ldots : [0,1) \to X$ tal como sigue. Por "intervalo" entenderemos siempre un conjunto de la forma $[a,b)$ con $0 \leq a < b \leq 1$. Tomamos $x_1^1 \in M$ y definimos $g_1 = x_1^1 \chi_{I_1^1}$ donde $I_1^1 = [0,1)$. Supongamos ahora que dado $n \in \mathbb{N}$ tenemos definida una función $g_n : [0,1) \to X$ de la forma

$$g_n = \sum_{i=1}^{k_n} x_i^n \chi_{I_i^n}$$

donde $k_n \in \mathbb{N}$, $x_1^n, \ldots x_{k_n}^n \in M$ e $I_1^n, \ldots I_{k_n}^n$ constituyen una familia de intervalos disjuntos dos a dos tales que $I_1^n \cup \ldots \cup I_{k_n}^n = [0,1)$ y $\lambda(I_i^n) \leq 2^{-n+1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k_n\}$. Fijamos por un momento $i \in \{1, \ldots, k_n\}$. Como $x_i^n \in \overline{\text{conv}}(M \setminus B(x_i^n, \varepsilon))$, existe un conjunto finito $A_i^n \subset (0,1]$ tal que $\sum_{a \in A_i^n} a = 1$ y para todo $a \in A_i^n$ existe $x_a \in M \setminus B(x_i^n, \varepsilon)$ de forma que se tiene que

$$\left\| x_i^n - \sum_{a \in A_i^n} a x_a \right\| < 2^{-n} \tag{2.14}$$

Tomamos una familia finita de intervalos disjuntos dos a dos, $(I_a^{n,i})_{a \in A_i^n} \subset \mathcal{P}(I_i^n)$, tal que $\bigcup_{a \in A_i^n} I_a^{n,i} =$ $= I_i^n$ y $\lambda(I_a^{n,i}) = a\lambda(I_i^n)$ para todo $a \in A_i^n$. Teniendo en cuenta el hecho de que a lo sumo un elemento de A_i^n es mayor que $\frac{1}{2}$, es fácil comprobar que, haciendo un ligero cambio a la familia $(I_a^{n,i})_{a \in A_i^n}$ si es necesario, podemos suponer que $\lambda(I_a^{n,i}) \leq 2^{-n}$ para todo $a \in A_i^n$. Haciendo esto para todo i, obtenemos una familia de intervalos disjuntos dos a dos, $\{I_a^{n,i} : a \in A_i^n;\ i \in \{1, \ldots, k_n\}\}$, tal que su unión es igual al intervalo $[0,1)$. Numeramos los intervalos de dicha familia como $I_1^{n+1}, I_2^{n+1}, \ldots, I_{k_{n+1}}^{n+1}$, y también numeramos el conjunto $A_1^n \cup \ldots \cup A_{k_n}^n$ como $x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \ldots, x_{k_{n+1}}^{n+1}$

de tal forma que si un elemento $a \in A_i^n$ es llamado x_j^{n+1} se tenga que el intervalo $I_a^{n,i}$ ha sido llamado I_j^{n+1}. Definimos entonces la función

$$g_{n+1} = \sum_{i=1}^{k_{n+1}} x_i^{n+1} \chi_{I_i^{n+1}}$$

Esto finaliza el proceso de construcción inductivo de las funciones g_n. Es claro que podemos suponer que $I_j^n = [b_{j-1}^n, b_j^n)$ para todo $j \in \{1, .., k_n\}$, siendo $0 = b_0^n < b_1^n < b_2^n < \ldots < b_{k_n}^n = 1$. Observamos que $\|g_{n+1}(t) - g_n(t)\| \geq \varepsilon$ para todo $t \in [0,1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Definimos las funciones

$$f_n(t) = \int_0^t g_n d\lambda = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda(I_i^n \cap [0,t)) x_i^n$$

para todo $t \in [0,1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como las funciones g_n toman valores en B_X, las funciones f_n son 1-Lipschitz.

Fijamos por un momento $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, k_n\}$. Tomamos $r \in \{1, \ldots, k_{n+1}\}$ tal que $b_i^n = b_r^{n+1}$. Se tiene que $f_n(b_i^n) = \sum_{j=1}^{i} \lambda(I_j^n) x_j^n$ y

$$f_{n+1}(b_i^n) = f_{n+1}(b_r^{n+1}) = \sum_{j=1}^{i} \sum_{l \in N_j} \lambda(I_l^{n+1}) x_l^{n+1}$$

donde $N_1, \ldots, N_i$ son subconjuntos de $\{1, \ldots, k_{n+1}\}$ tales que $\max N_j = \min N_{j+1} - 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ y $N_1 \cup \ldots \cup N_i = \{1, \ldots, r\}$. Por tanto, por (2.14), se tiene:

$$\|f_n(b_i^n) - f_{n+1}(b_i^n)\| \leq \sum_{j=1}^{i} \left\| \lambda(I_j^n) x_j^n - \sum_{l \in N_j} \lambda(I_l^{n+1}) x_l^{n+1} \right\| < \sum_{j=1}^{i} 2^{-n} \lambda(I_j^n) = 2^{-n} b_i^n \leq 2^{-n}$$

Entonces, como $b_i^n - b_{i-1}^n = \lambda(I_i^n) \leq 2^{-n+1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k_n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y f_n es 1-Lipschitz para todo $n \in \mathbb{N}$ se deduce que

$$\begin{aligned} \|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| \leq \left\|f_n(t) - f_n(b_{i-1}^n)\right\| + \left\|f_n(b_{i-1}^n) - f_n(b_i^n)\right\| + \\ + \|f_n(b_i^n) - f_{n+1}(b_i^n)\| + \|f_{n+1}(b_i^n) - f_{n+1}(t)\| < 5 \cdot 2^{-n} \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que la sucesión de las funciones f_n convergen uniformemente en $[0,1)$ a una función Lipschitz que llamaremos f.

Fijamos de nuevo por un momento $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, k_n\}$. Tomamos $N_i \subset \{1, \ldots, k_{n+1}\}$ tal que $I_i^n = \bigcup_{l \in N_i} I_l^{n+1}$. Entonces, se tiene que

$$\int_{I_i^n} g_{n+1} d\lambda = \sum_{l \in N_i} \int_{I_l^{n+1}} g_{n+1} d\lambda = \sum_{l \in N_i} \lambda(I_l^{n+1}) x_l^{n+1}$$

Por tanto, por (2.14),

$$\left\| \int_{I_i^n} g_n d\lambda - \int_{I_i^n} g_{n+1} d\lambda \right\| = \left\| \lambda(I_i^n) x_i^n - \sum_{l \in N_i} \lambda(I_l^{n+1}) x_l^{n+1} \right\| < 2^{-n} \lambda(I_i^n)$$

Reemplazando n por $n+1$ se obtiene que

$$\left\| \int_{I_l^{n+1}} g_{n+1} d\lambda - \int_{I_l^{n+1}} g_{n+2} d\lambda \right\| < 2^{-n-1} \lambda(I_l^{n+1})$$

para todo $l \in \{1, \ldots, k_{n+1}\}$. Por tanto

$$\left\| \int_{I_i^n} g_n d\lambda - \int_{I_i^n} g_{n+2} d\lambda \right\| \leq \left\| \int_{I_i^n} g_n d\lambda - \int_{I_i^n} g_{n+1} d\lambda \right\| + \sum_{l \in N_i} \left\| \int_{I_l^{n+1}} g_{n+1} d\lambda - \int_{I_l^{n+1}} g_{n+2} d\lambda \right\| <$$

$$< 2^{-n} \lambda(I_i^n) + 2^{-n-1} \sum_{l \in N_i} \lambda(I_l^{n+1}) = (2^{-n} + 2^{-n-1}) \lambda(I_i^n)$$

Aplicando un proceso inductivo se deduce que:

$$\left\| \int_{I_i^n} g_n d\lambda - \int_{I_i^n} g_{n+m} d\lambda \right\| < (2^{-n} + \ldots + 2^{-n-m+1}) \lambda(I_i^n) < 2^{-n+1} \lambda(I_i^n)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto último traducido a términos de las f_n y los b_i^n se expresa como:

$$\left\| f_n(b_i^n) - f_n(b_{i-1}^n) - (f_{n+m}(b_i^n) - f_{n+m}(b_{i-1}^n)) \right\| < 2^{-n+1} \lambda(I_i^n)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Haciendo tender $m \to \infty$ se obtiene:

$$\left\| f_n(b_i^n) - f_n(b_{i-1}^n) - (f(b_i^n) - f(b_{i-1}^n)) \right\| \leq 2^{-n+1} \lambda(I_i^n) \tag{2.15}$$

Esta última desigualdad se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $i \in \{1, \ldots, k_n\}$, claro.

