

Teorías de homotopía en categorías de modelos

Trabajo final de máster

Autor: Daniel Miguel Treviño

Director: Enrique Arrondo Esteban

30 - Junio - 2020

Para Dami, Lourdes, Marisol, Fátima y Pilar.

AGRADECIMIENTOS

Muchas gracias a mis profesores del Máster por haberme enseñado durante el curso, y a mis compañeros de clase por haberme ayudado a aprender. Gracias a mi familia y amigos por apoyarme y escucharme.

Contenidos

1	Preliminares	2
1.1	Preliminares de teoría de categorías	2
1.2	Preliminares de topología	7
1.3	Preliminares de álgebra homológica	11
2	Categorías de modelos. Homotopía	15
2.1	Definición	15
2.2	Ejemplos fundamentales	16
2.3	Homotopía en categorías de modelos	17
2.3.1	Homotopía a izquierda	17
2.3.2	Homotopía a derecha	18
2.3.3	Propiedades de las relaciones de homotopía	18
2.3.4	Relación entre las homotopías a derecha y a izquierda	22
2.4	Categoría de homotopía	23
2.5	Observaciones	27
2.5.1	Sobredeterminación de los axiomas de las categorías de modelos	27
2.5.2	El argumento del objeto pequeño.	28
2.5.3	Categorías de modelos cofibrantemente generadas	30
2.5.4	Localización	32
2.5.5	Equivalencias de categorías de modelos. Adjunciones de Quillen	33
3	Top como categoría de modelos	34
3.1	Enunciado	34
3.2	Previo a la prueba	35
3.3	Demostración	38
3.4	Relación con la teoría de homotopía habitual	39
4	Ch_R como categoría de modelos	41
4.1	Enunciado	41
4.2	Previo a la prueba	42
4.3	Demostración	43
4.4	Relación con el álgebra homológica habitual	46
	References	49

Introducción

Las categorías de modelos fueron introducidas en [Qui06] en busca de una generalización de la teoría de homotopía en complejos simpliciales, ya conocida entonces. Tal y como explica el autor, primero Kan había deducido en [Kan58] una relación entre la homotopía en la categoría de complejos simpliciales y otra relacionada con la categoría derivada de una categoría aditiva. Después dichas relaciones habían resultado provechosas en [Dol58]. Por lo tanto, el objetivo del autor fue generalizar dicha noción.

De hecho, no nos hace falta ir a la motivación inicial del autor para saber que las construcciones de homotopía son provechosas en matemáticas. Tenemos por un lado toda la teoría de homotopía usual en espacios topológicos, con las construcciones de los grupos de homotopía y resultados consecuentes de gran valor. Por otro lado, también conocemos la relación de homotopía de cadenas desarrollada en el álgebra homológica. Así que, a la vista de lo dicho hasta ahora, parece que merece la pena buscar algo así.

Para ello, la herramienta fundamental que introduce Quillen son las categorías de modelos. La idea fundamental consiste en designar una serie de morfismos que no son isomorfismos, pero que nos gustaría que lo fuesen. A esta clase la llamaremos "equivalencias débiles" (con esta denominación, ya podemos imaginar que las equivalencias homotópicas, o los cuasiisomorfismos, van a ser firmes candidatos). A continuación definiremos otras dos clases, las "cofibraciones" y las "fibraciones", que nos ayudarán a generalizar los objetos cilíndricos y de caminos que tenemos en la topología habitual. Y con estas tres clases de aplicaciones y cinco axiomas a satisfacer, podremos construir una teoría de homotopía.

El resultado es bastante satisfactorio. Si bien nosotros pondremos el foco en la aplicación de esta teoría en los espacios topológicos y en los complejos de cadenas positivamente graduados, en la literatura encontramos otros ejemplos más interesantes. Tiene importancia la estructura en la categoría de conjuntos simpliciales, que enunciaremos pero no demostraremos. También hay otros como los complejos de cadenas de comódulos sobre un álgebra de Hopf (ver [Hov07], capítulo 2.5), o incluso podemos definir una estructura de modelos en categorías de esquemas o haces (ver [MV99]). Nosotros, como hemos dicho, no iremos tan lejos, y nos centraremos en la definición y propiedades de las categorías de modelos, así como en las dos categorías anteriormente mencionadas.

El primer capítulo consiste en preliminares. En primer lugar, hemos establecido la notación y terminología sobre teoría de categorías que utilizaremos a lo largo del trabajo. Después hemos hablado sobre la teoría de homotopía habitual y sobre las herramientas que necesitaremos para dar a dicha categoría una estructura de modelos. Entre ellas se encuentran las fibraciones de Serre, los conjuntos simpliciales o los CW-complejos. Por último, hemos hecho lo propio con el álgebra homológica, dando por un lado algunos resultados que utilizaremos en el desarrollo del trabajo e introduciendo por otro la categoría de complejos de cadenas no negativamente graduados a la que le daremos estructura de modelos.

En el segundo capítulo introducimos las categorías de modelos. Damos las definiciones y los dos ejemplos fundamentales con los que lidiaremos el resto del trabajo. Después definiremos la noción de homotopía, a izquierda utilizando los objetos cilíndricos y a derecha utilizando los de caminos. Veremos qué relación podemos establecer y cuando y cómo podemos construir la categoría de homotopía asociada. Finalmente, haremos una serie de observaciones sobre dicha construcción, sobre, por ejemplo, las factorizaciones, la relación entre los axiomas o las adjunciones de Quillen.

En el capítulo tercero, estudiamos la estructura de categoría de modelos en la categoría de espacios topológicos. Estudiamos las designaciones de las equivalencias débiles, cofibraciones y fibraciones para luego dar una demostración de la buena definición de esa estructura. Finalmente, estudiamos la relación entre la categoría de homotopía definida como categoría de modelos y la definida habitualmente por la equivalencia homotópica de morfismos.

Finalmente, el capítulo cuatro consiste en el estudio de la categoría de complejos de cadenas positivamente graduados y su estructura de modelos proyectiva. Siguiendo la misma estructura que en el capítulo anterior, enunciamos la estructura, damos una demostración y estudiamos alguna relación con la homotopía de cadenas.

1 Preliminares

1.1 Preliminares de teoría de categorías

Primeramente, vamos a dar unos pequeños preliminares sobre teoría de categorías. El objetivo de esta sección es introducir algunos conceptos que juegan un papel clave a lo largo del trabajo, además de fijar cierta notación. Para ello, vamos a dar algunas definiciones generales que luego nos llevarán a conceptos más específicos, los cuales utilizaremos a lo largo del trabajo. Principalmente, seguimos el capítulo 2 de [DS95], y consultaremos ocasionalmente los primeros capítulos de [ML13] y [Vak17]. Esta no es una introducción completa y carece de algunas matizaciones. Referimos a [ML13] en caso de que se busque mayor detalle.

Primeras definiciones

Definición 1.1. Una **categoría** \mathbf{C} es una colección de **objetos** junto con una colección de **morfismos** entre pares de ellos, de manera que para cada par de morfismos $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ tenemos una operación interna entre los morfismos, llamada **composición**, que da como resultado un morfismo $g \circ f : A \rightarrow C$. La composición tiene que cumplir

- la **propiedad asociativa**, esto es, que si $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- la existencia **elemento neutro** para cada objeto A de \mathbf{C} , llamado morfismo **identidad** y denotado id_A , tal que si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo, entonces $f \circ id_A = f = id_B \circ f$.

Denotamos la colección de morfismos $f : A \rightarrow B$ por $\text{Hom}(A, B)$.

Para los intereses del trabajo, supondremos que $\text{Hom}(A, B)$ es un conjunto.

Ejemplo 1.2. Las categorías con las que trabajaremos principalmente son la categoría **Top** de espacios topológicos y la categoría \mathbf{Ch}_R de complejos de cadenas de módulos sobre un anillo R . También son categorías la de conjuntos, **Set**, la de grupos, **Grp**, la de anillos con unidad, **Ring** o la de módulos sobre un anillo R , \mathbf{Mod}_R .

Definición 1.3. Si \mathbf{C} es una categoría, la categoría opuesta \mathbf{C}^{op} se compone de los objetos de \mathbf{C} y de un morfismo $f^{\text{op}} : Y \rightarrow X$ para cada morfismo $f : X \rightarrow Y$. La composición viene dada por $f^{\text{op}} \circ g^{\text{op}} = (g \circ f)^{\text{op}}$.

La categoría opuesta nos va a servir para aplicar el llamado **principio de dualidad**. Dada una afirmación A en la categoría \mathbf{C} , podemos considerar la afirmación dual A^{op} , que es la resultante de invertir todos los morfismos. Por definición, la afirmación dual es cierta en \mathbf{C}^{op} . Lo que el principio de dualidad nos dice es que si A es cierta para cualquier categoría \mathbf{C} , entonces la afirmación dual también (ya que A es cierta en \mathbf{C}^{op} y por tanto A^{op} lo es en $(\mathbf{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathbf{C}$).

Definición 1.4. Sea \mathbf{C} y \mathbf{D} dos categorías. La **categoría producto** $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ es la categoría formada por

- pares (A, A') , tales que A es objeto de \mathbf{C} y A' es objeto de \mathbf{D} , como objetos.
- pares (f, g) , tales que f es morfismo de \mathbf{C} y g es morfismo de \mathbf{D} .

La composición también está definida componente a componente.

En ocasiones podemos llevar objetos de una categoría a otra, utilizando los llamados **funtores**. Si \mathbf{C} y \mathbf{D} son dos categorías, un **functor covariante** α de \mathbf{D} en \mathbf{C} asigna a cada objeto A de \mathbf{D} uno $\alpha(A)$ de \mathbf{C} y a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ en \mathbf{D} otro $\alpha(f) : \alpha(A) \rightarrow \alpha(B)$ en \mathbf{C} , de manera que $\alpha(id_A) = id_{\alpha(A)}$ para cualquier A de \mathbf{D} y $\alpha(g \circ f) = \alpha(g) \circ \alpha(f)$. Dualmente, los funtores **contravariantes** son aquellos que invierten los morfismos. Durante el trabajo, y salvo que lo indiquemos explícitamente, los funtores con los que trabajaremos serán covariantes.

Como ejemplo clásico, tenemos el grupo fundamental π_1 , que es un functor entre la categoría de espacios topológicos **Top** y la de grupos **Grp**. Parte del trabajo consistirá en construir una categoría, llamada

categoría de homotopía, y después un funtor de la categoría de modelos con la que estemos trabajando a esta nueva categoría.

También utilizaremos a menudo los funtores $\text{Hom}(A, _)$ y $\text{Hom}(_, A)$, donde A es un objeto de una categoría \mathbf{C} . El primero de ellos se define de \mathbf{C} en \mathbf{Set} , y asocia

- a cada objeto B el conjunto $\text{Hom}(A, B)$.
- a cada morfismo $f : B \rightarrow C$ la aplicación de conjuntos $\text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$ dada por la composición con f .

Es por lo tanto un funtor covariante. Dualmente, el funtor $\text{Hom}(_, A)$ es un funtor contravariante que asocia

- a cada objeto B el conjunto $\text{Hom}(B, A)$.
- a cada morfismo $f : B \rightarrow C$ la aplicación de conjuntos $\text{Hom}(C, A) \rightarrow \text{Hom}(B, A)$ dada por la composición con f .

De hecho, podemos considerar el funtor covariante $\text{Hom}(_, _) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, definido en la categoría producto (los funtores de la categoría producto no son otra cosa que pares de funtores). Este funtor está dado por la asignación $(A, B) \rightsquigarrow \text{Hom}(A, B)$ para los objetos. Consecuentemente, a cada morfismo $(g^{op}, h) : (A, B) \rightarrow (A', B')$ en $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C}$ le asignamos la aplicación de conjuntos

$$\text{Hom}(g^{op}, h) : \text{Hom}(A, A') \rightarrow \text{Hom}(B, B')$$

que a cada $f : A \rightarrow A'$ le asocia la composición

$$B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{h} B'$$

Otro funtor con el que vamos a trabajar es el funtor constante. Para cada objeto A de \mathbf{C} , definimos $\Delta(A) : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ que lleva cada objeto de \mathbf{D} a A y cada morfismo de \mathbf{D} a la identidad en A .

Definición 1.5. Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo. Decimos que f es **monomorfismo** si para cualesquiera morfismos $g, h : A' \rightarrow A$ tales que $fg = fh$ tenemos que $g = h$. Dualmente, se dice que f es **epimorfismo** si para cualesquiera $g, h : B \rightarrow B'$ tales que $gf = gh$ se cumple $g = h$.

Ejemplo 1.6. En las categorías \mathbf{Top} y \mathbf{Ch}_R , así como en \mathbf{Grp} o en \mathbf{Set} , los epimorfismos son los morfismos sobreyectivos y los monomorfismos son las aplicaciones inyectivas. Sin embargo, hay categorías en las que esta equivalencia no se da, como en la categoría de anillos con unidad \mathbf{Ring} .

Definición 1.7. Sea \mathbf{C} una categoría. Una **subcategoría** \mathbf{D} de \mathbf{C} es una categoría tal que todos sus objetos están en \mathbf{C} y tal que $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(A, B) \subseteq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$. El funtor inclusión $\iota : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ pasa de manera identitaria de objetos y morfismos en \mathbf{D} a objetos y morfismos en \mathbf{C} .

Definición 1.8. Un funtor $\alpha : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ se dice **pleno** (resp. **fiel**) si para cualquier par de objetos (X, Y) en \mathbf{C} , la aplicación

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

es un epimorfismo (resp. monomorfismo). Una subcategoría **plena** (resp. **fiel**) \mathbf{C}' de \mathbf{C} es una categoría para el que el funtor inclusión $\iota : \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{C}$ es pleno (resp. fiel).

La manera correcta de relacionar dos funtores es hacerlo mediante una **transformación natural**. Si $\alpha, \beta : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ son dos funtores covariantes, entonces una transformación natural η asocia a cada objeto A de \mathbf{D} un morfismo $\eta_A : \alpha(A) \rightarrow \beta(A)$, de manera que para cada morfismo $f : A \rightarrow B$ en \mathbf{D} , tenemos que $\beta(f) \circ \eta_A = \eta_B \circ \alpha(f)$, esto es, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\alpha(A) & \xrightarrow{\eta_A} & \beta(A) \\
\alpha(f) \downarrow & & \downarrow \beta(g) \\
\alpha(B) & \xrightarrow{\eta_B} & \beta(B).
\end{array}$$

Una transformación natural se dice **equivalencia natural** si el morfismo $\eta_A : \alpha(A) \rightarrow \beta(A)$ es un isomorfismo en \mathbf{C} para cualquier objeto A de \mathbf{D} .

Un funtor $\alpha : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ se denomina **equivalencia de categorías** si existe otro funtor $\beta : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ tal que $\alpha\beta$ es naturalmente equivalente al funtor identidad en \mathbf{D} y $\beta\alpha$ es naturalmente equivalente al funtor identidad en \mathbf{C} . (notemos que esta definición es semejante a la de dos equivalencias homótopas).

Definición 1.9. Sean $\alpha : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ y $\beta : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ dos funtores. Una **adjunción** de α a β es una equivalencia natural $\eta : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(\alpha(-), -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, \beta(-))$.

Notemos que ambos funtores están definidos de $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D}$ en \mathbf{Set} . Por lo tanto, una adjunción es una colección de isomorfismos

$$\eta_{A,A'} : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(\alpha(A), A') \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, \beta(A'))$$

que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_{\mathbf{D}}(\alpha(A), A') & \xrightarrow{\eta_{A,A'}} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, \beta(A')) \\
\text{Hom}_{\mathbf{D}}(\alpha(g), f) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(g, \beta(h)) \\
\text{Hom}_{\mathbf{D}}(\alpha(B), B') & \xrightarrow{\eta_{B,B'}} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, \beta(B'))
\end{array}$$

para cada par de objetos (A, A') , (B, B') y cada morfismo $(g^{op}, h) : (A, A') \rightarrow (B, B')$ de $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D}$. Denotamos las adjunciones por

$$\alpha : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D} : \beta$$

Decimos en este caso que α y β son funtores adjuntos, que forman un par adjunto, que α es adjunto a izquierda de β y que β es adjunto a derecha de α . En caso de existir, el adjunto a derecha o a izquierda de un funtor es único salvo equivalencia natural.

Algunos tipos de categorías. Límites y colímites

En primer lugar, introducimos las categorías pequeñas y finitas.

Definición 1.10. Una categoría \mathbf{C} se dice **pequeña** si la colección de objetos es un conjunto, y se dice **finita** si es un conjunto finito.

Aunque podemos definir los límites en general, normalmente trabajaremos con categorías de estos tipos. Por ejemplo, la categoría de conjuntos \mathbf{Set} no es pequeña. En cambio, los grafos dirigidos (“diagramas”) o los conjuntos parcialmente ordenados (ver por ejemplo [Vak17], ejemplo 1.2.8) sí son categorías pequeñas.

Definición 1.11. Sean \mathbf{C} una categoría y sea \mathbf{D} una categoría pequeña. La **categoría de funtores $\mathbf{C}^{\mathbf{D}}$** es la categoría cuyos objetos son funtores $\alpha : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ y cuyos morfismos son transformaciones naturales.

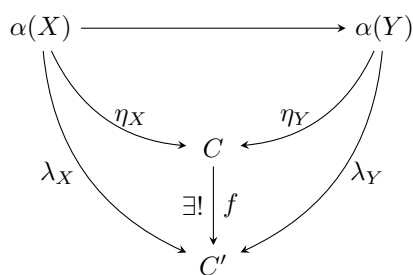
La **categoría de morfismos $\text{Mor}(\mathbf{C})$** es la categoría de funtores cuando \mathbf{D} es el diagrama $X \rightarrow Y$.

Definición 1.12. Sean \mathbf{D} una categoría y $\alpha : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ un funtor. Un **límite** es un objeto $L = \lim(\alpha)$ de \mathbf{C} junto con una transformación natural $\eta : \Delta(L) \rightarrow \alpha$ tal que para cada objeto L' de \mathbf{C} y para cualquier transformación natural $\lambda : \Delta(L') \rightarrow \alpha$ existe un único morfismo $f : L' \rightarrow L$ tal que $\lambda = \eta \circ \Delta(f)$.

$\Delta(f)$ es la transformación natural constante $\Delta(f) : \Delta(L) \rightarrow \Delta(L')$, obtenida al aplicar el funtor constante. Dualmente, tenemos la definición de colímite.

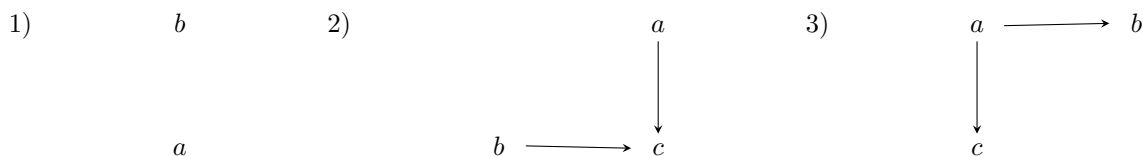
Definición 1.13. Sean \mathbf{D} una categoría y $\alpha : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ un funtor. Un **colímite** es un objeto $C = \text{colim}(\alpha)$ de \mathbf{C} junto con una transformación natural $\eta : \alpha \rightarrow \Delta(C)$ tal que para cada objeto C' de \mathbf{C} y para cualquier transformación natural $\lambda : \alpha \rightarrow \Delta(C')$ existe un único morfismo $f : C \rightarrow C'$ tal que $\lambda = \Delta(f) \circ \eta$.

Profundicemos en el caso del colímite (el caso del límite es dual). El funtor α nos proporciona una estructura como la de \mathbf{D} pero con objetos y morfismos de \mathbf{C} . La transformación natural hacia el funtor constante $\Delta(C)$ consiste en unos morfismos $\eta_X : \alpha(X) \rightarrow C$ para cada objeto X de \mathbf{D} . La propiedad universal de C significa que para cualquier objeto C' con unos morfismos $\lambda_X : \alpha(X) \rightarrow C'$ existe un morfismo $f : C \rightarrow C'$ que lo factoriza todo como en el siguiente dibujo:



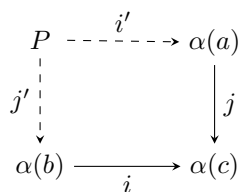
Por la propiedad universal, los límites y colímites son únicos salvo isomorfismo (si existen).

En muchos casos, \mathbf{D} va a ser una categoría consistente en un diagrama como los siguientes. Se le llama **categoría de índices**.



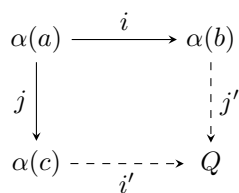
Ejemplo 1.14. El **producto** es el límite para los diagramas de la forma 1). El **coproducto** colímite para dicho diagrama.

El **producto fibrado** es el límite para los diagramas de la forma 2). Como resultado, obtenemos un diagrama conmutativo de la forma



en donde P es el producto fibrado. La aplicación i' se denomina **cambio de base** de i mediante j , e igualmente la aplicación j' se denomina cambio de base de j mediante i .

El **pushout** es el colímite para los diagramas de la forma 3). Dualmente al caso anterior, obtenemos diagramas de la forma



En donde Q es el pushout. La aplicación i' se denomina **cambio de cobase** de i mediante j , e igualmente la aplicación j' se denomina cambio de cobase de j mediante i . Para más detalle y más ejemplos, ver [Vak17], 1.4 o [Bra19]

Un caso que veremos con frecuencia es el caso $\mathbf{D} = \mathbf{Z}^+$, siendo \mathbf{Z}^+ el diagrama:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n \longrightarrow \cdots$$

El colímite de un diagrama de esta forma se denomina **colímite secuencial**.

Definición 1.15. El límite o el colímite de un funtor $\alpha : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ se dice **pequeño** si \mathbf{D} es pequeña, y se dice **finito** si \mathbf{D} es finita.

Definición 1.16. Sea \mathbf{C} una categoría. Un objeto **inicial** es un objeto de \mathbf{C} para el que existe un único morfismo a cualquier otro objeto de \mathbf{C} . En otras palabras, es el colímite del diagrama vacío. Lo denotamos por \emptyset . Un objeto **final** es un objeto de \mathbf{C} para el que existe un único morfismo desde cualquier otro objeto de \mathbf{C} . Es el límite del diagrama vacío. Lo denotamos por $*$. Un objeto **cero** es un objeto inicial y final, y lo denotamos por $\mathbf{0}$.

En caso de existir, el objeto cero es único salvo isomorfismo. Dados dos objetos A y B en \mathbf{C} , llamamos **morfismo cero** al único morfismo entre ellos que factoriza a través del objeto $\mathbf{0}$.

Ejemplo 1.17. En la categoría **Top**, el vacío \emptyset es el objeto inicial, ya que siempre podemos definir la aplicación vacía $\emptyset \rightarrow X$. Por otro lado, los espacios topológicos unipuntuales son objetos finales porque podemos definir las aplicaciones constantes. En consecuencia, no hay objeto cero.

En \mathbf{Mod}_R , el módulo 0 es objeto inicial y final. Por lo tanto es objeto cero. Como consecuencia, en \mathbf{Ch}_R , el complejo de cadenas nulo también va a ser objeto cero.

Definición 1.18. Sea \mathbf{C} una categoría con objeto $\mathbf{0}$. Un **núcleo** de un morfismo $f : B \rightarrow C$ es una aplicación $i : A \rightarrow B$ tal que $fi = 0$ y tal que si existe otra aplicación $i' : A' \rightarrow B$ cumpliendo $fi' = 0$ existe una única $k : A' \rightarrow A$ tal que $ik = i'$. En otras palabras, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A' & & & & \\ \downarrow \exists! k & \searrow i' & & & \\ A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{f} & C \\ & & \searrow 0 & & \end{array}$$

Usualmente denotamos al objeto A como $\text{Ker}(f)$.

Dualmente, un **conúcleo** de f es un morfismo $q : C \rightarrow D$ tal que $qf = 0$ y tal que para cualquier otra $q' : C \rightarrow D'$ cumpliendo $q'f = 0$ existe una única $k : D \rightarrow D'$ tal que $kq = q'$. Usualmente, denotamos al objeto D por $\text{Coker}(f)$.

Ejemplo 1.19. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de R -módulos. Se puede probar que el núcleo de f es el submódulo de M $f^{-1}(0)$ con la inclusión. Por otro lado, el conúcleo de f es el módulo cociente $N/\text{Im}(f)$ con la proyección de N sobre el cociente.

Finalmente, definimos las categorías abelianas, que utilizaremos en el álgebra homológica.

Definición 1.20. Una categoría \mathbf{C} se dice **aditiva** si

- para dos objetos A, B cualesquiera, el conjunto de morfismos $f : A \rightarrow B$ es un grupo abeliano.
- la composición de morfismos cumple la propiedad distributiva respecto de dicha suma.
- tiene objeto cero.
- tiene todos los productos finitos.

Una categoría aditiva se dice **abeliana** si además cumple

- toda aplicación tiene núcleo y conúcleo
- todo monomorfismo es el núcleo de su conúcleo.
- todo epimorfismo es el conúcleo de su núcleo.

Retratos y levantamientos

Un problema clásico, tanto en matemáticas en general como en teoría de categorías, consiste lidiar con la invertibilidad de un morfismo. Si tenemos dos morfismos $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ tales que $g \circ f = id_A$, entonces se dice que f es **inversa a derecha** de g y que g es **inversa a izquierda** de f . En este caso, decimos que A es un **retrato** de B . Un **isomorfismo** no es más que un morfismo que tiene una inversa a ambos lados.

En la teoría de homotopía clásica de espacios topológicos, los retratos son importantes porque algunos de ellos (los retratos por deformación) conservan el tipo de homotopía. Por lo tanto, los retratos van a jugar un papel importante. De hecho, es interesante ver cómo son los retratos en la categoría $\mathbf{Mor}(\mathbf{C})$.

Un morfismo $f : A \rightarrow B$ es un retrato de un morfismo $g : A' \rightarrow B'$ si tenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & A' & \xrightarrow{r} & A \\ f \downarrow & & g \downarrow & & f \downarrow \\ B & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{r'} & B \end{array}$$

en el que $ri = id_A$ y $r'i' = id_B$. Notemos que si g es un isomorfismo, entonces f es isomorfismo porque h es inversa de g , $rh'i'$ es inversa de f .

Para terminar esta sección, introducimos la noción de levantamiento. Esta noción es fundamental en la teoría de homotopía clásica, y también lo va a ser en la desarrollada en las categorías de modelos.

Definición 1.21. Sea dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & p \downarrow \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Un **levantamiento** de dicho diagrama es una aplicación $h : B \rightarrow X$ tal que el diagrama resultante sigue siendo conmutativo, esto es, tal que $hi = f$ y $ph = g$.

En caso de que, dadas i y p , exista un levantamiento en cualquier diagrama de la forma anterior, entonces se dice que i tiene la **propiedad del levantamiento a izquierdas** (LLP) respecto a p y que p tiene la **propiedad del levantamiento a derechas** (RLP) respecto a i .

1.2 Preliminares de topología

La categoría \mathbf{Top} está constituida por los espacios topológicos como objetos y las aplicaciones continuas como morfismos. Para dotar a \mathbf{Top} de estructura de categoría de modelos, vamos a necesitar algunos preliminares.

Teoría de homotopía habitual

Sabemos que en \mathbf{Top} podemos definir una noción de homotopía de la siguiente manera.

Definición 1.22. Sean X e Y dos espacios topológicos. Dos aplicaciones $f, g : X \rightarrow Y$ son **homótopas** si existe una aplicación continua $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ tal que $H(0, x) = f(x)$ y $H(1, x) = g(x)$ para cualquier $x \in X$.

Por un lado, tenemos los grupos de homotopía π_n para $n \geq 0$. Utilizándolos, definimos la noción de equivalencia homotópica débil.

Definición 1.23. Una aplicación entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$ se dice **equivalencia homotópica débil** si para cada $x \in X$, $f_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ es una biyección de conjuntos puntuados para $n = 0$ y es un isomorfismo de grupos para $n \geq 1$.

Por otro lado, tenemos definición habitual de equivalencia homotópica.

Definición 1.24. Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ se dice **equivalencia homotópica** si existe $g : Y \rightarrow X$ continua tal que $g \circ f$ y $f \circ g$ son homótopas a las respectivas aplicaciones identidad.

El Teorema de Whitehead relaciona estos dos tipos de equivalencias. Si X e Y son espacios topológicos con estructura de CW-complejo, entonces una aplicación continua entre ellos es equivalencia homotópica débil si y sólo si es equivalencia homotópica. Veremos que la condición de ser CW-complejo es necesaria.

Finalmente, podemos definir la categoría de homotopía habitual, que consta de los objetos de **Top** y de los morfismos salvo equivalencia homotópica. Estudiaremos cómo se relaciona ésta categoría con la estructura de modelos que definiremos en **Top**.