Ahora, por (4) aplicado a la función f se tiene que existe $t \in (0, 1)$, $y \in X$ y $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \frac{f(s) - f(t)}{s - t} - y \right\| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ para todo } s \in [0, 1) \text{ tal que } 0 < |s - t| < \delta$$

Entonces, para cualesquiera $s_1 \in (t - \delta, t] \cap [0, 1)$ y $s_2 \in (t, t + \delta) \cap [0, 1)$ se tiene

$$\|f(s_2) - f(s_1) - (s_2 - s_1)y\| \leq \|f(s_2) - f(t) - (s_2 - t)y\| +$$
$$+ \|f(s_1) - f(t) - (s_1 - t)y\| < \frac{\varepsilon}{4}(s_2 - t) + \frac{\varepsilon}{4}(t - s_1) = \frac{\varepsilon}{4}(s_2 - s_1)$$

o lo que es lo mismo

$$\left\| \frac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1} - y \right\| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.16}$$

Tomamos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $2^{-n+3} < \varepsilon$ y $2^{-n+1} < \delta$. Tomamos $i \in \{1, \ldots, k_n\}$ tal que $t \in I_i^n = [b_{i-1}^n, b_i^n)$, y $j \in \{1, \ldots, k_{n+1}\}$ tal que $t \in I_j^{n+1} = [b_{j-1}^{n+1}, b_j^{n+1})$. Teniendo en cuenta que

$$f_n(b_i^n) - f_n(b_{i-1}^n) = \int_{b_{i-1}^n}^{b_i^n} g_n d\lambda = \lambda(I_i^n) x_i^n$$

y

$$f_{n+1}(b_j^{n+1}) - f_{n+1}(b_{j-1}^{n+1}) = \int_{b_{j-1}^{n+1}}^{b_j^{n+1}} g_{n+1} d\lambda = \lambda(I_j^{n+1}) x_j^{n+1}$$

por (2.15) se tiene que

$$\left\| \lambda(I_i^n) x_i^n - (f(b_i^n) - f(b_{i-1}^n)) \right\| \leq 2^{-n+1} \lambda(I_i^n)$$

y

$$\left\| \lambda(I_j^{n+1}) x_j^{n+1} - (f(b_j^{n+1}) - f(b_{j-1}^{n+1})) \right\| \leq 2^{-n} \lambda(I_j^{n+1})$$

o lo que es lo mismo

$$\left\| x_i^n - \frac{f(b_i^n) - f(b_{i-1}^n)}{b_i^n - b_{i-1}^n} \right\| \leq 2^{-n+1} \text{ y } \left\| x_j^{n+1} - \frac{f(b_j^{n+1}) - f(b_{j-1}^{n+1})}{b_j^{n+1} - b_{j-1}^{n+1}} \right\| \leq 2^{-n}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2.16) se tiene que

$$\|x_i^n - y\| < \frac{\varepsilon}{4} + 2^{-n+1} \text{ y } \left\| x_j^{n+1} - y \right\| < \frac{\varepsilon}{4} + 2^{-n}$$

y por tanto $\left\| x_i^n - x_j^{n+1} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-n+2} < \varepsilon$, lo que es contradictorio con el hecho de que $x_j^{n+1} \in$ $\in M \setminus B(x_i^n, \varepsilon)$. Por tanto, como vemos, se tiene (1). $\square$

2.2. Relación RNP-SKMP

El objetivo de esta sección será exponer la relación existente entre la propiedad de Radon-Nikodým de un espacio de Banach con la llamada propiedad fuerte de Krein-Milman, la cual nos indica en cierto modo cómo es la geometría de los subconjuntos cerrados y acotados del espacio ambiente. Además, veremos también que en todo espacio de Banach con la RNP existe un subconjunto cerrado y acotado tal que no existe función no trivial f del dual que alcance su supremo en dicho subconjunto.

Proposición 2.2.1. *Sea X espacio de Banach y $K \subset X$ subconjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *K es dentable.*
2. *Para todo $r > 0$ existe $x \in K$ tal que $x \notin \overline{\text{conv}}(K \setminus B(x, r))$.*
3. *Para todo $r > 0$ existen $x, y \in K$ tal que $y \notin \overline{\text{conv}}(K \setminus B(x, r))$.*

Demostración. (1)$\Longrightarrow$(2). Sea $r > 0$. Por ser K dentable, existe $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\{y \in K : x^*(y) > a\} \neq \emptyset \text{ y } \operatorname{diam}(\{y \in K : x^*(y) > a\}) < r$$

Tomamos $x \in K$ tal que $x^*(x) > a$. Notar que $\{y \in K : x^*(y) \leq a\}$ es convexo y cerrado y $K \setminus B(x, r) \subset \{y \in K : x^*(y) \leq a\}$ por lo que $\overline{\text{conv}}(K \setminus B(x, r)) \subset \{y \in K : x^*(y) \leq a\}$. Se concluye así que $x \notin \overline{\text{conv}}(K \setminus B(x, r))$.

(2)$\Longrightarrow$(3). Es evidente.

(3)$\Longrightarrow$(1). Sea $r > 0$. Por hipótesis existen $x, y \in K$ tales que $y \notin \overline{\text{conv}}(K \setminus B(x, r/2))$. Por el teorema de separación, existe $x^* \in X^*$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup(\{x^*(z) : z \in K \setminus B(x, r/2)\}) < t < x^*(y)$$

Se tiene entonces que la rebanada $\{y \in K : x^*(y) > t\}$ es no vacía (ya que y es un elemento de ella) y tiene diámetro menor o igual que r al estar contenida en la bola $B(x, r/2)$. $\square$

En lo que resta de sección, dado X espacio de Banach, $A \subset X$ subconjunto y $r > 0$ denotaremos

$$B_r(A) := \bigcup \{B(x, r) : x \in A\}$$

Definición 2.2.1. Dado A subconjunto de un espacio de Banach X, llamamos *r-red* a todo subconjunto $N \subset A$ tal que $A \subset B_r(N)$.

Proposición 2.2.2. *Sea X espacio de Banach y $K \subset X$ subconjunto cerrado, convexo y acotado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *K no es dentable.*
2. *Existe $r > 0$ tal que ninguna rebanada no vacía de K tiene una r-red finita.*
3. *Existe $r > 0$ tal que $K = \overline{\text{conv}}(K \setminus B_r(\{x_1, \ldots, x_n\}))$ para todo subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset$ $\subset K$.*

Demostración. (1)$\Longrightarrow$(2). Suponemos sin pérdida de generalidad que $K \subset B_X$. Al ser K no dentable existe $\delta > 0$ tal que toda rebanada no vacía de K tiene diámetro mayor que δ. Llamamos $r = \delta/3$. Supongamos que existe una rebanada no vacía de K que tiene una r-red finita, o lo que es equivalente, que existe $x^* \in X^*$ y $\alpha < \sup(x^*(K))$ tal que el conjunto $S = \{x \in K : x^*(x) \geq \alpha\}$ tiene una r-red finita, esto es, existen $x_1, \ldots, x_n \in S$ tales que $S \subset B_r(\{x_1, \ldots, x_n\})$. Llamamos $H = \{x \in K : x^*(x) = \alpha\} \subset S$. Por ser $\alpha < \sup(x^*(K))$ y H convexo y cerrado se tiene que

$S \supsetneq H = \overline{\text{conv}}(H)$. Esto último junto al hecho de que S es convexo y cerrado nos permite asegurar sin pérdida de generalidad que existe $m \leq n$ tal que

$$S = \overline{\text{conv}}(H \cup (S \cap B_r(\{x_1, \ldots, x_m\})))$$

pero

$$S \supsetneq K_1 := \overline{\text{conv}}(H \cup (S \cap B_r(\{x_2, \ldots, x_m\})))$$