CW-complejos

Los CW-complejos son objetos muy buenos a la hora de hacer homotopía. Prueba de ello es la equivalencia entre homotopía débil y homotopía dada por el teorema de Whitehead. Vamos a dar algunas definiciones y resultados. Para más profundidad, léase [Hat01] y [Spa89].

La construcción de un CW-complejo consiste en el pegado de las llamadas n -**células**, que no son más que discos cerrados de dimensión n . Dado un espacio topológico X , pegar una n -célula consiste en hacer el pushout del primero de los siguientes diagramas. Pegar varias al mismo tiempo es hacer el pushout del segundo.

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \\ D^n & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\alpha} S_{\alpha}^{n-1} & \xrightarrow{\phi_{\alpha}} & X \\ \downarrow & & \\ \bigsqcup_{\alpha} D_{\alpha}^n & & \end{array}$$

La construcción de un CW-complejo parte de un conjunto discreto X^0 (las 0-células), en el que pegamos 1-células para obtener X^1 , después 2-células para obtener X^2 , etc. Esto es, $X^n = X^{n-1} \bigsqcup_{\alpha} D_{\alpha}^n$ bajo la relación de equivalencia dada por las aplicaciones $\phi_{\alpha} : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ del diagrama anterior (con imagen esta vez en X^{n-1}). El espacio X^n se denomina n -**esqueleto**. Tanto si paramos esta construcción en un n finito como si seguimos hasta construir $\bigsqcup X^n$, denominamos a este tipo de espacios **CW-complejo**. ¿Pero qué pasa si, en vez de partir de las 0-células, partimos de un espacio topológico A al que le vamos pegando 0-células, 1-células, etc? Un **CW-complejo relativo** es un espacio X construido a partir de un espacio A al que le añadimos células. La principal diferencia entre un CW-complejo y un CW-complejo relativo es que A no tiene por qué tener estructura de CW-complejo.

Un **subcomplejo** de un CW-complejo es un subespacio cerrado A de X que es unión de células de X . Se puede probar que A tiene estructura de CW-complejo y que X se obtiene uniendo células a A . Un **par CW** es un par (X, A) de complejo y subcomplejo.

Análogamente, un **subcomplejo relativo** es un subespacio cerrado A de X tal que X se obtiene pegando células en A . Y un **par CW relativo** es un par (X, A) formado por un complejo y un subcomplejo.

Utilizaremos el siguiente resultado:

Lema 1.25. Un subespacio compacto de un CW complejo está contenido en un subcomplejo finito.

Demostración. [Hat01], proposición A.1. □

Fibraciones y cofibraciones de Hurewicz y Serre

Finalmente, vamos a dar algunas definiciones relacionadas con los levantamientos y las propiedades de levantamiento que vimos en la sección anterior. Vamos a estudiar diagramas del tipo

$$\begin{array}{ccc} A \times 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ A \times [0, 1] & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

Este tipo de diagramas nos recuerdan a los levantamientos de homotopía. Según las condiciones que tenga que cumplir A para la existencia de un levantamiento dada una aplicación p y un diagrama conmutativo, distinguiremos los siguientes tipos de aplicaciones.

Definición 1.26. Una aplicación $p : X \rightarrow Y$ se denomina **fibración de Serre** si para cada CW-complejo A , la aplicación p tiene la RLP con respecto a la inclusión $A \times 0 \rightarrow A \times [0, 1]$.

Definición 1.27. Una aplicación $p : X \rightarrow Y$ se denomina **fibración de Hurewicz** si para cualquier espacio topológico A , p cumple la RLP con respecto a la inclusión $A \times 0 \rightarrow A \times [0, 1]$.

Finalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.28. Si A es un subespacio cerrado de B , la inclusión $i : A \rightarrow B$ se denomina **cofibración de Hurewicz cerrada** si i tiene la propiedad de extensión de homotopía, esto es, si para cualquier espacio Y y cualquier diagrama del tipo

$$\begin{array}{ccc} B \times 0 \cup A \times [0, 1] & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ B \times [0, 1] & \longrightarrow & * \end{array}$$

tenemos un levantamiento.

Estos dos últimos tipos de aplicaciones sirven para dar a **Top** una estructura de modelos diferente a la que nosotros estudiaremos, así que no profundizaremos en ellos.

Conjuntos simpliciales

Finalmente, vamos a dar las definiciones fundamentales para construir la categoría de conjuntos simpliciales **sSet**. Estos objetos se construyen de manera abstracta, pero veremos que están relacionados con los espacios topológicos, incluso a nivel de categorías de modelos.

Definición 1.29. La **categoría simplicial**, denotada por Δ , es una subcategoría de **Set** cuyos objetos son subconjuntos de números naturales de la forma $[n] = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ y cuyos morfismos son aplicaciones entre dichos conjuntos tales que si $i < j$ entonces $f(i) < f(j)$.

Definición 1.30. La **categoría de conjuntos simpliciales sSet** es la categoría de funtores $\mathbf{Set}^{\Delta^{op}}$. Un **conjunto simplicial** es por lo tanto un functor contravariante $X : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$. El conjunto $X[n]$ se denomina conjunto de n -símplices de X .

Por lo tanto, podemos decir que un conjunto simplicial X consta de conjuntos $X_0 := X[0]$ (el conjunto de vértices), X_1 (el conjunto de aristas), etc., de manera que para cada morfismo $f : [i] \rightarrow [j]$ en Δ tenemos una aplicación de conjuntos $X(f) : X_j \rightarrow X_i$ (que son las inclusiones de los vértices en las aristas, las aristas en las caras, etc).

Por ejemplo, podemos considerar las aplicaciones

$$\partial_i : [n-1] \rightarrow [n] \qquad \sigma_i : [n+1] \rightarrow [n]$$

dadas por

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases} \qquad \sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j-1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

en Δ , que nos dan las aplicaciones borde y degenerada

$$d_i : X_n \rightarrow X_{n-1} \qquad s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$$

En consecuencia, los morfismos entre conjuntos simpliciales son familias de aplicaciones $f_n : X[n] \rightarrow Y[n]$ que conmutan adecuadamente con las aplicaciones borde y degenerada.

Ejemplo 1.31. El n -símplice estándar Δ^n es el n -símplice definido por el funtor $\text{Hom}(_, [n]) : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$. El conjunto de k -símplices $\Delta^n([k]) = \text{Hom}_\Delta([k], [n])$ (no degenerados, esto es, sin elementos repetidos) se corresponde con el conjunto de las $\binom{n}{k}$ aplicaciones inyectivas (que además preserven el orden) de $[k]$ en $[n]$.

El **símplice frontera** de Δ^n , $\delta\Delta^n$, consiste en aquellas aplicaciones de Δ^n que son no identitarias (esto es, quitamos el n -símplice, la aplicación identidad).

El r -**cuerno** de Δ^n , Λ_n^r son todas las aplicaciones de Δ^n menos la identidad y menos $\partial_r : [n-1] \rightarrow [n]$

Para relacionar las categorías **Top** y **sSet** definiremos dos funtores, la realización geométrica y el funtor complejo singular. Para ello, introducimos en n -símplice topológico habitual

$$|\Delta^n| := \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} \quad (1.1)$$

para el que tenemos definidos habitualmente los operadores

- borde $b_i : |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$, dado por la inclusión de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^{n+1} que deja nula la i -ésima coordenada.
- degenerado $c_i : |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^{n+1}|$ dado por la proyección baricéntrica de $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $(x_0, \dots, x_n) \rightsquigarrow (x_0, \dots, x_i + x_{i+1}, \dots, x_n)$.

En efecto, podemos identificar cada una de las aplicaciones de $[k]$ en $[n]$ con los k -símplices de $|\Delta^n|$ (vértices para $k=0$, aristas para $k=1$, etc. Extendemos esta correspondencia a cualquier conjunto simplicial, definiendo la realización geométrica de dicho conjunto.

Definición 1.32. Sea X un conjunto simplicial dotado de la topología discreta, y sea $\bar{X} = \bigcup_{n \geq 0} X[n] \times |\Delta^n|$. Definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$\begin{aligned} (d_i x_n, u_{n-1}) &\sim (x_n, b_i u_{n-1}) && \text{cuando } x_n \in X_n \text{ y } u_{n-1} \in |\Delta^{n-1}| \\ (s_i x_n, u_{n+1}) &\sim (x_n, c_i u_{n+1}) && \text{cuando } x_n \in X_n \text{ y } u_{n+1} \in |\Delta^{n+1}| \end{aligned}$$

La **realización geométrica** $|X|$ de X es el conjunto \bar{X} / \sim

Es fácil ver que la realización geométrica induce un funtor $|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$, definiendo para cada morfismo de espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$ la aplicación

$$\begin{aligned} |f| : |X| &\rightarrow |Y| \\ |x_n, u_n| &\rightsquigarrow |f(x_n), u_n| \end{aligned}$$

Definición 1.33. El funtor **complejo singular** es un funtor $\mathbf{Sing} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$ que

- a cada espacio topológico A le asocia el conjunto simplicial $\mathbf{Sing}(A) = \{f : |\Delta^n| \rightarrow A \mid f \text{ es continua y } n \in \mathbb{N}\}$.
- a cada morfismo $g : A \rightarrow B$ le asocia la aplicación $\mathbf{Sing}(g) : \mathbf{Sing}(A) \rightarrow \mathbf{Sing}(B)$ dada por la composición con g .

No vamos a profundizar en las definiciones. Simplemente notar que se puede probar que estos dos funtores son adjuntos (ver por ejemplo [Car07], Proposición 4.2.5).

1.3 Preliminares de álgebra homológica

Complejos de cadenas y sucesiones exactas

En la segunda parte del trabajo, nos dedicaremos a trabajar con objetos de carácter algebraico.

Definición 1.34. Una **sucesión** es una cadena de objetos y morfismos de la forma

$$\cdots \longrightarrow A_k \longrightarrow B \longrightarrow \cdots$$

Una sucesión se dice **exacta** si la imagen de cada morfismo coincide con el núcleo del siguiente. Una **sucesión exacta corta** es una sucesión exacta del tipo

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Se dice que una sucesión exacta corta **rompe** si podemos poner $M = L \oplus N$.

Definición 1.35. Sea \mathbf{C} una categoría abeliana. Una sucesión de objetos y aplicaciones lineales de la forma

$$\cdots \longrightarrow A_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} A_k \xrightarrow{\partial_k} A_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

y tal que la imagen de cada morfismo está contenido en el núcleo del siguiente se denomina **complejo de cadenas**. Dualmente, un **complejo de cocadenas** es una sucesión de la forma

$$\cdots \longrightarrow A_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} A_k \xrightarrow{\partial_k} A_{k+1} \longrightarrow \cdots$$

cumpliendo la misma condición.

Podemos definir los grupos de homología y de cohomología, haciendo el cociente. Nosotros lo vamos a ver para la categoría de complejos de cadenas de módulos sobre un anillo.

La categoría \mathbf{Ch}_R

La segunda categoría en la que vamos a fijarnos, y a la que podemos dotar de estructura de categoría de modelos, es la categoría \mathbf{Ch}_R . Si R es un anillo asociativo y con unidad, \mathbf{Ch}_R consiste en complejos de cadenas de R -módulos a izquierda no negativamente graduados. Un objeto M de \mathbf{Ch}_R es de la forma

$$\cdots \xrightarrow{\partial} M_2 \xrightarrow{\partial} M_1 \xrightarrow{\partial} M_0$$

en donde cada uno de los M_i es un R -módulo a izquierda ($M_i \in \mathbf{Mod}_R$) y cada una de las aplicaciones $\partial : M_k \rightarrow M_{k-1}$ cumple $\partial^2 = 0$. Los morfismos $f : M \rightarrow N$ son colecciones de morfismos de R -módulos, $f_k : M_k \rightarrow N_k$ que cumplen $f_{k-1}\partial = \partial f_k$, esto es, que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial} & M_k & \xrightarrow{\partial} & M_{k-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & M_1 & \xrightarrow{\partial} & M_0 \\
& & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\
\cdots & \xrightarrow{\partial} & N_k & \xrightarrow{\partial} & N_{k-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & N_1 & \xrightarrow{\partial} & N_0
\end{array}$$

Dado un complejo de cadenas M , podemos definir los grupos de homología como se definen de manera usual, esto es,

$$H_k M := \frac{\ker(\partial : M_k \longrightarrow M_{k-1})}{\operatorname{Im}(\partial : M_{k+1} \longrightarrow M_k)}$$

Usualmente, $\ker(\partial : M_k \longrightarrow M_{k-1})$ se denomina **módulo de bordes** y se denota $\operatorname{Bd}_k(M)$, mientras que $\operatorname{Im}(\partial : M_{k+1} \longrightarrow M_k)$ se denomina **módulo de ciclos** y se denota $\operatorname{Cy}_k(M)$. Un complejo de cadenas se denomina **acíclico** si todos sus módulos asociados son nulos.

Pasando al cociente, los morfismos de complejos inducen morfismos entre los grupos de homología. Un **cuasiisomorfismo** es un morfismo que induce isomorfismos entre estos grupos.

Módulos y complejos proyectivos

Damos tres caracterizaciones diferentes de los módulos proyectivos.

Definición 1.36. Un R -módulo P se dice **proyectivo** si dados un homomorfismo $f : P \longrightarrow B$ y un epimorfismo $g : A \longrightarrow B$, existe un $h : P \longrightarrow A$ tal que $gh = f$.

Los módulos proyectivos van a ser importantes porque nos proporcionan levantamientos. También sabemos que todo módulo libre es proyectivo, y que la suma directa de módulos proyectivos es proyectiva. Tenemos las siguientes caracterizaciones para módulos proyectivos (ver [CE99], I.2).

Lema 1.37. Sea P un R -módulo. Son equivalentes:

- P es proyectivo.
- P es sumando de un R -módulo libre.
- Cualquier sucesión exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

rompe.

Se puede dar una definición semejante para complejos de cadenas.

Definición 1.38. Un complejo de cadenas P se dice **proyectivo** si dados un morfismo $f : P \longrightarrow N$ y un epimorfismo $g : M \longrightarrow N$ de complejos de cadenas, existe $h : P \longrightarrow M$ tal que $gh = f$.

Resoluciones, funtor Ext

Vamos a definir el funtor derivado Ext utilizando resoluciones proyectivas. Dado que nuestro trabajo se reduce a la categoría \mathbf{Ch}_R , a partir de ahora consideramos todos los complejos de cadenas con los que trabajemos en dicha categoría.

Definición 1.39. Sea M un R -módulo. Una **resolución a izquierda** es un complejo de cadenas $P \in \mathbf{Ch}_R$ junto con un morfismo $\epsilon : P_0 \longrightarrow M$ tal que

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

es exacta. Dicha resolución se dice **proyectiva** si cada uno de los P_i es proyectivo.

en el que las filas horizontales son sucesiones exactas cortas. Entonces, si f y h son epimorfismos, también lo es g .

2 Categorías de modelos. Homotopía

En esta sección definimos las categorías de modelos. Para ello distinguimos tres clases de aplicaciones que tienen que cumplir determinados axiomas. La idea es trabajar con una de ellas, llamadas equivalencias débiles, que no tienen por qué ser isomorfismos pero que presentan cierto interés de cara a trabajar "salvo equivalencia débil". La estructura en las categorías de modelos nos permite definir una categoría de homotopía, de manera semejante a la que tenemos en los espacios topológicos. Veremos cómo se construye y alguna de sus características.

2.1 Definición

Definición 2.1. Una **categoría de modelos** es una categoría \mathbf{C} en la que distinguimos tres tipos de morfismos:

- **equivalencias débiles.**
- **fibraciones.**
- **cofibraciones.**

Cada uno de estos tipos es cerrado con respecto a la composición y contiene a la identidad. Si una fibración o una cofibración es además equivalencia débil se denomina **acíclica**.

Además, requerimos que se cumplan los siguientes axiomas:

MC1: Existen límites y colímites pequeños.

MC2: Si f y g son aplicaciones en \mathbf{C} tales que gf está definida y hay dos equivalencias débiles entre f , g y gf , entonces las tres lo son.

MC3: Si f es un retracts de g y g es fibración, cofibración o equivalencia débil, entonces también lo es f .

MC4: Sea dado el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & p \downarrow \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Si se cumple alguna entre

- (i) i es cofibración y p es fibración acíclica.
- (ii) i es cofibración acíclica y p es fibración.

entonces existe un levantamiento en dicho diagrama.

MC5: Cualquier morfismo f puede factorizarse de dos formas diferentes:

- (i) $f = pi$, con i cofibración y p fibración acíclica.
- (ii) $f = pi$, con i cofibración acíclica y p fibración.

Denominamos **estructura de modelos** a unas designaciones concretas de equivalencias débiles, fibraciones y cofibraciones que cumplen los axiomas **MC1-MC5**.

Notación. Para denotar las equivalencias débiles utilizaremos cuando sea conveniente el símbolo \sim sobre las flechas que denoten los morfismos.

Nota. Algunos autores, como por ejemplo [Hov07], exigen a las factorizaciones la cualidad de ser funtoriales. Nosotros hemos seguido [DS95] y no lo hemos hecho porque no lo hemos necesitado y porque el argumento que utilizamos se puede adaptar para exigir la funtorialidad, como en efecto se hace en [Hov07].

Observación 2.2. Si \mathbf{C} tiene estructura de modelos, entonces podemos darle a \mathbf{C}^{op} una estructura de modelos dual. Concretamente, decimos que una aplicación en \mathbf{C}^{op} es

- equivalencia débil si f^{op} es equivalencia débil en \mathbf{C} .
- cofibración si f^{op} es fibración en \mathbf{C} .
- fibración si f^{op} es cofibración en \mathbf{C} .

Con estas designaciones, \mathbf{C}^{op} tiene estructura de categoría de modelos. En efecto, **MC1-MC3** son inmediatos. **MC4(i)** se sigue de **MC4(ii)** en \mathbf{C} como muestran los siguientes diagramas, en los que primero revertimos las flechas y después giramos.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i \sim & \nearrow \text{---} & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array} &
 \begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f} & X \\ \downarrow i \sim & \nearrow \text{---} & \downarrow p \\ B & \xleftarrow{g} & Y \end{array} &
 \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow p & \nearrow \text{---} & \downarrow i \sim \\ X & \xrightarrow{f} & A \end{array}
 \end{array}$$

MC5(i) se deduce de **MC(ii)** en \mathbf{C} puesto que pasamos de

$$f : X \xrightarrow[\sim]{\text{cofibración}} Y \xrightarrow{\text{fibración}} Z$$

en \mathbf{C} a

$$f^{\text{op}} : Z \xrightarrow[\sim]{\text{cofibración}} Y \xrightarrow{\text{fibración}} X$$

en \mathbf{C}^{op} . De manera similar, tenemos **MC4(ii)** y **MC5(ii)** a partir de **MC4(i)** y **MC5(i)** en \mathbf{C} .

Como consecuencia, para cada afirmación en una categoría de modelos podemos considerar la afirmación dual, cambiando el sentido de las flechas y las fibraciones por las cofibraciones. Siguiendo un razonamiento similar al principio de dualidad enunciado en los preliminares, tenemos que si una afirmación es cierta para todas las categorías de modelos, entonces la afirmación dual también.

Por **MC1**, todas las categorías de modelos tienen objeto inicial (\emptyset) y objeto final ($*$). Esto nos permite hacer la siguiente definición

Definición 2.3. Un objeto A se dice **cofibrante** si $\emptyset \rightarrow A$ es una cofibración, y se dice **fibrante** si $A \rightarrow *$ es una fibración.

2.2 Ejemplos fundamentales

A continuación, vamos a enunciar los dos ejemplos fundamentales que trataremos en el trabajo, que son dos estructuras para las categorías **Top** y **Ch_R**. Aunque no los probemos ahora, sí que haremos referencias a ellos (especialmente al primero, por razones obvias) mientras definamos los objetos y morfismos fundamentales de cara a la categoría de homotopía.

Ejemplo 2.4. La categoría **Top** de espacios topológicos tiene estructura de categoría de modelos si definimos una aplicación $f : X \rightarrow Y$ como

- equivalencia débil si es equivalencia homotópica débil.
- fibración si es fibración de Serre. Éstas incluyen a las aplicaciones de recubrimiento.
- cofibración si cumple la LLP respecto a las fibraciones acíclicas.

Ejemplo 2.5. La categoría **Ch_R** de complejos de cadenas de módulos sobre un anillo R tiene estructura de categoría de modelos si definimos una aplicación $f : X \rightarrow Y$ como

- equivalencia débil si induce homomorfismos entre los grupos de homología.
- fibración si es epimorfismo en cada grado.

- cofibración si es monomorfismo de conúcleo proyectivo en cada grado.

2.3 Homotopía en categorías de modelos

Si estamos trabajando en una categoría de modelos \mathbf{C} y consideramos dos objetos A y X en \mathbf{C} , lo que queremos hacer es construir una relación de equivalencia en $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X)$ que tenga sentido como relación de homotopía. Definiremos estas relaciones a derecha y a izquierda, utilizando los llamados objetos cilíndricos y objetos de caminos. Veremos algunas de sus propiedades fundamentales y probaremos que las dos nociones son equivalentes si A es cofibrante y X es fibrante. Finalmente, construiremos la categoría de homotopía a partir de esta relación, y estudiaremos algunas de sus características.

Utilizaremos para ello el siguiente lema.

Lema 2.6. Sea \mathbf{C} una categoría de modelos.

- El cambio de cobase de una cofibración es una cofibración.
- El cambio de cobase de una cofibración acíclica es una cofibración acíclica.
- El cambio de base de una fibración es una fibración.
- El cambio de base de una fibración acíclica es una fibración acíclica.

Demostración. [DS95], proposición 3.14. □

2.3.1 Homotopía a izquierda

Definición 2.7. Un objeto cilíndrico para A es un objeto $A \wedge I$ de \mathbf{C} junto con un diagrama

$$A \amalg A \xrightarrow{i} A \wedge I \xrightarrow[\sim]{j} A$$

que factoriza la aplicación $id_A + id_A : A \amalg A \rightarrow A$. Un objeto cilíndrico se dice **bueno** si $A \amalg A \rightarrow A \wedge I$ es una cofibración, y se dice **muy bueno** si además $A \wedge I \rightarrow A$ es una fibración.

Componiendo la aplicación $i : A \amalg A \rightarrow A \wedge I$ con las inclusiones de cada copia de A en el coproducto $in_0, in_1 : A \rightarrow A \amalg A$, obtenemos las aplicaciones de estructura $i_0 = i \cdot in_0$ e $i_1 = i \cdot in_1$. Esto es, tenemos:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & & & \\
 \searrow^{in_0} & & \xrightarrow{i_0} & & \\
 & A \amalg A & \xrightarrow{i} & A \wedge I & \xrightarrow{\sim} & A \\
 \nearrow_{in_1} & & & & & \\
 A & & & & \\
 \nwarrow_{i_1} & & & &
 \end{array}$$

Notemos que, como $id_A = ji_0 = ji_1$, tenemos por **MC2** que las aplicaciones de estructura son equivalencias débiles.

Estos objetos nos permiten definir una relación de homotopía en \mathbf{C} .

Definición 2.8. Decimos que dos aplicaciones $f, g : A \rightarrow X$ en \mathbf{C} son **homótopas a izquierda** ($f \stackrel{L}{\sim} g$) si existe un objeto cilíndrico $A \wedge I$ para el que la suma $f + g : A \amalg A \rightarrow X$ se extiende a una aplicación $H : A \wedge I \rightarrow X$. Dicha aplicación H se llama **homotopía a izquierda** entre f y g (vía $A \wedge I$). Decimos que la homotopía es buena o muy buena cuando $A \wedge I$ es bueno o muy bueno respectivamente.

$$\begin{array}{ccc}
 A & & X \\
 \searrow^{i_0} & \xrightarrow{f} & \\
 & A \wedge I & \xrightarrow{H} \\
 \nearrow_{i_1} & & \\
 A & & X \\
 & \xrightarrow{g} &
 \end{array}$$

Como cabe esperar, los cilindros usuales \mathbf{Top} construidos como el producto cartesiano de un espacio topológico y un intervalo real son objetos cilíndricos para \mathbf{Top} . Tomando $A \times [0, 1]$ como objeto cilíndrico en \mathbf{Top} , tenemos la noción de homotopía habitual. También hemos de notar que, por MC5, siempre tenemos un muy buen objeto cilíndrico para A .

2.3.2 Homotopía a derecha

Definición 2.9. Un **objeto de caminos** para X es un objeto X^I de \mathbf{C} junto con un diagrama

$$X \xrightarrow{\sim} X^I \xrightarrow{i} X \times X$$

que factoriza la aplicación $(id_X, id_X) : X \rightarrow X \times X$. Dicho objeto se dice **bueno** si $X^I \rightarrow X \times X$ es una fibración, y se dice **muy bueno** si además $X \rightarrow X^I$ es una cofibración.

El espacio de caminos de un espacio topológico X es un objeto de caminos, porque basta considerar la inclusión con el camino constante y la proyección sobre los extremos del camino.

Tal y como hicimos con las inclusiones en el coproducto, podemos considerar las proyecciones del producto $pr_0, pr_1 : X \times X \rightarrow X$ y componerlas con p , dando lugar a las proyecciones estructurales $p_0 := pr_0 \cdot p, p_1 := pr_1 \cdot p : X^I \rightarrow X$. De manera dual a la sección anterior, estas proyecciones van a ser fibraciones acíclicas.

Definición 2.10. Dos aplicaciones $f, g : A \rightarrow X$ se dicen **homótopas a derecha** ($f \stackrel{r}{\sim} g$) si existe un objeto de caminos X^I para X tal que la aplicación producto $(f, g) : A \rightarrow X \times X$ se extiende a una aplicación $H : A \rightarrow X^I$. Esta aplicación H se denomina **homotopía a derecha** de f a g vía X^I . H se dice buena o muy buena cuando X^I es bueno o muy bueno respectivamente.

2.3.3 Propiedades de las relaciones de homotopía

Como primera observación, tanto los objetos cilíndricos y de caminos, como las homotopías a izquierda y a derecha, son duales, simplemente cambiando de sentido los morfismos, los coproductos por los productos y las cofibraciones por las fibraciones. Por lo tanto, podemos trabajar únicamente con objetos cilíndricos y homotopías a izquierda, y obtener resultados duales para objetos de caminos y homotopías a derecha.

En segundo lugar, tenemos que si $f \stackrel{l}{\sim} g$ vía una homotopía H , entonces f es equivalencia débil si y sólo si lo es g . Para verlo, simplemente notar que $f = Hi_0$ y $g = Hi_1$. Por MC2, f es equivalencia débil si y sólo si lo es H , y H lo es si y sólo si lo es f .

A continuación, consideramos $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X)$. Tal y como hemos dicho, el objetivo es definir una nueva categoría en la que trabajemos con las clases de homotopía de los morfismos y las equivalencias débiles sean los isomorfismos. Por lo tanto, lo primero que necesitamos es que la relación $\stackrel{l}{\sim}$ sea de equivalencia (para poder hacer un cociente) y que la composición de morfismos se “porte bien” con dichas clases de homotopía. Esto se va a constatar en los dos siguientes resultados que probemos. Para ello, enunciaremos previamente dos lemas:

Lema 2.11. Si A es cofibrante y $A \wedge I$ es un buen objeto cilíndrico para A , entonces i_0 e i_1 son cofibraciones acíclicas.

Demostración. [DS95], lema 4.4. □

Lema 2.12. Si $f \stackrel{l}{\sim} g : A \rightarrow X$, entonces existe una buena homotopía a izquierda de f a g . Si además X es fibrante, entonces existe una muy buena homotopía a izquierda.

Demostración. [DS95], lema 4.6 □

Lema 2.13. Si A es cofibrante, entonces $\stackrel{l}{\sim}$ es una relación de equivalencia en $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X)$.

Demostración.

- **Reflexividad:** Podemos tomar A como objeto cilíndrico de sí mismo, y en este caso las aplicaciones de estructura van a ser la identidad. En consecuencia, f vale como homotopía a izquierda entre f y f .
- **Simetría:** Consideramos la aplicación $s = in_1 + in_0 : A \amalg A \rightarrow A \amalg A$ que cambia los factores, y que existe por la propiedad universal del coproducto en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & A \\
 \text{\scriptsize } in_0 \swarrow & & \searrow \text{\scriptsize } in_1 \\
 & A \amalg A & \\
 \text{\scriptsize } in_1 \swarrow & \downarrow s & \searrow \text{\scriptsize } in_0 \\
 & A \amalg A &
 \end{array}$$

Dada una homotopía H tal que $H(i_0 + i_1) = (f + g)$ para un objeto cilíndrico $A \wedge I$ (con la inclusión i), tenemos

$$\begin{array}{ccccc}
 & A \wedge I & & & \\
 & \uparrow \tilde{i} & \swarrow f+g & & \\
 & A \amalg A & \xrightarrow{s} & A \amalg A & \xrightarrow{H} X \\
 & & & & \uparrow i
 \end{array}$$

En consecuencia, H es una homotopía de g a f a través del objeto cilíndrico $A \wedge I$ con la inclusión $\tilde{i} = is$.