(Si $m = 1$, tomamos $K_1 = H$) Tomamos $y_0 \in (S \cap B(x_1, r)) \setminus K_1$. Por el teorema de separación, existe $g \in X^*$ tal que

$$c := \sup(g(S)) \geq g(y_0) > \sup(g(K_1)) =: a$$

Tomamos $b \in (a, c)$ tal que

$$\frac{b-a}{c-a} > 1 - \frac{\delta}{12}$$

Definimos el conjunto $S' = \{x \in S : g(x) \geq b\}$. Vamos a comprobar que $\text{diam}(S') \leq \delta$. Llamamos $L = \{x \in S \cap B(x_1, r) : g(x) \geq a\}$ y $K_2 = \{x \in S : g(x) \leq a\}$. Es claro que $K_1 \subset K_2$ e $y_0 \in L$. También,

$$L \cup K_2 \supset H \cup (S \cap B_r(\{x_1, \ldots, x_n\}))$$

y por tanto

$$S = \overline{\text{conv}}(L \cup K_2)$$

Esto nos indica que $\text{conv}(L \cup K_2)$ es denso en S, lo que a su vez, teniendo en cuenta que g es continua y el hecho de que $\{x \in S : g(x) > b\}$ es denso en S' (ya que $b < \sup(g(S))$ y S' es convexo), nos permite deducir que $\text{conv}(L \cup K_2) \cap S'$ es denso en S'. Sea $\lambda x + (1-\lambda)y \in \text{conv}(L \cup K_2) \cap S'$, donde $\lambda \in [0, 1]$, $x \in L$ e $y \in K_2$ (todos los elementos de $\text{conv}(L \cup K_2)$ son de esta forma al ser L y K_2 convexos). Se tiene que

$$b \leq g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda c + (1-\lambda)a = \lambda(c-a) + a$$

Por tanto, $\lambda \geq (b-a)/(c-a) > 1 - \delta/12$, por lo que $1 - \lambda < \delta/12$. Tomando otro punto $\lambda' x' + (1-\lambda')y' \in \text{conv}(L \cup K_2) \cap S'$, con $\lambda' \in [0, 1]$, $x' \in L$ e $y' \in K_2$, se tiene también que $1 - \lambda' < \delta/12$, y por tanto:

$$\begin{aligned}
\|(\lambda x + (1-\lambda)y) - (\lambda' x' + (1-\lambda')y')\| &\leq \|\lambda x - \lambda' x'\| + \|(1-\lambda)y\| + \|(1-\lambda')y'\| \leq \\
&\leq \|x - (1-\lambda)x - x' + (1-\lambda')x'\| + \frac{\delta}{12} + \frac{\delta}{12} \leq \\
&\leq \|x - x'\| + \frac{\delta}{12} + \frac{\delta}{12} + \frac{\delta}{12} + \frac{\delta}{12} \leq \\
&\leq 2r + \frac{1}{3}\delta = \delta
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad se ha hecho uso de que $K \subset B_X$ y en la penúltima del hecho de que $x, x' \in L \subset B(x_1, r)$. Esta cadena de desigualdades muestra que $\text{diam}(\text{conv}(L \cup K_2) \cap S') \leq \delta$ y por la densidad de este conjunto en S' se concluye que $\text{diam}(S') \leq \delta$. Así, S' no puede contener una rebanada no vacía de K. En particular, existe $z \in \{x \in K : g(x) \geq b\} \setminus S'$. Es claro que la pertenencia de z a este útimo conjunto implica que $x^*(z) < \alpha$. Tomamos $w \in S'$. Al ser $H \subset K_1$ y $K_1 \cap S' = \emptyset$ (ya que $b > a = \sup(g(K_1))$) se tiene que $x^*(w) > \alpha$. Podemos tomar entonces $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\lambda z + (1-\lambda)w \in H$. Ahora bien, como $g(\lambda z + (1-\lambda)w) \geq b$ y $\lambda z + (1-\lambda)w \in H \subset S$ se deduce que $\lambda z + (1-\lambda)w \in S'$. Esto último es contradictorio con el hecho de que $S' \cap H = \emptyset$. Por tanto, como vemos, se tiene (2).

(2)$\Longrightarrow$(3). Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ subconjunto finito. Como K es convexo cerrado se tiene el contenido $\overline{\text{conv}}(K \setminus B_r(\{x_1, \ldots, x_n\})) \subset K$. El contenido opuesto se razona mediante el teorema de separación de forma análoga a la demostración de la implicación (3)$\Longrightarrow$(1) de la Proposición 2.2.1.

(3)$\Longrightarrow$(1). Es consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.1. $\square$

Corolario 2.2.1. *Sea X espacio de Banach y $K \subset X$ subconjunto cerrado, convexo, acotado y no dentable tal que* $\mathrm{Int}(K) \neq \emptyset$*. Entonces, existe $r > 0$ tal que para todo subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ se tiene que* $\mathrm{Int}(K) = \mathrm{conv}(\mathrm{Int}(K) \setminus B_r(\{x_1, \ldots, x_n\}))$.

Demostración. Tomamos el $r > 0$ de (3) de la Proposición 2.2.2. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ subconjunto finito. Llamamos $J = K \setminus B_r(\{x_1, \ldots, x_n\})$. Tenemos entonces que $K = \overline{\mathrm{conv}}(J)$. Notar también que $\mathrm{Int}(J) = \mathrm{Int}(K) \setminus B_r(\{x_1, \ldots, x_n\})$. Vamos a comprobar que $J \subset \overline{\mathrm{Int}(J)}$. Sea $y \in J$. Tomamos $z \in \mathrm{Int}(K)$. Se tiene que el segmento semiabierto $[z, y)$ está contenido en $\mathrm{Int}(K)$. En efecto, consideramos $s > 0$ suficientemente pequeño para que $B(z, s) \subset K$. Si existiera $x \in (z, y)$ tal que $x \notin \mathrm{Int}(K)$, podemos encontrar un punto $x' \notin K$ suficientemente cercano a x como para que la recta que une los puntos x' e y intersecara a la bola $B(z, s)$ en cierto punto z'. Se tendría entonces que $z' \in K$ y $x' \in [z', y] \setminus K$ lo que contradice la convexidad de K. Una vez sabido que $[z, y) \subset \mathrm{Int}(K)$ observamos que al ser y no perteneciente al cerrado $B_r(\{x_1, \ldots, x_n\})$, para los $w \in [z, y)$ suficientemente cercanos a y se tiene que $w \notin B_r(x_1, \ldots, x_n\})$ y por tanto, y es límite de puntos contenidos en $\mathrm{Int}(K) \setminus B_r(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \mathrm{Int}(J)$, por lo que $y \in \overline{\mathrm{Int}(J)}$. Se tiene entonces que

$$\mathrm{conv}(J) \subset \mathrm{conv}(\overline{\mathrm{Int}(J)}) \subset \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{Int}(J))$$

donde el segundo contenido se comprueba fácilmente teniendo en cuenta que si $A \subset X$ entonces

$$\mathrm{conv}(A) = \{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n : a_1, \ldots, a_n \in A;\ (t_i)_{i=1}^n \subset [0, 1];\ t_1 + \ldots + t_n = 1;\ n \in \mathbb{N}\}$$

Así, teniendo en cuenta que el interior de un conjunto convexo no vacío coincide con el interior de su clausura y que la envoltura convexa de un abierto es abierta, se tiene que

$$\mathrm{Int}(K) = \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{conv}}(J)) = \mathrm{Int}(\mathrm{conv}(J)) \subset \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{Int}(J))) = \mathrm{Int}(\mathrm{conv}(\mathrm{Int}(J))) = \mathrm{conv}(\mathrm{Int}(J))$$

Así, como vemos, se tiene el contenido $\mathrm{Int}(K) \subset \mathrm{conv}(\mathrm{Int}(J))$. El que $\mathrm{conv}(\mathrm{Int}(J)) \subset \mathrm{Int}(K)$ es consecuencia directa de que $\mathrm{Int}(K)$ es convexo al ser K convexo. Por tanto, se concluye que $\mathrm{Int}(K) = \mathrm{conv}(\mathrm{Int}(J))$. □

Definición 2.2.2. Dado X espacio de Banach y $A \subset X$ subconjunto no vacío, diremos que $x \in A$ es un *punto extremo* de A si se tiene que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \Longrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = x$$

para cualesquiera $(\lambda_i)_{i=1}^n \subset (0, 1)$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ y $(a_i)_{i=1}^n \subset A$.

Definición 2.2.3. Se dice que un espacio de Banach X tiene la *propiedad fuerte de Krein-Milman* (SKMP) si todo subconjunto cerrado y acotado de X tiene un punto extremo.

El siguiente resultado nos indica en particular que la propiedad fuerte de Krein-Milman y la propiedad de Radon-Nikodým son equivalentes.