- **Transitividad:** Éste es el único punto donde vamos a utilizar la hipótesis de A cofibrante. Supongamos $f \stackrel{l}{\sim} g$ y $g \stackrel{l}{\sim} h$. Por el Lema 2.12, podemos tomar $H : A \wedge I \rightarrow X$ una buena homotopía de f a g , y $H' : A \wedge I' \rightarrow X$ una buena homotopía de g a h . Esto es, tenemos

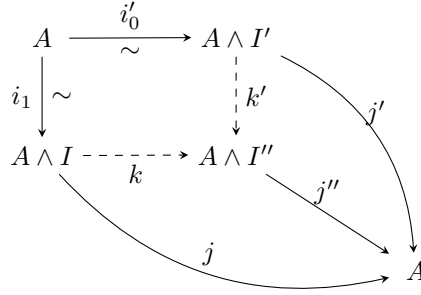
$$A \amalg A \xrightarrow{i = i_0 + i_1} A \wedge I \xrightarrow{\sim} A$$

$$A \amalg A \xrightarrow{i' = i'_0 + i'_1} A \wedge I' \xrightarrow{\sim} A$$

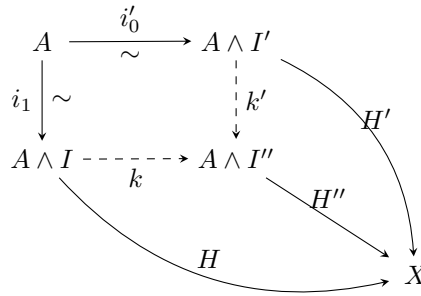
en donde i e i' son cofibraciones. Además, H y H' son tales que $H i_0 = f$, $H i_1 = g$, $H' i'_0 = g$, $H' i'_1 = h$. Definimos $A \wedge I''$ como el pushout del diagrama

$$A \wedge I \xleftarrow{\sim} A \xrightarrow{\sim} A \wedge I'$$

(i'_0 e i_1 son acíclicas por el lema 2.11. Aquí utilizamos la hipótesis A cofibrante). Por la propiedad universal del pushout existe una $j : A \wedge I'' \rightarrow A$ que hace el siguiente diagrama conmutativo.



Esto nos da la factorización de $id_A + id_A$ a través de $A \wedge I''$. Para que sea objeto cilíndrico, necesitamos que j'' sea equivalencia débil. Por el Lema 2.6, k es cofibración acíclica. Por ser $A \wedge I$ objeto cilíndrico, j es equivalencia débil. Por lo tanto, y como $j''k = j$, por **MC2** tenemos que j'' es equivalencia débil. Ahora, aplicando de nuevo la propiedad universal del pushout, tenemos que existe una aplicación $H'' : A \wedge I'' \rightarrow X$ como en el siguiente diagrama:



Por construcción, H'' es una homotopía entre f y h , que era lo que queríamos construir. □

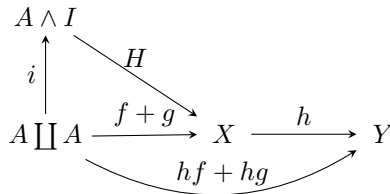
Esto nos permite, si A es cofibrante, definir $\pi^l(A, X)$ como el conjunto de clases de equivalencia en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ bajo la relación $\overset{l}{\sim}$.

Nota. En ocasiones, consideraremos este conjunto aun cuando A no sea cofibrante. En ese caso, tomaremos la relación de equivalencia generada por $\overset{l}{\sim}$, esto es, aquella en la que dos aplicaciones f y g están relacionadas si $f \overset{l}{\sim} g$ o si existe una cadena finita de relaciones por $\overset{l}{\sim}$ de la forma $f \overset{l}{\sim} h_1 \overset{l}{\sim} \dots \overset{l}{\sim} h_k \overset{l}{\sim} g$.

Ahora vamos con los resultados relacionados con la composición.

Lema 2.14. Si $f \overset{l}{\sim} g : A \rightarrow X$ y $h : X \rightarrow Y$ es un morfismo cualquiera, entonces $hf \overset{l}{\sim} hg$.

Demostración. Basta observar el diagrama



y vemos que hH es una homotopía a izquierda de hf a hg . □

Lema 2.15. Si X es fibrante, $f \overset{l}{\sim} g : A \rightarrow X$ y $h : A' \rightarrow A$ es un morfismo cualquiera, entonces $fh \overset{l}{\sim} gh$.

Demostración. Por el Lema 2.12, ya que X es fibrante, podemos tomar una homotopía muy buena $H : A \wedge I \rightarrow X$ de f a g . Tomemos también un buen objeto cilíndrico para A' , esto es,

$$A' \amalg A' \xrightarrow{i'} A' \wedge I \xrightarrow{j'} A'$$

donde i' es cofibración y j' es fibrición acíclica. Por **MC4** existe un levantamiento $k : A' \wedge I \rightarrow A \wedge I$ para el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A' \amalg A' & \xrightarrow{h \amalg h} & A \amalg A & \xrightarrow{i} & A \wedge I \\ \downarrow i' & & \searrow k & & \downarrow j \\ A' \wedge I & \xrightarrow{j'} & A' & \xrightarrow{h} & A \end{array}$$

donde i y j son las aplicaciones de la factorización para $A \wedge I$. Entonces Hk es la homotopía que buscábamos. En efecto, $Hki'_0 = Hi_0h = fh$ y $Hki'_1 = Hi_1h = gh$ \square

Estos dos lemas nos proporcionan el siguiente resultado, que nos da una aplicación bien definida e inducida por la composición entre los conjuntos de clases.

Lema 2.16. Si X es fibrante, entonces la composición en \mathbf{C} induce una aplicación $\pi^l(A', A) \times \pi^l(A, X) \rightarrow \pi^l(A', X)$, dado por $([h], [f]) \rightsquigarrow [fh]$.

Demostración. Notemos que, al no exigir que A sea cofibrante, no es necesario que dos elementos de la misma clase estén relacionados por una homotopía. Sin embargo, por la definición de la relación de equivalencia generada, basta probar que si $h \stackrel{l}{\sim} k : A' \rightarrow A$ y $f \stackrel{l}{\sim} g : A \rightarrow X$, entonces fh y gk están en la misma clase de $\pi^l(A', X)$. Pero esto lo tenemos porque, por el Lema 2.15, $fh \stackrel{l}{\sim} gh$ y, por el Lema 2.14, $gh \stackrel{l}{\sim} gk$. \square

Finalmente, tenemos este lema que utilizaremos más adelante.

Lema 2.17. Si A es cofibrante y $p : X \rightarrow Y$ es fibrición acíclica, entonces la composición con p induce una biyección $p_* : \pi^l(A, Y) \rightarrow \pi^l(A, X)$.

Demostración. [DS95], lema 4.9. \square

Ahora, enunciemos los resultados duales que tenemos por el caso cilíndrico.

Lema 2.18. Si X es fibrante, entonces $\stackrel{r}{\sim}$ es una relación de equivalencia en $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X)$.

Como antes, denotamos $\pi^r(A, X)$ como el conjunto de clases de equivalencia en $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X)$ bajo la relación generada por $\stackrel{r}{\sim}$.

Lema 2.19. Si $f \stackrel{r}{\sim} g : A \rightarrow X$ y $h : A' \rightarrow A$ es un morfismo cualquiera, entonces $fh \stackrel{r}{\sim} gh$.

Lema 2.20. Si A es cofibrante, $f \stackrel{r}{\sim} g : A \rightarrow X$ y $h : X \rightarrow Y$ es un morfismo cualquiera, entonces $hf \stackrel{r}{\sim} hg$.

Lema 2.21. Si A es cofibrante, entonces la composición en \mathbf{C} induce una aplicación $\pi^r(A, X) \times \pi^r(X, Y) \rightarrow \pi^r(A, Y)$, dado por $([h], [f]) \rightsquigarrow [fh]$

Lema 2.22. Si X es fibrante e $i : A \rightarrow B$ es cofibración acíclica, entonces la composición con i induce una biyección $i_* : \pi^r(B, X) \rightarrow \pi^r(A, X)$.

Las demostraciones para el caso de la homotopía a derecha se pueden encontrar en [Car07].

2.3.4 Relación entre las homotopías a derecha y a izquierda

Hemos visto que las relaciones $\overset{l}{\sim}$ y $\overset{r}{\sim}$ se comportan mejor cuando A es cofibrante y cuando X es fibrante. Esto se ve reflejado en el siguiente resultado:

Lema 2.23. Sean $f, g : A \rightarrow X$ morfismos en \mathbf{C} .

- (i) Si A es cofibrante y $f \overset{l}{\sim} g$, entonces $f \overset{r}{\sim} g$.
- (ii) Si X es fibrante y $f \overset{r}{\sim} g$, entonces $f \overset{l}{\sim} g$.

Demostración. Dado que probando cualquiera de ellos tenemos el otro por dualidad, probamos el primero.

Nuestra hipótesis es que existe una homotopía $H : A \wedge I \rightarrow X$ de f a g . El lema ref nos permite suponer que $A \wedge I$ es bueno, y, unido a que A es cofibrante, podemos aplicar el lema ref para deducir que i_0 es cofibración acíclica.

Ahora sea X^I un buen objeto de caminos para X . Tenemos entonces una factorización $(id_X, id_X) : X \xrightarrow{q} X^I \xrightarrow{(p_0, p_1)} X \times X$ en la que $p = (p_0, p_1)$ es una fibración. Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{qf} & X^I \\ i_0 \downarrow & & \downarrow (p_0, p_1) \\ A \wedge I & \xrightarrow{(fj, H)} & X \times X \end{array}$$

El diagrama es conmutativo porque $ji_0 = Id_A$ y $p_0q = p_1q = Id_{X^I}$. Por **MC4(ii)** existe un levantamiento $K : A \wedge I \rightarrow X^I$. Se comprueba directamente que Ki_1 es una homotopía a derecha entre f y g , ya que $Ki_1p = (fj_1, Hi_1) = (f, g)$. \square

En consecuencia, si A es cofibrante y X es fibrante podemos denotar \sim a la relación "ser homótopas". El conjunto de clases de equivalencia respecto a esta relación se denota $\pi(A, X)$.

Nota. Supongamos que A es cofibrante, X es fibrante, $A \wedge I$ es un buen objeto cilíndrico para A y X^I es un buen objeto de caminos para X , ambos fijos. Por la prueba anterior, se tiene, dadas $f, g : A \rightarrow X$, que $f \sim g$ si y sólo si $f \overset{l}{\sim} g$ vía $A \wedge I$, y si y sólo si $f \overset{r}{\sim} g$ vía X^I .

Con todo esto, conseguimos un lema fundamental que nos caracteriza las equivalencias débiles como equivalencias homotópicas, que era lo que buscábamos en un principio.

Lema 2.24. Supongamos que $f : A \rightarrow X$ es un morfismo en \mathbf{C} entre A y X , ambos fibrantes y cofibrantes. Entonces f es equivalencia débil si y sólo si f tiene inversa homotópica.

Demostración. \Rightarrow : Supongamos que f es una equivalencia débil. Por **MC5** y **MC2**, podemos factorizar f como

$$A \xrightarrow[\sim]{q} C \xrightarrow[\sim]{p} X$$

en donde q es una cofibración y p una fibración acíclica (notemos que como A y X son fibrantes y cofibrantes, también lo es C). Como A es fibrante y cofibrante, tenemos por **MC4** un levantamiento r en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id_A} & A \\ q \downarrow \sim & \nearrow r & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\quad} & * \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos $rq = id_A$.

Por otro lado, por el lema 2.22, la composición con q induce una biyección $q_* : \pi^r(C, C) \rightarrow \pi^r(A, X)$ dada por $[g] \rightsquigarrow [gq]$. Ahora, como $q^*([qr]) = [q] = q^*([id_C])$, y q^* es biyectiva, entonces $qr \sim id_C$ (recordemos que las relaciones de equivalencia coinciden). En consecuencia r es inversa homótopa de q .

De manera dual, se obtiene una inversa homotópica de p , pongamos $s : X \rightarrow C$. E inmediatamente, tenemos que $g = rs$ es inversa homotópica de f .

⇐: Supongamos que f tiene inversa homotópica. Factorizamos f por **MC5** de la forma

en donde, igual que antes, q es cofibración acíclica y p es fibración. Por **MC2**, basta probar que p es acíclica.

Sea $g : X \rightarrow A$ una inversa homótopa de f y sea $H : X \wedge I \rightarrow X$ una buena homotopía entre fg e id_X . Por **MC4**, y como la inclusión $i_0 : X \rightarrow X \wedge I$ es cofibración acíclica (Lema 2.11), tenemos un levantamiento en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{qg} & C \\ i_0 \downarrow \sim & \nearrow H' & \downarrow p \\ X \wedge I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Podemos definir $s : H'i_1$, y tenemos que

- Por la conmutatividad en la parte de abajo del diagrama, $ps = id_X$.
- Por la conmutatividad en la parte de arriba H' es una homotopía entre s y qg . Como q es equivalencia débil, tiene inversa homotópica por la primera parte de la demostración de este lema, pongamos r . Además, como $pq = f$, entonces $p \sim fr$. Finalmente, como sabemos que la aplicación inducida por la composición en π está bien definida y sólo depende de las clases de equivalencia (Lemas 2.16 y 2.21), entonces tenemos

$$sp \sim qgp \sim qgfr \sim qr \sim id_C$$

En consecuencia, sp e id_C son homotópicamente equivalentes, así que sp es equivalencia débil. Finalmente, por el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{id_C} & C & \xrightarrow{id_C} & C \\ p \downarrow & & sp \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

p es retracts de sp y por lo tanto p es equivalencia débil.

□

2.4 Categoría de homotopía

El objetivo ahora va a ser construir la categoría de homotopía, $\text{Ho}(\mathbf{C})$, asociada a una categoría de modelos.

Notación. Sea \mathbf{C} una categoría de modelos.