Teorema 2.2.1. *Dado un espacio de Banach X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X no tiene la RNP.*

2. *Existe un subconjunto cerrado y acotado $A \subset X$ tal que A no tiene puntos extremos.*

3. *Existe una norma equivalente $|||\cdot|||$ en X y un subconjunto cerrado $A \subset X$ tal que*

$$A \subset \{x \in X : |||x||| < 1\} \text{ y } \overline{\mathrm{conv}}(A) = \{x \in X : |||x||| \leq 1\}$$

4. *Existe un subconjunto cerrado y acotado $A \subset X$ tal que ninguna $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ alcanza su supremo en A.*

Demostración. (3)$\Longrightarrow$(4). Dado $A \subset X$ subconjunto cerrado y acotado, supongamos que existe $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ y $x \in A$ tal que $x^*(x) = \sup(x^*(A))$. Como $0 \in \overline{\text{conv}}(A)$, es fácil comprobar que $x^*(x) > 0$. Por hipótesis se tiene que $|||x||| < 1$ y por tanto llamando $z = x/|||x|||$ se tiene que $x^*(z) > x^*(x)$. Ahora bien, por hipótesis $z \in \overline{\text{conv}}(A)$. Esto junto al hecho de que x^* es continua nos permite asegurar la existencia de elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ y $t_1, \ldots, t_n \in (0, 1]$, con $t_1 + \ldots + t_n = 1$ tales que

$$x^*(t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n) = t_1 x^*(a_1) + \ldots + t_n x^*(a_n) > x^*(x)$$

Es claro que esto implica que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x^*(a_i) > x^*(x) = \sup(x^*(A))$, lo que al ser $a_i \in A$ es contradictorio. Por tanto, como vemos, se tiene (4).

(2)$\Longrightarrow$(1). Si X tuviera la RNP, por el Teorema 2.1.1 y el Corolario 1.1.1 se tendría que $\overline{\text{conv}}(A)$ tendría un punto fuertemente expuesto z. Argumentando de forma similar a la implicación precedente y teniendo en cuenta que A es cerrado se comprueba fácilmente que $z \in A$ siendo además un punto extremo de A. Esto contradice (2) y se concluye la implicación.

(4)$\Longrightarrow$(1). Argumentando por reducción al absurdo de forma análoga a la implicación anterior se obtendría que $\overline{\text{conv}}(A)$ tendría un punto fuertemente expuesto z, el cual de hecho pertenecería a A. Teniendo en cuenta la definición de punto fuertemente expuesto es claro que esto deriva en una contradicción con (4) por lo que se concluye la implicación.

(1)$\Longrightarrow$(2) y (1)$\Longrightarrow$(3). Observamos primero que X tiene un subespacio separable Y tal que Y no tiene la RNP. En efecto, supongamos que todo subespacio separable de X tuviera la RNP. Sea $f : [0, 1) \to X$ función Lipschitz. El subespacio separable $Z := \overline{\text{span}}(f(\mathbb{Q} \cap [0, 1)) \subset X$ contiene a Im f, al ser f Lipschitz. Así, viendo f como $f : [0, 1) \to Z$, f cumple (4) del Teorema 2.1.1 al tener Z la RNP. Se deduciría entonces del mismo resultado que X tiene la RNP, lo que es contradictorio. Como Y no tiene la RNP, de nuevo por el Teorema 2.1.1 existe $K \subset Y$ subconjunto acotado tal que K no es dentable. Se comprueba fácilmente que la clausura del conjunto $\text{conv}(K \cup (-K)) + B_Y$ tampoco es dentable (ver ejercicio 11.8 de [1]). Además la clausura de dicho conjunto, la cual denotaremos por K', es también convexa y simétrica y por tanto la aplicación

$$Y \ni y \mapsto p_{K'}(y)$$

(ver Definición 1.2.3) define una norma en Y, la cual además es equivalente a la original (ya que si $K \subset tB_Y$, entonces $B_Y \subset K' \subset (1 + t)B_Y$). Este razonamiento nos indica que, haciendo uso de una norma equivalente si es necesario, podemos suponer que $K = B_Y$. Por el Corolario 2.2.1, existe $r > 0$ tal que $\text{Int}(K) = \text{conv}(\text{Int}(K) \setminus B_r(\{x_1, \ldots, x_n\}))$ para todo $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \text{Int}(K)$ subconjunto finito. Como Y es separable e $\text{Int}(K)$ no es más que la bola unidad abierta de Y, podemos tomar $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{Int}(K)$ sucesión densa en $\text{Int}(K)$. Definimos una sucesión de subconjuntos finitos $F_1, F_2, \ldots \subset \text{Int}(K)$ mediante el siguiente proceso inductivo. Tomamos $F_1 = \{y_1\}$. Ahora, si $F_1, \ldots, F_{n-1}$ ya han sido definidos, tomamos F_n subconjunto finito de $\text{Int}(K) \setminus B_r(F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1})$ tal que $F_1 \cup \ldots \cup F_n \cup \{y_1, \ldots, y_n\} \subset \text{conv}(F_n)$. Definimos $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Notar que si $i < j$ entonces $F_i \subset \text{conv}(F_j)$ y $F_i \cap F_j = \emptyset$, por lo que F no tiene puntos extremos. También, si $x \in F_i$ e $y \in F_j$ con $i \neq j$, $\|x - y\| > r$. Esto último implica que toda sucesión convergente contenida en F debe estar contenida en algún F_i salvo quizás un número finito de términos y por tanto, F es cerrado. Así, se tiene (2) para $A = F$. También, como $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset F$ y dicha sucesión es densa en $\text{Int}(K)$ se sigue que

$$K = \overline{\{y_i : i \in \mathbb{N}\}} = \overline{\text{conv}}(\{y_i : i \in \mathbb{N}\}) \subset \overline{\text{conv}}(F) \subset \overline{\text{Int}(K)} = K$$

donde en la segunda desigualdad se ha tenido en cuenta que K es convexo y cerrado y la igualdad $\overline{\text{conv}}(\overline{C}) = \overline{\text{conv}}(C)$ válida para todo subconjunto $C \subset X$. Así, $K = \overline{\text{conv}}(F)$, por lo que se tiene (3) en el caso en que X sea separable. Comprobemos entonces (3) en el caso general. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto

$$G_n = F_n + \left\{ x \in X : \|x\| \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{r}{6} \right\}$$

Definimos el conjunto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Notar que si $i < j$ entonces $G_i \subset \text{conv}(G_j)$ (y $G_i \cap G_j = \emptyset$, como veremos a continuación) por lo que G tampoco tiene puntos extremos. Ahora, si $x = x_1 + x_2 \in \in G_i$, con $x_1 \in F_i$ y

$$x_2 \in \frac{ir}{6(i+1)} B_X$$

e $y = y_1 + y_2 \in G_j$, con $y_1 \in F_j$ e

$$y_2 \in \frac{jr}{6(j+1)} B_X$$

se tiene que $\|x_2 - y_2\| \leq \|x_2\| + \|y_2\| \leq r/6 + r/6 = r/3$ y por tanto

$$\|x - y\| \geq \|x_1 - y_1\| - \|x_2 - y_2\| > r - \frac{r}{3} = \frac{2}{3} r$$

Esto muestra que toda sucesión convergente contenida en G ha de estar contenida en algún G_i salvo quizás un número finito de términos y como cada G_i es cerrado (al ser unión finita de bolas cerradas) se tiene entonces que G es cerrado. Vamos a comprobar ahora que $\text{conv}(A)$ es denso en el conjunto

$$B = K + \{x \in X : \|x\| < r/6\}$$

Para ello, sea $k \in K$, $x \in X$ tal que $\|x\| < r/6$ y $\varepsilon > 0$. Hemos visto que $K = \overline{\text{conv}}(F)$ y por tanto existe $y \in \text{conv}(F)$ tal que $\|k - y\| \leq \varepsilon$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que

$$y \in \text{conv}(F_n) \text{ y } \|x\| < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{r}{6}$$

Se tiene entonces que $y + x \in \text{conv}(G_n) \subset \text{conv}(A)$ y $\|(k + x) - (y + x)\| = \|k - y\| < \varepsilon$. Así, como vemos, $\text{conv}(A)$ es denso en B y por tanto se tiene que

$$B \subset \overline{\text{conv}}(A) \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{\text{conv}}(A)$$

También, por como hemos definido A se comprueba fácilmente que $A \subset B$ y por tanto, al ser B convexo se tiene que $\overline{\text{conv}}(A) \subset \overline{B}$. Estas dos últimas observaciones nos indican que

$$\overline{\text{conv}}(A) = \overline{B} = \left(1 + \frac{r}{6}\right) B_X$$

Así, basta definir $|||\cdot||| = 6/(6 + r) \|\cdot\|$ para obtener el resultado. $\square$

Capítulo 3

Extensión del teorema de Rademacher

En el capítulo anterior probamos que toda función Lipschitz definida en un intervalo y con valores en un espacio de Banach dentable es diferenciable en casi todo punto (Teorema 2.1.1, (3)). En la sección presente extenderemos este resultado a funciones Lipschitz definidas primero en el *cubo de Hilbert*, $[0,1]^{\mathbb{N}}$, y luego en un espacio de Banach separable arbitrario. En este contexto conviene recordar el clásico resultado de Rademacher que afirma que *toda función Lipschitz definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}$ es diferenciable en casi todo punto.*

Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{L}^n$ a la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. También, denotaremos por λ_n a la medida usual de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Notar que con la notación seguida en la sección anterior, $\lambda_1 = \lambda$.

Lema 3.0.1. *Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $N \in \mathcal{L}^n$ tal que existe $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, con $\|h\|_{\ell^2} = 1$, tal que $\lambda_1(\{s \in \mathbb{R} : x + sh \in N\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\lambda_n(N) = 0$.*

Demostración. Por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt obtenemos unos vectores $w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$ tales que el conjunto $\{h, w_2, \ldots, w_n\}$ es base ortogonal de $\mathbb{R}^n$. Llamamos $w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{in})$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$ y definimos la matriz

$$A := \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_n \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \ldots & w_{nn} \end{pmatrix}$$

Esta matriz define una isometría lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ que denotamos de igual forma por A. Es claro que $A(h) = (1, 0, \ldots, 0)$. Así, para todo $v = (v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_1(\{s \in \mathbb{R} : (s, v) \in A(N)\}) &= \lambda_1(\{s \in \mathbb{R} : (0, v) + sA(h) \in A(N)\}) = \\ &= \lambda_1(\{s \in \mathbb{R} : A^{-1}(0, v) + sh \in N\}) = 0 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por hipótesis. Se tiene entonces por el teorema de Fubini que

$$\lambda_n(A(N)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lambda_1(\{s \in \mathbb{R} : (s, v) \in A(N)\}) d\lambda_{n-1}(v) = 0$$

y así, por el teorema del cambio de variable se concluye que $\lambda_n(N) = |\det(A^{-1})| \lambda_n(A(N)) = 0$. □

Definición 3.0.1. Dado un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, decimos que un subconjunto $M \subset X$ es *poroso* si existe $\Delta \in (0,1)$ tal que para cualesquiera $x \in M$ y $r > 0$ existe $\hat{x} \in X$ tal que $\|\hat{x} - x\| \leq r$ y $B(\hat{x}, \Delta \|\hat{x} - x\|) \cap M = \emptyset$. El conjunto M se dice *σ-poroso* si puede ser expresado como unión numerable de conjuntos porosos.

Es fácil comprobar que los conjuntos porosos son densos en ninguna parte. Esto implica a su vez que los conjuntos σ-porosos son de primera categoría de Baire.

Proposición 3.0.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $M \in \mathcal{L}^n$ conjunto poroso. Entonces $\lambda_n(M) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $\lambda_n(M) > 0$. Entonces, por el teorema de densidad de Lebesgue[1], existe $x \in M$ tal que

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\lambda_n(M \cap B(x,r))}{\lambda_n(B(x,r))} = 1 \tag{3.1}$$

Así, llamando Δ a la constante de porosidad de M, existe $r > 0$ tal que

$$\lambda_n(M \cap B(x,s)) > \big(1 - \frac{\Delta^n}{2^n}\big)\lambda_n(B(x,s))$$

para todo $s \in (0,r)$. Tomamos $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\hat{x} - x\| < \frac{r}{2}$ y $B(\hat{x}, \Delta\|\hat{x} - x\|) \cap M = \emptyset$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\big(1 - \frac{\Delta^n}{2^n}\big)\lambda_n(B(x, 2\|\hat{x} - x\|)) &< \lambda_n(M \cap B(x, 2\|\hat{x} - x\|)) \leq \\ &\leq \lambda_n(B(x, 2\|\hat{x} - x\|) \setminus B(\hat{x}, \Delta\|\hat{x} - x\|)) = \\ &= \big(1 - \frac{\Delta^n}{2^n}\big)\lambda_n(B(x, 2\|\hat{x} - x\|))\end{aligned}$$

lo que es contradictorio. Por tanto, $\lambda_n(M) = 0$. □

Dados dos espacios de Banach, X e Y, y una función g definida en un subconjunto abierto $U \subset X$ con valores en Y, definimos la *derivada direccional* de g en $x \in U$ en la dirección $h \in X$ como

$$Dg(x)(h) := \lim_{s\to 0} \frac{g(x + sh) - g(x)}{s}$$

siempre que este último límite existe en la topología dada por la norma en Y.

Proposición 3.0.2. *Sean U subconjunto abierto no vacío de un espacio de Banach separable X, Y espacio de Banach, $g : U \to Y$ función Lipschitz y $h_1, h_2 \in X \setminus \{0\}$. Entonces el conjunto M de todos los puntos $x \in U$ tales que las derivadas direccionales $Dg(x)(h_1)$, $Dg(x)(h_2)$ y $Dg(x)(h_1+h_2)$ existen y $Dg(x)(h_1 + h_2) \neq Dg(x)(h_1) + Dg(x)(h_2)$ es σ-poroso.*

Demostración. Llamamos $L > 0$ a una constante de Lipschitz de g. Al ser X separable y $U \subset X$ subconjunto abierto, U es también separable. Por esto último y el hecho de que g es Lipschitz se deduce que $g(U)$ es separable, y por tanto $\operatorname{span}(g(U))$ también. Tomamos $Z \subset Y$ subconjunto numerable denso en $\operatorname{span}(g(U))$. Para cualesquiera $m, j \in \mathbb{N}$ y $z_1, z_2 \in Z$ denotamos por M_{m,j,z_1,z_2} al conjunto de todos los puntos $x \in U$ tales que

$$\left\|\frac{g(x + s(h_1 + h_2)) - g(x)}{s} - z_1 - z_2\right\| > \frac{3}{m} \tag{3.2}$$

y

$$\left\|\frac{g(x + sh_i) - g(x)}{s} - z_i\right\| < \frac{1}{m} \tag{3.3}$$

para todo $i \in \{1,2\}$, para todo $s \in (0, \frac{1}{j}]$. Vamos a comprobar que estos conjuntos son porosos. Sea $(m, j, z_1, z_2) \in \mathbb{N}^2 \times Z^2$. Tomamos $\Delta = \frac{1}{2Lm\|h_1\|}$. Tomando una constante de Lipschitz suficientemente grande podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\Delta \in (0,1)$. Ahora, dados $x \in M_{m,j,z_1,z_2}$ y $r > 0$, tomamos $s = \min(\{\frac{1}{j}, \frac{r}{\|h_1\|}\})$. Definimos el punto $\hat{x} = x + sh_1$. Es claro que $\|\hat{x} - x\| \leq r$ y $\Delta\|\hat{x} - x\| = \frac{s}{2Lm}$. Así, para obtener la porosidad de M_{m,j,z_1,z_2} bastaría con

[1] Este resultado afirma que si $M \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible Lebesgue, entonces para casi todo punto $x \in M$ el límite expuesto en (3.1) es igual a 1.

comprobar que $B(x+sh_1, \frac{s}{2Lm}) \cap M_{m,j,z_1,z_2} = \emptyset$. Para probar esto último observamos que para todo $w \in X$ tal que $\|w\| \leq \frac{s}{2Lm}$ se tiene que $x+sh_1+w$ no cumple (3.3), ya que:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{g((x+sh_1+w)+sh_2)-g(x+sh_1+w)}{s} - z_2 \right\| \geq \\
\geq &\left\| \frac{g(x+s(h_1+h_2))-g(x+sh_1)}{s} - z_2 \right\| - 2L\frac{\|w\|}{s} = \\
= &\left\| \left(\frac{g(x+s(h_1+h_2))-g(x)}{s} - z_1 - z_2 \right) - \left(\frac{g(x+sh_1)-g(x)}{s} - z_1 \right) \right\| - 2L\frac{\|w\|}{s} > \\
> &\frac{3}{m} - \frac{1}{m} - 2L\frac{\|w\|}{s} \geq \frac{2}{m} - 2L\frac{1}{2Lm} = \frac{1}{m}
\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad se ha hecho uso de la desigualdad triangular inversa y del hecho de que g es L-Lipschitz. Así, como vemos, M_{m,j,z_1,z_2} es poroso. Para finalizar la demostración falta comprobar que $M \subset \bigcup\{M_{m,j,z_1,z_2} : (m,j,z_1,z_2) \in \mathbb{N}^2 \times Z^2\}$. Sea $x \in M$. Por definición de M se tiene que $Dg(x)(h_1+h_2) \neq Dg(x)(h_1) + Dg(x)(h_2)$ por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|Dg(x)(h_1+h_2) - Dg(x)(h_1) - Dg(x)(h_2)\| > \frac{5}{m}$. Por la definición de derivada direccional y la densidad de Z en $\mathrm{span}(g(U))$ es fácil comprobar que existen $z_1, z_2 \in Z$ tales que $\|Dg(x)(h_i) - z_i\| < < \frac{1}{m}$ para todo $i \in \{1,2\}$. Se tiene entonces también que $\|Dg(x)(h_1+h_2) - z_1 - z_2\| > \frac{3}{m}$. Por tanto, de nuevo por la definición de derivada direccional existe $j \in \mathbb{N}$ tal que se cumple (3.2) y (3.3) para todo $s \in (0, \frac{1}{j}]$. Esto nos indica que $x \in M_{m,j,z_1,z_2}$. Así, como vemos, se da el contenido deseado y se concluye el resultado. $\square$