- \mathbf{C}_c es la subcategoría plena de \mathbf{C} generada por los objetos cofibrantes.
- \mathbf{C}_f es la subcategoría plena de \mathbf{C} generada por los objetos fibrantes.
- \mathbf{C}_{cf} es la subcategoría plena de \mathbf{C} generada por los objetos que son fibrantes y cofibrantes.

- $\pi\mathbf{C}_c$ es la subcategoría de \mathbf{C} generada por los objetos cofibrantes y cuyos morfismos son las clases de homotopía a derecha.
- $\pi\mathbf{C}_f$ es la subcategoría de \mathbf{C} generada por los objetos fibrantes y cuyos morfismos son las clases de homotopía a izquierda.
- $\pi\mathbf{C}_{cf}$ es la subcategoría de \mathbf{C} generada por los objetos que son fibrantes y cofibrantes y cuyos morfismos son las clases de homotopía.

Sea X un objeto de \mathbf{C} . Por **MC5(i)** podemos factorizar la aplicación $\emptyset \rightarrow X$ como

$$\emptyset \longrightarrow QX \xrightarrow{p_X} X$$

en donde p_X es fibración acíclica y QX es cofibrante. Análogamente, factorizamos $X \rightarrow *$.

$$X \xrightarrow{i_X} RX \longrightarrow *$$

donde i_X es cofibración acíclica y RX es fibrante. Si X es cofibrante o fibrante, entonces ponemos $QX = X$ o $RX = X$ respectivamente. QX se denomina **reemplazamiento cofibrante** y RX **reemplazamiento fibrante**.

Esto es interesante porque, tal y como hemos visto antes, hemos podido unificar las dos relaciones a izquierda y a derecha cuando nuestros objetos A y X eran fibrantes y cofibrantes. Veamos qué ocurre con los morfismos entre dos objetos X e Y al pasar a QX y QY .

Lema 2.25. Dada una aplicación $f : X \rightarrow Y$ en \mathbf{C} , existe una aplicación $\tilde{f} : QX \rightarrow QY$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} QX & \xrightarrow{\tilde{f}} & QY \\ p_X \downarrow \sim & & p_Y \downarrow \sim \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

La aplicación \tilde{f} está unívocamente determinada por f salvo homotopía a derecha o a izquierda, y es equivalencia débil si y sólo si lo es f . Si además Y es fibrante, entonces \tilde{f} queda determinada por la clase de homotopía de f salvo homotopía a izquierda o a derecha.

Demostración. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & QY \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p_Y \sim \\ QX & \xrightarrow{fp_X} & Y \end{array}$$

Por **MC4**, existe un levantamiento de este diagrama, el cual podemos tomar como \tilde{f} . Como p_X es fibración acíclica, el Lema 2.17 nos dice que la composición con p_Y induce una biyección entre los grupos de homotopía a izquierda. Esto quiere decir que si hay una \tilde{g} que cumple $[p_Y \tilde{g}]_l = [p_Y \tilde{f}]_l$, entonces $[\tilde{f}]_l = [\tilde{g}]_l$. Esto nos da la unicidad a izquierda. Por otro lado, como QX , podemos aplicar el Lema 2.23(i) para deducir que en ese caso, también ha de ser $[\tilde{f}]_r = [\tilde{g}]_r$. Por **MC2**, como $fp_X = p_Y \tilde{f}$, \tilde{f} es equivalencia débil si y sólo si lo es f . Finalmente, si Y es fibrante, podemos aplicar el Lema 2.15, y tenemos que la composición induce una aplicación $\pi^l(QX, QY) \times \pi^l(QY, Y) \rightarrow \pi^l(QX, Y)$. Equivalentemente, lo tenemos también para el otro camino del diagrama conmutativo, $\pi^l(QX, X) \times \pi^l(X, Y) \rightarrow \pi^l(QX, Y)$.

Esto nos permite poner $[f]_l [p_X]_l = [p_Y]_l [\tilde{f}]_l$. Esto nos proporciona la unicidad determinada únicamente por la clase de homotopía de f . \square

Utilizando este lema, podemos definir un funtor $Q : \mathbf{C} \rightarrow \pi\mathbf{C}_c$. En efecto, si $f = id_X$, entonces \tilde{f} es homótopa a derecha a la identidad. Por otro lado, si consideramos $h : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, entonces \tilde{h} es homótopa a derecha a $\tilde{g}\tilde{f}$. En consecuencia, si definimos Q por $X \rightsquigarrow QX$ y $f \rightsquigarrow [\tilde{f}]_r$, entonces está bien definido y es un funtor.

De manera dual, tenemos el siguiente lema:

Lema 2.26. Dada $f : X \rightarrow Y$, existe una aplicación $\bar{f} : RX \rightarrow RY$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_X \downarrow \sim & & i_Y \downarrow \sim \\ RX & \xrightarrow{\bar{f}} & RY. \end{array}$$

Además, \bar{f} está unívocamente determinada por f salvo homotopía a derecha o a izquierda, y es equivalencia débil si y sólo si lo es f . Finalmente, si X es cofibrante, entonces \bar{f} está unívocamente determinado salvo homotopía a derecha o a izquierda por la clase de homotopía de f .

Esto nos permite considerar un funtor $R : \mathbf{C} \rightarrow \pi\mathbf{C}_f$, definido por $X \rightsquigarrow RX$, $f \rightsquigarrow [\tilde{f}]_l$.

Ahora, a la vista del desarrollo del capítulo 4, nos interesaría aplicar R tras Q o viceversa, para considerar morfismos definidos entre objetos fibrantes y cofibrantes, y por lo tanto considerando la relación de homotopía independiente de la relación a derecha o a izquierda.

Lema 2.27. La restricción de Q a \mathbf{C}_f induce un funtor $Q' : \pi\mathbf{C}_f \rightarrow \pi\mathbf{C}_{cf}$. La restricción de R a \mathbf{C}_c induce un funtor $R' : \pi\mathbf{C}_c \rightarrow \pi\mathbf{C}_{cf}$.

Demostración. [DS95], lema 5.5. \square

Definición 2.28. Se define la categoría de homotopía $\text{Ho}(\mathbf{C})$ de una categoría de modelos \mathbf{C} como la categoría con los mismos objetos de \mathbf{C} y con los morfismos $\text{Hom}_{\pi\mathbf{C}_{cf}}(R'QX, R'QY) = \pi(RQX, RQY)$

Por consiguiente, tenemos un funtor $\gamma : \mathbf{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathbf{C})$ que es la identidad en los objetos y que a cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ le asocia la aplicación $RQ(f) : RQ(X) \rightarrow RQ(Y)$.

Proposición 2.29. Si f es un morfismo de \mathbf{C} , entonces $\gamma(f)$ es un isomorfismo en $\text{Ho}(\mathbf{C})$ si y sólo si f es equivalencia débil.

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia débil en \mathbf{C} . Aplicamos de manera sucesiva los funtores Q y R , obteniendo $f' := R'Q(f)$. Éste es un morfismo en $\pi\mathbf{C}_{cf}$, y es una equivalencia débil por los Lemas 2.25 y 2.26. Por construcción, $\gamma(f)$ es la clase de f' en $\pi(RQ(X), RQ(Y))$. Por la Proposición 2.24, f' tiene inversa homotópica. Por lo tanto, $\gamma(f)$ es un isomorfismo en $\text{Ho}(\mathbf{C})$. Recíprocamente, si $\gamma(f)$ es un isomorfismo, entonces f' tiene inversa homótota. Por la Proposición 2.24, f' es equivalencia débil, y por lo tanto también lo es f . \square

Si X e Y son ambos cofibrantes, entonces el conjunto de morfismos de $\text{Ho}(\mathbf{C})$ es precisamente $\pi(X, Y)$, y $\gamma : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{C})}(X, Y)$ es sobreyectiva. Sin embargo, si X o Y no son fibrantes y cofibrantes, entonces no sabemos cómo son los morfismos de $\text{Ho}(\mathbf{C})$.

Proposición 2.30. Los morfismos de $\text{Ho}(\mathbf{C})$ están generados, mediante la composición, por las imágenes de los morfismos de \mathbf{C} y por inversas de imágenes por γ de equivalencias débiles en \mathbf{C} .

Demostración. Consideremos una aplicación $f : X \rightarrow Y$ en $\text{Ho}(\mathbf{C})$. Para X (e igual para Y), podemos considerar el objeto RQX , para el que tenemos los morfismos

$$X \xleftarrow{p_X} QX \xrightarrow{i_{QX}} RQX.$$

Tanto p_X como i_{QX} son equivalencias débiles. Por lo tanto, $\gamma(i_{QX})\gamma(p_X)^{-1} : X \rightarrow RQX$ es un isomorfismo en $\text{Ho}(\mathbf{C})$.

Por otro lado, como RQX y RQY son fibrantes y cofibrantes, tenemos el epimorfismo

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(RQX, RQY) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{C})}(RQX, RQY)$$

dado por γ . Esto significa que existe $f' : RQX \rightarrow RQY$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \gamma(i_{QX})\gamma(p_X)^{-1} \downarrow & & \uparrow \gamma(p_Y)\gamma(i_{QY})^{-1} \\ RQX & \xrightarrow{f'} & RQY. \end{array}$$

Como las aplicaciones laterales son isomorfismos en $\text{Ho}(\mathbf{C})$, podemos despejar f y hemos terminado. \square

Ahora cabe preguntarse cómo actúa γ sobre las homotopías. Para ello, probamos el siguiente lema:

Lema 2.31. Sea \mathbf{C} una categoría de modelos, y sea $\alpha : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un funtor que lleva equivalencias débiles en \mathbf{C} a isomorfismos en \mathbf{D} . Si $f \stackrel{l}{\sim} g$ o $f \stackrel{r}{\sim} g$, siendo $f, g : A \rightarrow X$, entonces $\alpha(f) = \alpha(g)$ en \mathbf{D} .

Demostración. Supongamos que $f \stackrel{l}{\sim} g$. Por el Lema 2.12, existe una buena homotopía a izquierda, $H : A \wedge I \rightarrow X$, con un buen objeto cilíndrico para A . Esto es, en la factorización de $id_A + id_A$

$$A \amalg A \xrightarrow{i} A \wedge I \xrightarrow{\sim} A,$$

$i = i_0 + i_1$ es una cofibración acíclica.

Tenemos entonces $w i_0 = w i_1 = id_A$, así que $\alpha(w)\alpha(i_0) = \alpha(w)\alpha(i_1)$. Como w es equivalencia débil, $\alpha(w)$ es isomorfismo. Por lo tanto $\alpha(i_0) = \alpha(i_1)$. En consecuencia, $\alpha(f) = \alpha(H)\alpha(i_0) = \alpha(H)\alpha(i_1) = \alpha(g)$. \square

Por la Proposición 2.29, γ cumple las hipótesis del lema anterior, y por tanto dos aplicaciones homótopas tienen la misma imagen por γ .

Finalmente, tenemos este resultado sobre cómo actúa γ cuando A es cofibrante (no necesariamente fibrante) y X es fibrante (no necesariamente cofibrante).

Proposición 2.32. Supongamos que A es cofibrante y X es fibrante. Entonces la aplicación $\gamma : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{C})}(A, X)$ es sobreyectiva e induce una biyección $\pi(A, X) \cong \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{C})}(A, X)$.

Demostración. Acabamos de ver que dos aplicaciones homótopas tienen la misma imagen por γ . Por lo tanto, podemos pasar al cociente por la relación de equivalencia, y considerar $\gamma : \pi(A, X) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{C})}(A, X)$. Por otro lado, dado un morfismo $f : RA \rightarrow QX$, podemos pasar a otro de A en X utilizando las aplicaciones i_A y p_X , que son equivalencias débiles. La composición de estas aplicaciones está bien definida para π por los Lemas 2.25 y 2.26, y conmuta con γ porque es un funtor. Por lo tanto, disponemos del siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
\pi(RA, QX) & \longrightarrow & \pi(A, X) \\
\gamma \downarrow & & \uparrow \gamma \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathbf{C})}(A, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathbf{C})}(A, X).
\end{array}$$

- La aplicación de γ en la parte izquierda es una biyección por definición.
- Los Lemas 2.17 y 2.22 nos dicen que la precomposición y postcomposición para los casos A cofibrante y X fibrante inducen biyecciones en el conjunto de clases por homotopía. Por lo tanto, la flecha superior es una biyección.
- La flecha inferior consiste en la precomposición y postcomposición con $\gamma(i_A)$ y $\gamma(p_X)$. Por la Proposición 2.29, son isomorfismos, así que la flecha inferior es biyectiva.

Esto nos da la biyección que buscábamos en la parte derecha del diagrama. \square

2.5 Observaciones

2.5.1 Sobredeterminación de los axiomas de las categorías de modelos

Notemos primero que las clases de aplicaciones de una categoría de modelos presentan restricciones entre sí. Más concretamente, tenemos la siguiente proposición

Proposición 2.33. *Sea \mathbf{C} una categoría de modelos.*

- (i) *Las cofibraciones en \mathbf{C} son las aplicaciones que tienen la LLP respecto a las fibraciones acíclicas.*
- (ii) *Las cofibraciones acíclicas en \mathbf{C} son las aplicaciones que tienen la LLP respecto a las fibraciones.*
- (iii) *Las fibraciones en \mathbf{C} son las aplicaciones que tienen la RLP respecto a las cofibraciones acíclicas.*
- (iv) *Las fibraciones acíclicas en \mathbf{C} son las aplicaciones que tienen la RLP respecto a las cofibraciones.*

Demostración. Por **MC4**, sabemos que las fibraciones y las cofibraciones (acíclicas) tienen las propiedades de levantamiento requeridas. Por lo tanto, hemos de probar el recíproco de cada caso.

Sea $f : X \rightarrow Y$ que cumple la LLP respecto a todas las fibraciones acíclicas. Utilizando **MC5** podemos poner

$$(i) \quad X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow[\sim]{p} Y$$

donde i es una cofibración y p es fibración acíclica. Por hipótesis, tenemos un levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{i} & Z \\
f \downarrow & \nearrow l & \downarrow p \sim \\
Y & \xrightarrow{id} & Y.
\end{array}$$

En otras palabras,

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{id} & X & \xrightarrow{id} & X \\
f \downarrow & & i \downarrow & & \downarrow f \\
Y & \xrightarrow{l} & Z & \xrightarrow{p} & Y
\end{array}$$

por lo que f es un retracto de i y, por **MC3**, f es cofibración.

(ii) En este caso, factorizamos f de la forma

$$X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow[\sim]{p} Y$$

donde i es una cofibración acíclica y p es fibración. Siguiendo el mismo razonamiento, se deduce que f es retracto de i y por lo tanto es cofibración acíclica.