Para estudiar la diferenciabilidad Gâteaux de las funciones Lipschitz con dominio infinito-dimensional necesitamos algunas herramientas de teoría de la medida e integración en el cubo de Hilbert. Dado $n \in \mathbb{N}$, a partir de ahora $\mathcal{L}^n$ pasa a denotar la σ-álgebra de los subconjuntos medibles Lebesgue de $[0,1]^n$. Consideraremos el cubo de Hilbert, $[0,1]^{\mathbb{N}}$, equipado con la topología producto, lo que constituye un espacio topológico compacto. Denotamos por $\mathcal{C}$ a la familia de todos los conjuntos de la forma $E \times [0,1]^{\mathbb{N}}$, con $E \in \mathcal{L}^n$ y $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $[0,1]^{\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$, $[0,1]^{\mathbb{N}} \setminus C \in \mathcal{C}$, para todo $C \in \mathcal{C}$, y $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$, para cualesquiera $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Esto muestra que $\mathcal{C}$ consituye una álgebra en los subconjuntos de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Definimos la aplicación $\nu : \mathcal{C} \to [0,1]$ como $\nu(C) = \lambda_n(E)$ para todo $C = E \times [0,1]^{\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$, con $E \in \mathcal{L}^n$. Es consecuencia inmediata del teorema de Fubini el que ν está bien definida. Claramente, $\nu(\emptyset) = 0$, $\nu([0,1]^{\mathbb{N}}) = 1$ y $\nu(C_1 \cup C_2) = \nu(C_1) + \nu(C_2)$ para cualesquiera $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ disjuntos. Consideramos Σ la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$. Por la propia definición de la topología producto en $[0,1]^{\mathbb{N}}$ se tiene que todo abierto de dicha topología se puede expresar como unión numerable de elementos de $\mathcal{C}$. Por tanto, Σ contiene a todos los subconjuntos abiertos, y consecuentemente también a todos los subconjuntos de Borel de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Vamos a comprobar que ν es regular. Con este fin, sean $\varepsilon > 0$ y $C \in \mathcal{C}$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que existe $E \in \mathcal{L}^n$ tal que $C = E \times [0,1]^{\mathbb{N}}$. Es un resultado conocido de teoría de la medida el que λ_n es regular. Por tanto, existe $F \subset E$ subconjunto cerrado tal que $\lambda_n(E \setminus F) < \varepsilon$. Así, $F \times [0,1]^{\mathbb{N}}$ es un subconjunto cerrado de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ el cual cumple que:

$$\nu(E \times [0,1]^{\mathbb{N}} \setminus (F \times [0,1]^{\mathbb{N}})) = \nu((E \setminus F) \times [0,1]^{\mathbb{N}}) = \lambda_n(E \setminus F) < \varepsilon$$

Una vez sabido que ν es regular, un teorema debido a A.D. Alexandrov[2] indica que ν es σ-aditiva en el álgebra $\mathcal{C}$. Por el teorema de extensión de Hahn, existe una única medida $\mu : \Sigma \to [0,1]$ tal que $\mu(C) = \nu(C)$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Recordamos que una función $f : [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ se dice *μ-medible* si existe $S \in \Sigma$ tal que $\mu(S) = 1$ y $f^{-1}([a,\infty)) \cap S \in \Sigma$ para todo $a \in \mathbb{R}$. En el espacio de medida $([0,1]^{\mathbb{N}}, \Sigma, \mu)$ podemos considerar la integral de Lebesgue la cual denotaremos como es habitual por $\int f(t)d\mu(t)$, o más escuetamente como $\int f d\mu$. En particular, la integral $\int f d\mu$ tiene sentido y es finita si $f : [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ es μ-medible y acotada.

[2] El teorema en cuestión afirma que si ν es una función con valores complejos, regular, acotada y aditiva, definida en un álgebra de los subconjuntos de un espacio topológico compacto S, entonces ν es σ-aditiva. Para su demostración, ver Teorema III.5.13 de [2].

Para cualesquiera $S \in \Sigma$, $t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ y $n \in \mathbb{N}$ llamamos $S_{n,t} = \{x \in [0,1]^n : (x,t) \in S\}$. Podemos presentar ya el siguiente resultado el cual juega un papel similar al teorema de Fubini en nuestro contexto:

Proposición 3.0.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $S \in \Sigma$. Entonces:*

1. *Existe $N \in \Sigma$, con $\mu(N) = 0$, tal que $S_{n,t} \in \mathcal{L}^n$ para todo $t \in [0,1]^{\mathbb{N}} \setminus N$.*
2. *La función $[0,1]^{\mathbb{N}} \ni t \mapsto \lambda_n(S_{n,t})$ es μ-medible.*
3. *$\mu(S) = \int \lambda_n(S_{n,t}) d\mu(t)$*

Demostración. Llamamos $\mathcal{A}$ al conjunto de todos los $S \in \Sigma$ tales que cumplen (1), (2) y (3). Vamos a comprobar que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ y que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en los subconjuntos de $[0,1]^{\mathbb{N}}$, de donde se concluirá por la definición de Σ que $\mathcal{A} = \Sigma$, resultado deseado. Mostramos primero que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Sea $C \in \mathcal{C}$. Es claro que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que existe $E \in \mathcal{L}^{n+k}$ tal que $C = E \times [0,1]^{\mathbb{N}}$. Por el teorema de Fubini aplicado al producto $([0,1]^n, \mathcal{L}^n, \lambda_n) \times ([0,1]^k, \mathcal{L}^k, \lambda_k)$ sabemos que el conjunto $E^{(t_1,\ldots,t_k)} := \{x \in [0,1]^n : (x, t_1, \ldots, t_k) \in E\} \in \mathcal{L}^n$ para λ_k-casi todo punto $(t_1, \ldots, t_k) \in$ $\in [0,1]^k$, que la función $[0,1]^k \ni (t_1, \ldots, t_k) \mapsto \lambda_n(E^{(t_1,\ldots,t_k)})$ es $\mathcal{L}^k$-medible y que $\lambda_{n+k}(E) =$ $= \int \lambda_n(E^{(t_1,\ldots,t_k)}) d\lambda_k(t_1, \ldots, t_k)$. Llamamos $M = \{(t_1, \ldots, t_k) \in [0,1]^k : E^{(t_1,\ldots,t_k)} \notin \mathcal{L}^n\}$. Como hemos dicho antes, $\lambda_k(M) = 0$. Así, definiendo $N = M \times [0,1]^{\mathbb{N}}$ se tiene que $N \in \Sigma$ y $\mu(N) = 0$. Por tanto, $C_{n,t} = E^{(t_1,\ldots,t_k)} \in \mathcal{L}^n$ para todo $t = (t_1, t_2, \ldots) \in [0,1]^{\mathbb{N}} \setminus N$, por lo que C cumple (1). Además, para todo $a \geq 0$, $\{t \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \lambda_n(C_{n,t}) \geq a\} = \{(t_1, \ldots, t_k) \in [0,1]^k : \lambda_n(E^{(t_1,\ldots,t_k)}) \geq$ $\geq a\} \times [0,1]^{\mathbb{N}} \in \mathcal{C} \subset \Sigma$, por lo que también se tiene (2). Finalmente,

$$\mu(C) = \lambda_{n+k}(E) = \int \lambda_n(E^{(t_1,\ldots,t_k)}) d\lambda_k(t_1, \ldots, t_k) =$$
$$= \int \lambda_n(E^{(t_1,\ldots,t_k)}) d\mu(t_1, t_2, \ldots) = \int \lambda_n(C_{n,t}) d\mu(t)$$

Notar que se ha usado la igualdad

$$\int \varphi(t_1, \ldots, t_k) d\lambda_k(t_1, \ldots, t_k) = \int \varphi(t_1, \ldots, t_k) d\mu(t_1, t_2, \ldots)$$

válida para todas las funciones $\varphi : [0,1]^k \to [0,1]$ $\mathcal{L}^k$-medibles. De esta forma, C cumple (1), (2) y (3) por lo que $C \in \mathcal{A}$ y se tiene el contenido $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Comprobamos ahora que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra. Dado $S \in \mathcal{A}$, teniendo en cuenta que $([0,1]^{\mathbb{N}} \setminus S)_{n,t} = [0,1]^n \setminus S_{n,t}$ para todo $t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, es fácil comprobar que $[0,1]^{\mathbb{N}} \setminus S$ cumple (1), (2) y (3), por lo que $[0,1]^{\mathbb{N}} \setminus S \in \mathcal{A}$. Ahora, dada una secuencia infinita $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ de elementos de $\mathcal{A}$ comprobaremos que $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \in \mathcal{A}$. Para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $N_i \in \Sigma$, con $\mu(N_i) = 0$, tal que $(S_i)_{n,t} \in \mathcal{L}^n$ para todo $t \in [0,1]^{\mathbb{N}} \setminus N_i$. Así, como es fácil comprobar que $S_{n,t} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (S_i)_{n,t}$ para todo $t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, se sigue que S cumple (1) para $N = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i$. (2) se sigue de la igualdad $\lambda_n(S_{n,t}) = \lim_{i \to \infty} \lambda_n((S_i)_{n,t})$, para todo $t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, la cual se da al tenerse que $(S_1)_{n,t} \subset (S_2)_{n,t} \subset \ldots$. También, como cuando $i \to \infty$, $\lambda_n(S_i) \uparrow \lambda_n(S)$ y $\lambda_n((S_i)_{n,t}) \uparrow \lambda_n(S_{n,t})$ para todo $t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, se da (3) como consecuencia inmediata del teorema de la convergencia monótona. Así, como vemos, $S \in \mathcal{A}$, lo que nos hace concluir que A es σ-álgebra y con ello la demostración. □

Denotaremos por H al conjunto de los puntos $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tales que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h_i = 0$ para todo $i \geq n$.

Lema 3.0.2. *Sea Y un espacio de Banach con la RNP y $f : [-1,2]^{\mathbb{N}} \to Y$ función tal que*

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} |t_i - s_i|$$

para todo $t, s \in [-1,2]^{\mathbb{N}}$. Entonces existe un conjunto de Borel $\Omega \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ tal que $\mu([0,1]^{\mathbb{N}} \setminus \Omega) = 0$ y para todo $t \in \Omega$ la aplicación $H \ni h \mapsto Df(t)(h) \in Y$ está bien definida y es aditiva.

Demostración. Para cada $h \in H$ denotamos por M_h al conjunto de los $t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ tales que $Df(t)(h)$ existe. Fijamos por un momento $h \in H \setminus \{0\}$. Para cualesquiera $r, s \in (-1/\|h\|_\infty, 1/\|h\|_\infty) \setminus \{0\}$ e $i \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$A_{i,r,s} = \left\{ t \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \left\| \frac{1}{r}(f(t+rh) - f(t)) - \frac{1}{s}(f(t+sh) - f(t)) \right\| < \frac{1}{i} \right\}$$

el cual es un conjunto de Borel en $[0,1]^{\mathbb{N}}$ al ser f 1-Lipschitz (y por tanto continua) vista como función definida en el espacio $[-1,2]^{\mathbb{N}}$ dotado de la métrica d, definida como:

$$d(t,s) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} |t_i - s_i|$$

para cualesquiera $t, s \in [-1,2]^{\mathbb{N}}$. Teniendo en cuenta que Y es espacio de Banach es fácil comprobar que

$$M_h = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcap \left\{ A_{i,r,s} : r, s \in \mathbb{Q};\ rs > 0;\ |r|, |s| < \frac{1}{j\,\|h\|_\infty} \right\}$$

Esto último indica que M_h es también un conjunto de Borel, por lo que $M_h \in \Sigma$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $h_i = 0$ para todo $i \geq n+1$ y llamamos $k = (h_1, \dots, h_n)$. Fijamos por un momento $t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ y definimos $g : [-1,2]^n \to Y$ como $g(x) = f(x,t)$ para todo $x \in [-1,2]^n$. Fijamos por un momento $x \in [0,1]^n$ y definimos $J = \{s \in \mathbb{R} : x + sk \in [0,2]^n\}$, el cual es un intervalo no vacío. Definimos $\varphi : J \to Y$ como $\varphi(s) = g(x+sk)$ para todo $s \in J$. Es fácil comprobar que φ es Lipschitz. Observamos que, dado $s \in J$, la derivada $\varphi'(s)$ existe si y sólo si la derivada direccional $Dg(x+sk)(k)$, si y sólo si $Df(x+sk,t)(h)$ existe, si y sólo si $(x+sk,t) \in M_h$, si y sólo si $x + sk \in (M_h)_{n,t}$. Ahora, el Teorema 2.1.1 nos garantiza que $\lambda_1(\{s \in J : \varphi'(s) \text{ no existe}\}) = 0$. Por tanto, $\lambda_1(\{s \in J : x + sk \in [0,1]^n \setminus (M_h)_{n,t}\}) = 0$. Esto se tiene para todo $x \in [0,1]^n$. Por el Lema 3.0.1 se tiene que $\lambda_n([0,1]^n \setminus (M_h)_{n,t}) = 0$ o lo que es lo mismo, $\lambda_n(([0,1]^{\mathbb{N}} \setminus M_h)_{n,t}) = 0$. Esto último se tiene para todo $t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ por lo que por la Proposición 3.0.3 se tiene que $\mu([0,1]^{\mathbb{N}} \setminus M_h) = 0$. Llamamos $M = \bigcap_{h \in H} M_h$, el cual es un conjunto de Borel que cumple además que

$$\mu([0,1]^{\mathbb{N}} \setminus M) = \mu(\bigcup_{h \in H} [0,1]^{\mathbb{N}} \setminus M_h) = 0$$

Para un $h \in H$ fijo se tiene que $Df(t)(h) = \lim\limits_{m \to \infty} m(f(t+\frac{1}{m}h) - f(t))$ para todo $t \in M$ y por tanto, la aplicación $M \ni t \mapsto Df(t)(h) \in Y$ es de Borel. Consecuentemente, para cualesquiera $h, k \in H$ se tiene que el conjunto $\Omega_{h,k} = \{t \in M : Df(t)(h) + Df(t)(k) = Df(t)(h+k)\}$ es un conjunto de Borel al ser la contraimagen de $\{0\}$ por una aplicación de Borel (notar que $h + k \in H$). Dados $h, k \in H$ fijos, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $h_i = k_i = 0$ para todo $i \geq n+1$ y llamamos $u = (h_1, \dots, h_n)$ y $v = (k_1, \dots, k_n)$. Dado $t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, definimos $g : [-1,2]^n \to Y$ como $g(x) = f(x,t)$ para todo $x \in [-1,2]^n$, la cual es una función Lipschitz. Se tiene que $x \in (M \setminus \Omega_{h,k})_{n,t}$ si y sólo si $Df(x,t)(h)$, $Df(x,t)(k)$ y $Df(x,t)(h+k)$ existen y $Df(x,t)(h) + Df(x,t)(k) \neq Df(x,t)(h+k)$, si y sólo si $Dg(x)(u)$, $Dg(x)(v)$ y $Dg(x)(u+v)$ existen y $Dg(x)(u) + Dg(x)(v) \neq Dg(x)(u+v)$. Entonces, por la Proposición 3.0.2, $(M \setminus \Omega_{h,k})_{n,t}$ es un conjunto σ-poroso en $\mathbb{R}^n$. Así, por la Proposición 3.0.1, $\lambda_n((M \setminus \Omega_{h,k})_{n,t}) = 0$. De esto último se deduce que $(M \setminus \Omega_{h,k})_{n,t}$ es un conjunto de Borel y por tanto pertenece a $\mathcal{L}^n$. Podemos hacer uso entonces de la Proposición 3.0.3 obteniendo que $\mu(M \setminus \Omega_{h,k}) = 0$, para cualesquiera $h, k \in H$. Definimos $\Omega = \bigcap_{h,k \in H} \Omega_{h,k}$, el cual es también un conjunto de Borel. Es claro que $\mu(M \setminus \Omega) = 0$ y por tanto, $\mu([0,1]^{\mathbb{N}} \setminus \Omega) = \mu([0,1]^{\mathbb{N}} \setminus M) + \mu(M \setminus \Omega) = 0 + 0 = 0$. Así, hemos demostrado que la aplicación $H \ni h \mapsto Df(t)(h) \in Y$ está bien definida y es aditiva para todo $t \in \Omega$. □