(iii) y (iv) se siguen por dualidad. □

Esta proposición tiene como consecuencia que, una vez determinadas las equivalencias débiles y las cofibraciones (o las fibraciones), la clase restante está sujeta a esta proposición.

2.5.2 El argumento del objeto pequeño.

A la vista de **MC5**, vamos a necesitar construir factorizaciones de los morfismos en nuestras categorías de modelos. El procedimiento que utilizaremos es llamado **argumento del objeto pequeño**, que fue desarrollado por Quillen en [Qui06].

Partimos de una categoría \mathbf{C} en la que todos los colímites pequeños existen y tenemos un functor $B : \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{C}$ y un objeto A de \mathbf{C} . Por un lado, podemos tomar el colímite de B .

$$\begin{array}{ccccccc} B_0 & \xrightarrow{j_{01}} & B_1 & \xrightarrow{j_{12}} & B_2 & \xrightarrow{j_{23}} & \dots \\ & \searrow j_1 & & \searrow j_2 & \downarrow j_3 & & \\ & & & & \text{colim} B & & \end{array}$$

Denotaremos $j_{kl} = j_{l-1,l} \cdots j_{k,k+1} : B_k \rightarrow B_l$. Ahora aplicamos el functor $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, _)$, y obtenemos el siguiente diagrama componiendo con los $j_{k,k+1}$ y los j_k .

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B_1) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B_2) & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & & \searrow & \downarrow & & \\ & & & & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, \text{colim} B) & & \end{array}$$

Por otro lado, podemos hacer el colímite de $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$, esto es, de las flechas horizontales del anterior diagrama. Éste es un colímite en **Set**, es decir, es la unión disjunta para todos los $k \in \mathbb{N}$ de los morfismos $A \rightarrow B_k$, bajo la relación de equivalencia dada por el diagrama (esto es, dos morfismos $A \rightarrow B_k$ y $A \rightarrow B_l$ con $k < l$ están en la misma clase si obtenemos el segundo al componer j_{kl} con el primero).

Por la propiedad universal del colímite, tenemos el morfismo

$$\text{colim}_n \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B(n)) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, \text{colim}_n B_n) \quad (2.1)$$

que se obtiene, para cada $A \rightarrow B_k$ en $\text{colim}_n \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B_n)$, componiendo con $B_k \rightarrow \text{colim} B$.

Definición 2.34. Un objeto A de \mathbf{C} se dice **secuencialmente pequeño** si para cualquier functor $B : \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{C}$, (2.1) es una biyección.

Esta biyección tendría como consecuencia que dado un morfismo $f : A \rightarrow \text{colim} B$, existe un único elemento en $\text{colim}_n \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B_n)$, o sea un $k \in \mathbb{N}$ y un morfismo $g : A \rightarrow B_k$, tal que $f = g \circ j_k$.

Sea ahora un conjunto $\mathcal{F} := \{f_i : A_i \rightarrow B_i\}_{i \in I}$ de aplicaciones en \mathbf{C} . Nuestro problema inicial es, dada una aplicación $p : X \rightarrow Y$, factorizarla de la forma $X \rightarrow X' \rightarrow Y$ de manera que

- $X' \rightarrow Y$ tenga la propiedad del levantamiento a derechas respecto a cualquier aplicación de \mathcal{F} .

- X' sea tan parecido a X como sea posible.

Para ello, definimos $S(i)$ como el conjunto de pares de funciones (g, h) para las que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A_i & \xrightarrow{g} & X \\
 f_i \downarrow \sim & & \downarrow p \\
 B_i & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array} \tag{2.2}$$

Se define la **construcción de pegado** $G^1(\mathcal{F}, p)$ como el colímite (pushout) del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{i \in I} \coprod_{(g,h) \in S(i)} A_i & \xrightarrow{+i + (g,h) g} & X \\
 \downarrow +i + (g,h) f_i & & \downarrow i_1 \\
 \coprod_{i \in I} \coprod_{(g,h) \in S(i)} B_i & \xrightarrow{h_1} & G^1(\mathcal{F}, p) \\
 & \searrow +i + (g,h) h & \downarrow p_1 \\
 & & Y
 \end{array}$$

p

Las sumas del diagrama son las sumas categóricas que da el coproducto. Estamos pegando una copia de B_i a X a lo largo de A_i para cada diagrama conmutativo (asociado a cada f_i y cada par (f, g)). Por la propiedad universal del colímite, la aplicación i_1 nos sirve para factorizar p a través de $G^1(\mathcal{F}, p)$. Esto es, existe p_1 como en el diagrama tal que $p_1 i_1 = p$. Por otro lado, para cada diagrama (2.2) (esto es, para cada (g, h) y cada i), tenemos una factorización de h a través de $G^1(\mathcal{F}, p)$, simplemente tomando h_1 en B_i .

A continuación, definimos iterativamente $G^{k+1}(\mathcal{F}, p) := G^1(\mathcal{F}, p_k)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{i \in I} \coprod_{(g,h) \in S(i)} A_i & \xrightarrow{+i + (g,h) g} & G^k(\mathcal{F}, p) \\
 \downarrow +i + (g,h) f_i & & \downarrow i_{k+1} \\
 \coprod_{i \in I} \coprod_{(g,h) \in S(i)} B_i & \xrightarrow{h_{k+1}} & G^{k+1}(\mathcal{F}, p) \\
 & \searrow +i + (g,h) h & \downarrow p_{k+1} \\
 & & Y
 \end{array}$$

p_k

(Aquí los pares (g, h) son los que hacen conmutar el diagrama con p_k). Esto nos va proporcionando factorizaciones de cada p_k , de manera que $p_{k+1} i_{k+1} = p_k$. Esto es, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{i_1} & G^1(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{i_2} & G^2(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{i_3} & \dots & \xrightarrow{i_k} & G^k(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{i_{k+1}} & \dots \\
 p \downarrow & & p_1 \downarrow & & p_2 \downarrow & & & & p_k \downarrow & & \\
 Y & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \dots
 \end{array} \tag{2.3}$$

Definimos la **construcción del pegado universal** $G^\infty(\mathcal{F}, p)$ como el colímite de la fila superior del anterior diagrama. Por construcción, existen aplicaciones $i_\infty : X \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, p)$ y $p_\infty : G^\infty(\mathcal{F}, p) \rightarrow Y$ tales que $p_\infty i_\infty = p$.

Lema 2.35. Supongamos que A_i es secuencialmente pequeño para cada $i \in I$. Entonces la aplicación p_∞ tiene la propiedad del levantamiento a derechas con respecto a cada una de las aplicaciones de \mathcal{F} .

Demostración. Tenemos que encontrar un levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{g} & G^\infty(\mathcal{F}, p) \\ f_i \downarrow \sim & & \downarrow p_\infty \\ B_i & \xrightarrow{h} & Y \end{array} \quad (2.4)$$

para cualquier $i \in I$. Como A_i es secuencialmente pequeño, podemos hacer uso de la biyección (2.1), y afirmar que existe un $k \in \mathbb{N}$ para el que podemos factorizar g como

$$g : A_i \xrightarrow{g'} G^k(\mathcal{F}, p) \longrightarrow G^\infty(\mathcal{F}, p)$$

Utilizando esta factorización y la construcción del diagrama (2.3), transformamos (2.4) en

$$\begin{array}{ccccccc} A_i & \xrightarrow{g'} & G^k(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{i_{k+1}} & G^{k+1}(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & G^\infty(\mathcal{F}, p) \\ p \downarrow & & p_k \downarrow & & p_{k+1} \downarrow & & p_\infty \downarrow \\ B_i & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

por construcción, el par (g', h) hace conmutativo el cuadro de la izquierda del diagrama, y por lo tanto forma parte de los pares que habíamos utilizado para construir $G^{k+1}(\mathcal{F}, p)$. Esto significa, siguiendo los razonamientos anteriores, que podemos encontrar una factorización de h a través de $G^{k+1}(\mathcal{F}, p)$. Pero esto no es otra cosa que una aplicación $B_i \rightarrow G^{k+1}(\mathcal{F}, p)$ que hace el diagrama anterior conmutativo. Aplicando a continuación $G^{k+1}(\mathcal{F}, p) \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, p)$ obtenemos el levantamiento que buscábamos. \square

2.5.3 Categorías de modelos cofibrantemente generadas

A la vista de las dos observaciones anteriores, vale la pena comentar las categorías de modelos cofibrantemente generadas. Para introducirlas, hacemos las siguientes definiciones, siempre dentro de una categoría de modelos \mathbf{C} . No hemos profundizado en su estudio, y hemos omitido algunos detalles que se pueden consultar en [Hov07], sección 2.1.3.

Definición 2.36. Sea I un conjunto de morfismos en \mathbf{C} .

- I -**inj** es el conjunto de morfismos que tienen la RLP respecto de I . Se denominan I -**inyectivos**.
- I -**proj** es el conjunto de morfismos que tienen la LLP respecto de I . Se denominan I -**proyectivos**.
- I -**cof** es el conjunto $(I$ -inj)-proj.
- I -**inj** es el conjunto $(I$ -proj)-inj.

Por la Proposición 2.33, tenemos que si I es la clase de cofibraciones, entonces I -inj son las fibraciones acíclicas e I -cof= I .

Definición 2.37. Sea I una clase de morfismos en \mathbf{C} . Un I -**complejo relativo** es, dado un objeto X , una composición transfinita de pushouts de elementos de I . a partir de X . Llamamos I -cell al conjunto de I -complejos relativos.

La construcción que hemos hecho en el argumento del objeto pequeño es un complejo relativo a la familia escogida \mathcal{F} . Como el nombre y el proceso indican, es una generalización de los CW-complejos relativos, permitiendo además composiciones transfinitas y sin un orden dado por la dimensión.

Definición 2.38. Un objeto A de \mathbf{C} se dice relativamente pequeño respecto a I -cell si para cualquier sucesión transfinita y λ un ordinal,

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots$$

tales que la aplicación $X_\beta \longrightarrow X_{\beta+1} \in I$ -cell si $\beta + 1 < \lambda$, entonces el morfismo

$$\text{colím}_{\beta < \lambda} \text{Hom}(A, X_\beta) \longrightarrow \text{Hom}(A, \text{colím}_{\beta < \lambda} X_\beta)$$

es un isomorfismo.

Éste es el mismo isomorfismo que obteníamos en la construcción del argumento del objeto pequeño para los objetos secuencialmente pequeños, solo que entonces lo pedíamos para cualquier functor (no necesariamente complejos relativos) indexado por Z^+ en vez de para cualquier sucesión transfinita de I -complejos relativos. Por otro lado, un ordinal es una generalización de los números naturales en la que no entraremos.

Definición 2.39. Sea \mathbf{C} una categoría de modelos. Decimos que \mathbf{C} está **cofibrantemente generada** si existen conjuntos de morfismos I y J tales que

- (i) Los dominios de los morfismos de I son relativamente pequeños respecto a I -cell.
- (ii) Los dominios de las aplicaciones de J son relativamente pequeños respecto a J -cell.
- (iii) Las fibraciones son los elementos de J -inj.
- (iv) Las fibraciones acíclicas son los elementos de I -inj.

El teorema 2.1.19 en [Hov07] nos permite definir una estructura de modelos en una categoría \mathbf{C} mediante la designación de unos conjuntos I , J y W (siendo éste último el conjunto de equivalencias débiles) cumpliendo una serie de condiciones técnicas.

Por un lado, se puede probar que las cofibraciones y las cofibraciones acíclicas son los elementos de I -cof J -cof. Por eso se dice que I y J son los generadores de las cofibraciones y las cofibraciones acíclicas. Por otro lado, los primeros dos puntos de la definición están estrechamente relacionados con el argumento del objeto pequeño. Finalmente, los dos últimos puntos reflejan lo establecido en la proposición 2.33.

Ejemplo 2.40. Podemos dotar a \mathbf{sSet} de estructura de categoría de modelos cofibrantemente generada. Para ello ponemos

- I como el conjunto de las inclusiones $\delta\Delta^n \longrightarrow \Delta^n$ para $n \geq 0$.
- J como el conjunto de las inclusiones $\Lambda_r^n \longrightarrow \Delta^n$ para $n > 0$ y $0 \leq r \leq n$.
- W como el conjunto de aplicaciones f entre conjuntos simpliciales X cuya realización geométrica $|f|$ es una equivalencia débil de espacios topológicos.

La demostración se puede consultar en el capítulo 3 de [Hov07].

Las dos estructuras de modelos con las que trabajaremos, en \mathbf{Top} y en \mathbf{Ch}_R , son cofibrantemente generadas. La construcción de los conjuntos anteriormente mencionados y la demostración se puede ver en [Hov07]. Nosotros no lo probaremos directamente, pero veremos que podemos utilizar (y utilizaremos) el argumento del objeto pequeño para encontrar las factorizaciones.

2.5.4 Localización

En la primera observación vimos que podíamos “prescindir” de una de las tres clases a la hora de definir las categorías de modelos. Ahora vamos a ver que, en cierto sentido, la clase realmente imprescindible son las equivalencias débiles.

Definición 2.41. Sea \mathbf{C} una categoría, y sea W un subconjunto de morfismos de \mathbf{C} . Un funtor $\alpha : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ se denomina **localización de \mathbf{C} respecto de W** si

- $\alpha(f)$ es un isomorfismo para cada $f \in W$.
- Si $\beta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}'$ es un funtor que lleva los elementos de W en isomorfismos, entonces existe un único funtor $\beta' : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$ tal que $\beta'\alpha = \beta$.

Por la segunda condición, tenemos que la localización es única salvo isomorfismo. La denotamos por $\mathbf{C} \rightarrow W^{-1}\mathbf{C}$.

Teorema 2.42. Sean \mathbf{C} una categoría de modelos y W la clase de equivalencias débiles. Entonces el funtor $\gamma : \mathbf{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathbf{C})$ es una localización de \mathbf{C} respecto a W .

Demostración. La primera condición la tenemos por la proposición 2.29. En cuanto a la segunda, supongamos que tenemos un funtor $\beta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ que lleva equivalencias débiles en isomorfismos. Vamos a definir un funtor $\beta' : \text{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$ tal que $\beta'\gamma = \beta$.