Teorema 3.0.1. *Sean U subconjunto abierto no vacío de un espacio de Banach separable X, Y espacio de Banach con la RNP y $F : U \to Y$ una función Lipschitz. Entonces, F es diferenciable Gâteaux en un conjunto denso en U.*

Demostración. Es claro que es suficiente con comprobar que existe un punto de U tal que F es diferenciable Gâteaux en dicho punto. También, haciendo uso de una traslación y homotecia si es necesario, podemos asumir que $2B_X \subset U$. Por ser X separable, existen $e_1, e_2, \ldots \in B_X$ tales que $\overline{\{e_1, e_2, \ldots\}} = B_X$. Definimos la aplicación $\varphi : \ell_\infty \to X$ como $\varphi(t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} t_i e_i$ para todo $t = (t_1, t_2, \ldots) \in \ell_\infty$. Es claro que φ está bien definida, es lineal y $\|\varphi\| \leq 1$. Definimos $f : [-1,2]^{\mathbb{N}} \to Y$ como $f(t) = F(\varphi(t))$ para todo $t \in [-1,2]^{\mathbb{N}}$ (notar que $\varphi([-1,2]^{\mathbb{N}}) \subset 2B_X \subset U$). Llamando L a una constante de Lipschitz de F se tiene que

$$\|f(t) - f(s)\| \leq L \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} |t_i - s_i|$$

para cualesquiera $t, s \in [-1,2]^{\mathbb{N}}$. Así, es claro que podemos aplicar el Lema 3.0.2 para f. Llamamos Ω al conjunto no vacío que nos proporciona este lema. Tomamos $t \in \Omega$ y llamamos $x = \varphi(t)$. Como $\|\varphi\| \leq 1$, al ser $\Omega \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$, se tiene que $\|x\| \leq 1$ y por tanto $x \in U$. Vamos a comprobar que F es diferenciable Gâteaux en x. En efecto, se observa inmediatamente que se tiene la igualdad $DF(x)(\varphi(h)) = Df(t)(h)$ para todo $h \in H$ (tener en cuenta que como $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset \mathrm{Im}(\varphi)$, se tiene que $\overline{\mathrm{Im}(\varphi)} = X$). Además

$$\begin{aligned} DF(x)(\varphi(h) + \varphi(k)) &= DF(x)(\varphi(h+k)) = Df(t)(h+k) = \\ &= Df(t)(h) + Df(t)(k) = DF(x)(\varphi(h)) + DF(x)(\varphi(k)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

para cualesquiera $h, k \in H$. Ahora, teniendo en cuenta que $\varphi(H)$ es denso en X y que F es Lipschitz, se obtiene que para todo $u \in X$ la derivada direccional $DF(x)(u)$ existe ya que puede ser obtenida como

$$DF(x)(u) = \lim_{n\to\infty} DF(x)(\varphi(h_n))$$

donde $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ es cualquier sucesión tal que $\|\varphi(h_n) - u\| \to 0$. Además, haciendo uso de (3.4) concluimos que $DF(x)(u+v) = DF(x)(u) + DF(x)(v)$ para cualesquiera $u, v \in X$. Así, $DF(x)$ es un operador lineal de X a Y que de hecho constituye la derivada de Gâteaux de F en el punto x. $\square$

Apéndice A

Resultados auxiliares

Teorema A.1. (***Principio variacional de Ekeland.*** Teorema 7.39 de [1].) *Sea X espacio de Banach y $\varphi : X \to (0, \infty]$ una función propia y semicontinua inferiormente. Entonces, dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe $\hat{x} \in X$ tal que $\varphi(\hat{x}) < \varphi(x) + \varepsilon \|x - \hat{x}\|$ para todo $x \in X \setminus \{\hat{x}\}$. Además, si $x_0 \in X$ es tal que $\varphi(x_0) < \text{ínf}(\varphi(X)) + \delta$ entonces $\hat{x}$ puede ser escogido de tal forma que $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta/\varepsilon$.*

Proposición A.1. (Proposición 2.13 de [1].) *Sea X un espacio normado real. Se tiene:*

1. *Si C es un subconjunto abierto convexo de X y $x_0 \notin C$, entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$.*

2. *Si A y B son subconjuntos convexos de X disjuntos y A es abierto, entonces, existe $f \in X^*$ tal que $f(a) < \text{ínf}(f(B))$ para todo $a \in A$.*

Proposición A.2. (Corolario 7.35 de [1].) *Sea X espacio de Banach, $f : X \to (-\infty, \infty]$ función propia, $x \in X$, $x^* \in X^*$ y $\varepsilon \geq 0$. Se tiene:*

1. *Si $x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$, entonces $x \in \partial_\varepsilon f^*(x^*)$.*

2. *Si f es convexa y semicontinua inferiormente y $x \in \partial_\varepsilon f^*(x^*)$, entonces, $x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$.*

Proposición A.3. (Corolario 7.33 de [1].) *Sea X espacio de Banach. Entonces, toda función $g : X^* \to (-\infty, \infty]$ convexa y débil*-semicontinua inferiormente es la conjugada de Fenchel de $g^*|_X$.*

Proposición A.4. (Corolario 7.37 de [1].) *Sea X espacio de Banach y $f : X \to (-\infty, \infty]$ función propia. Entonces, si f^* es diferenciable Fréchet en un punto $x_0^* \in X^*$, $\partial f^*(x_0^*) \subset X$.*

Lema A.1. (Corolario 7.21 de [1].) *Sea X espacio de Banach y M subconjunto acotado de X. Entonces, la función $f : X^* \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x^*) = \sup(\{x^*(x) : x \in M\})$, para todo $x^* \in X^*$, es diferenciable Fréchet en $x_0^* \in X^*$ si y sólo si x_0^* expone fuertemente a M.*

Proposición A.5. (Proposición 7.31 de [1].) *Sea X espacio de Banach y $f : X \to (-\infty, \infty]$ función propia tal que f^* es también propia. Entonces,* $\text{epi}(f^{**}) = \overline{\text{conv}}^{w^*}(\text{epi}(f))$.

Proposición A.6. (Proposición 7.30 de [1].) *Sea X espacio de Banach y $f, g : X \to (-\infty, \infty]$ funciones propias. Entonces, dados $x \in X$ y $x^* \in X^*$, se tiene:*

1. *$f(x) + f^*(x^*) \geq x^*(x)$.*

2. *Si f^* es propia, entonces $f^{**}|_X \leq f$.*

3. *Si $f \leq g$, entonces $f^* \geq g^*$.*

Proposición A.7. (Proposición 7.34 de [1].) *Sea X espacio de Banach y $f : X \to (-\infty, \infty]$ función propia. Dados $x \in X$, $x^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$, se tiene:*

1. $x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$ *si y sólo si* $f(x) + f^*(x^*) \leq x^*(x) + \varepsilon$.

2. $x^* \in \partial f(x)$ *si y sólo si* $f(x) + f^*(x^*) = x^*(x)$.

Teorema A.2. (***Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński.*** Teorema 13.22 de [1].) *Sea* X *espacio de Banach tal que existe un subconjunto débil-compacto,* $K \subset X$*, tal que* $X = \overline{\mathrm{span}}(K)$*. Entonces, existe un espacio reflexivo* Y *y un operador lineal continuo e inyectivo,* $T : Y \to X$*, tal que* $K \subset T(B_Y)$.

Bibliografía

[1] FABIAN, M., HABALA, P., HÁJEK, P., MONTESINOS, V. and ZIZLER, V. *Banach Space Theory. The Basis for Linear and Nonlinear Analysis.* Springer, 2011.

[2] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.T. *Linear Operators, Part I: General Theory.* Interscience, New York, 1958.

[3] HUFF, R.E. and MORRIS, P.D. *Geometric characterizations of the Radon-Nikodým property in Banach spaces.* Studia Mathematica, T. LVI, 1976.

[4] COHN, D.L. *Measure Theory. Second Edition.* Birkhäuser, 2013.

[5] DIESTEL, J. and UHL, J.J. *Vector Measures.* American Mathematical Society. Mathematical Surveys and Monographs 15, Providence, 1977.

[6] PHELPHS, R.R. *Dentability and extreme points in Banach spaces.* Journal of Functional Analysis 16, 1974, pp. 78-90.

[7] LAHRECH, S., OUAHAB, A., BENBRIK, A., MBARKI, A. and HADI, I.E. *On the completeness, separability and density theorems for generalized Lebesgue-Bochner space* $L^p(E, (X_\vartheta, \|\cdot\|))$. International Journal of Differential Equations and Applications 10, no. 2, 2005, pp. 147-164.