- En los objetos, lo definimos igual que β , puesto que γ no los altera.
- Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en $\text{Ho}(\mathbf{C})$, por tanto una aplicación $f' : RQ(X) \rightarrow RQ(Y)$ definida salvo homotopía. Por el Lema 2.31, la imagen de un morfismo en \mathbf{C} por β depende únicamente de su clase de homotopía. En consecuencia, $\beta(f')$ está bien definido y podemos definir

$$\beta'(f) := \beta(p_Y)\beta(i_{Q_Y})^{-1}\beta(f')\beta(i_{Q_X})\beta(p_X)^{-1}.$$

Así definido, β' es un funtor. En efecto, las aplicaciones i y p son equivalencias débiles, así que $\beta'(id) = id$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \beta'(gf) &= \beta(p_Y)\beta(i_{Q_Y})^{-1}\beta(g')\beta(f')\beta(i_{Q_X})\beta(p_X)^{-1} = \\ &= \beta(p_Y)\beta(i_{Q_Y})^{-1}\beta(g')\beta(i_{Q_Z})\beta(p_Z)^{-1}\beta(p_Z)\beta(i_{Q_Z})^{-1}\beta(f')\beta(i_{Q_X})\beta(p_X)^{-1} = \\ &= \beta'(g)\beta'(f). \end{aligned}$$

Sea $f = \gamma(h)$. Siguiendo los Lemas 2.25 y 2.26, podemos encontrar un diagrama conmutativo de la forma:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{p_X} & Q(X) & \xrightarrow{i_{Q_X}} & RQ(X) \\ \downarrow h & & \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{p_Y} & Q(Y) & \xrightarrow{i_{Q_Y}} & RQ(Y) \end{array}$$

Aplicando β , tenemos que $\beta'(f) = \beta'(\gamma(h)) = \beta(h)$. Además, como β' está bien definido para las imágenes de γ (incluidas las inversas homótopas de las equivalencias débiles), entonces por la Proposición 2.31 y por lo que acabamos de ver, se tiene la unicidad de β' .

□

Como consecuencia inmediata, tenemos que el orden de aplicación de los funtores R y Q de la sección anterior no es relevante.

2.5.5 Equivalencias de categorías de modelos. Adjunciones de Quillen

Finalmente, cabe preguntarse si, dadas dos estructuras de modelos, podemos establecer algún tipo de relación entre ellas, o decir de alguna manera que son equivalentes. En respuesta a esa pregunta tenemos las adjunciones de Quillen. Para definir las, necesitamos introducir los funtores derivados y derivados totales en las categorías de modelos. Seguimos la novena sección de [DS95].

Definición 2.43. Sea \mathbf{C} una categoría de modelos, y sea $\alpha : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un funtor. Consideramos los pares (β, η) tales que $\beta : \text{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$ es un funtor y $\eta : \beta\gamma \rightarrow \alpha$ es una transformación natural.

Un **funtor derivado a izquierda** para F es un par $(L\alpha, \tau)$ de entre los anteriores tal que para cualquier otro (β, η) existe una transformación natural $\eta' : \beta \rightarrow L\alpha$ cumpliendo que la composición

$$\beta\gamma \xrightarrow{\eta'\gamma} (L\alpha)\gamma \xrightarrow{\tau} \alpha$$

es la transformación natural η .

Por el otro lado, un **funtor derivado a izquierda** para F es un par $(R\alpha, \tau)$ de funtor $\text{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$ y transformación natural $\alpha \rightarrow (R\alpha)\gamma$ de manera que para cualquier otro par (β, η) de ese tipo, la composición

$$\alpha \xrightarrow{\tau} (R\alpha)\gamma \xrightarrow{\eta'\gamma} \beta\gamma$$

es la transformación natural η .

Esta definición convierte a $R\alpha$ y $L\alpha$ en las mejores extensiones de α en a la categoría de homotopía. Además, como están definidos mediante una propiedad universal, son únicos salvo equivalencia natural.

Definición 2.44. Sea $\alpha : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un funtor entre categorías de modelos. Un **funtor derivado total a izquierda** de α es un funtor $\mathbf{L}\alpha : \text{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathbf{D})$ que es el derivado a izquierda de la composición $\gamma_D\alpha : \mathbf{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathbf{D})$.

Un **funtor derivado total a derecha** de α es un funtor $\mathbf{R}\alpha : \text{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathbf{D})$ que es el funtor derivado a derecha de la composición $\gamma_D\alpha$.

Con esto, sumado a las adjunciones que introdujimos en los preliminares, podemos definir las herramientas que nos permiten comparar categorías de modelos.

Definición 2.45. Sean \mathbf{C} y \mathbf{D} dos categorías de modelos. Una **adjunción de Quillen** es un par adjunto de funtores $\alpha : \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{D} : \beta$ tal que α preserva las cofibraciones y β preserva las fibraciones.

Una **equivalencia de Quillen** es una adjunción de Quillen para la que los funtores derivados totales forman un par adjunto $\mathbf{L}\alpha : \text{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathbf{D}) : \mathbf{R}\beta$ que es una equivalencia de categorías.

Por lo tanto, es interesante estudiar cuando dos categorías tienen estructuras equivalentes. Por ejemplo, en [DS95] podemos encontrar el teorema 9.7, que nos da una condición suficiente para que una adjunción de Quillen sea una equivalencia. A saber, que para cada objeto cofibrante A de \mathbf{C} y cada objeto fibrante X de \mathbf{D} , una aplicación $f : A \rightarrow \beta(X)$ sea equivalencia débil si y sólo si lo es su adjunta $f^{ad} : \alpha(A) \rightarrow \beta(X)$ (la aplicación dada por la biyección de la adjunción).

Ejemplo 2.46. La estructura definida en \mathbf{sSet} en el Ejemplo 2.40 y la definida en \mathbf{Top} en el Ejemplo 2.4 son Quillen equivalentes (ver por ejemplo [RN13]).

3 Top como categoría de modelos

El primero de los ejemplos de categorías de modelos que vamos a ver en profundidad es para la categoría **Top**. Esta sección consistirá en probar el siguiente teorema y comparar la categoría de homotopía habitual con la que construimos a partir de la estructura de modelos.

3.1 Enunciado

Teorema 3.1. *Denominamos a un morfismo $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos*

- *equivalencia débil si es equivalencia homotópica débil.*
- *fibración si es una fibración de Serre.*
- *cofibración si posee la propiedad del levantamiento a izquierda respecto a fibraciones acíclicas.*

*Con estas elecciones, **Top** tiene estructura de categoría de modelos.*

Ésta no es la única manera de dotar de estructura de categoría de modelos a **Top**. Por ejemplo, también se cumple el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Denominamos a un morfismo entre espacios topológicos*

- *equivalencia débil si es equivalencia homotópica.*
- *fibración si es una fibración de Hurewicz.*
- *cofibración si es cofibración de Hurewicz cerrada.*

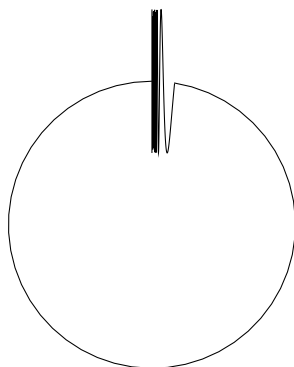
*Con esta elecciones, **Top** tiene estructura de categoría de modelos.*

Demostración. [Str72] □

Podemos explorar una diferencia fundamental entre las dos estructuras si observamos las equivalencias débiles. Consideremos por ejemplo el cuasicírculo Q en \mathbb{R}^2 , el subespacio dado por

$$\{(0, y) : y \in [-1, 1]\} \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right) \right\} \cup C$$

Siendo C una curva que una las otras dos componentes como en el dibujo.



El cuasicírculo tiene todos los grupos de homotopía triviales. Por tanto, la aplicación constante $f : Q \rightarrow *$ es una equivalencia débil para el primer modelo. Sin embargo, Q no es contráctil, así que f no es una equivalencia homotópica y por lo tanto no es equivalencia débil para la segunda estructura. Esto se va a reflejar en la categoría de homotopía resultante. Probaremos que el primer modelo induce en los CW-complejos una categoría de homotopía equivalente a la usual (en el sentido de la Proposición 3.7). Para los espacios que no tienen estructura de CW-complejo, como el cuasicírculo, no es igual por lo que acabamos de ver. En cambio, el segundo induce en todos los espacios topológicos una categoría de

homotopía equivalente a la usual. Esto es sencillamente porque las equivalencias débiles son precisamente las equivalencias homotópicas.

Siguiendo con el enunciado del Teorema 3.1, también podemos notar que para este modelo, todo espacio topológico es débilmente equivalente a un CW complejo. Esto se deduce directamente del teorema de aproximación con CW-complejos (ver por ejemplo [Hat01], proposición 4.13). Por otro lado, notemos que todos los objetos son fibrantes, porque la aplicación $X \rightarrow *$ siempre admite levantamientos para cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \times [0, 1] & \longrightarrow & * \end{array}$$

Por otro lado, los CW-complejos son cofibrantes, por la propia definición de fibración de Serre. De hecho, los objetos cofibrantes son los retracts de CW-complejos relativos (ver [Hov07], Teorema 2.4.19).

3.2 Previo a la prueba

Antes de probar el teorema, enunciamos algunos resultados que nos harán falta en la demostración.

Lema 3.3. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de espacios topológicos. Entonces f es fibración de Serre si y sólo si tiene la RLP con respecto a las inclusiones $D^n \rightarrow D^n \times [0, 1]$.

Demostración. [Hu59], Teorema III.3.1 □

Lema 3.4. Sea $f : X \rightarrow Y$ una morfismo de espacios topológicos. Entonces son equivalentes:

- (i) f es fibración de Serre y equivalencia homotópica débil.
- (ii) f tiene la propiedad del levantamiento a derechas respecto a cualquier inclusión $A \rightarrow B$ tal que (B, A) es un CW-complejo relativo.
- (iii) f tiene la propiedad del levantamiento a derechas respecto a las aplicaciones $j_n : S^{n-1} \rightarrow D^n$.

Demostración. [Car07], Lema 3.2.8. □

Lema 3.5. Supongamos que el siguiente diagrama de espacios topológicos

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots$$

es tal que para cada $n \geq 0$ el espacio X_n es subespacio de X_{n+1} y el par (X_{n+1}, X_n) es un par relativo de CW-complejos. Sea A un CW-complejo finito. Entonces el morfismo

$$\text{colimHom}_{\mathbf{Top}}(A, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(A, \text{colim}X)$$

es biyectivo.

Demostración. Como cada par (X_k, X_{k+1}) es un par CW relativo, podemos afirmar que $\text{colim}X$ también lo es, y que además la composición con las inclusiones de esta secuencia y de los elementos de la secuencia en el colímite no va a alterar la estructura celular.

Sobreyectividad: Sea $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(A, \text{colim}(X))$. Como A es un CW-complejo finito, es compacto, así que $f(A)$ es compacto. Por lo tanto, por el Lema 1.25, lo tenemos contenido en un subcomplejo finito de $\text{colim}(X)$, y por lo tanto en alguno de los X_k . Eso quiere decir que podemos factorizar

$$A \xrightarrow{f_k} X_k \longrightarrow \text{colim}(X)$$

Y f_k es precisamente un morfismo en $\text{colimHom}_{\mathbf{Top}}(A, X)$ cuya imagen es f .

Inyectividad: Sean $f : A \rightarrow X_k$ y $g : A \rightarrow X_l$ en $\text{colimHom}_{\mathbf{Top}}(A, X)$. Podemos suponer $k = l$ simplemente componiendo, por ejemplo si $k < l$, con $X_k \rightarrow X_l$. supongamos que $j_k \circ f = j_k \circ g$. Entonces como A es finito, podemos suponer que la imagen coincide en algún subcomplejo X_n . Por lo tanto, $f = g$. \square

Nota. Este lema nos proporciona una condición más débil que la de ser un objeto secuencialmente pequeño, porque no tenemos el isomorfismo para cualquier funtor. Sin embargo, sí que lo tenemos respecto a las inclusiones de CW-complejos relativos, lo cual va a ser suficiente. Esto nos recuerda a las categorías cofibrantemente generadas, para las cuales teníamos la misma condición.

Finalmente, demostramos este lema, que es uno de los requerimientos del **MC5**, pero que también necesitaremos para otras cosas.

Lema 3.6. Cualquier aplicación $p : X \rightarrow Y$ en **Top** se puede factorizar como una composición $p_\infty i_\infty$, en donde $i_\infty : X \rightarrow X'$ es una equivalencia homotópica débil con la LLP respecto a las fibraciones de Serre y $p_\infty : X' \rightarrow Y$ es fibración de Serre.

Demostración. Sea \mathcal{F} el conjunto de aplicaciones $f_n : \{D^n \times 0 \rightarrow D^n \times [0, 1]\}$. Vamos a utilizar la construcción del pegado universal tal y como se introduce en la sección 2.5.2. Tomamos $S(n)$ como el conjunto de pares de funciones (g, h) que hacen conmutativo el diagrama siguiente (para cada una de las inclusiones f_n):

$$\begin{array}{ccc} D^n \times 0 & \xrightarrow{g} & X \\ f_n \downarrow & & \downarrow p \\ D^n \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & Y. \end{array}$$

Tal y como hacemos en esa construcción, definimos $G^1(\mathcal{F}, p)$ como el pushout del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{n \in \mathbb{N}} \coprod_{(g,h) \in S(n)} D^n \times 0 & \xrightarrow{+n \ +_{(g,h)} g} & X \\ \coprod f_i \downarrow & & \downarrow i_1 \\ \coprod_{n \in \mathbb{N}} \coprod_{(g,h) \in S(n)} D^n \times [0, 1] & \xrightarrow{h_1} & G^1(\mathcal{F}, p). \end{array}$$

Cada g nos da una copia de D^n dentro de X . En esa copia pegamos cada cilindro $D^n \times [0, 1]$ mediante el pushout. En consecuencia, $G^1(\mathcal{F}, p)$ consiste en X junto con todos esos cilindros pegados en las imágenes de los D^n . Por lo tanto, la inclusión i_1 es una inclusión relativa de CW complejos y es equivalencia homotópica débil (pegar cilindros sólidos como lo hemos hecho no altera los grupos de homotopía). Análogamente, tenemos que cada $i_k : G^{k-1}(p, \mathcal{F}) \rightarrow G^k(\mathcal{F}, p)$ es una equivalencia homotópica.

Por otro lado, cualquier fibración de Serre cumple la RLP respecto a i_1 . En efecto, si $q : Z \rightarrow T$ es una fibración de Serre y tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} D^n \times 0 & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{\alpha} & Z \\ f_n \downarrow & & \downarrow i_1 & \dashrightarrow & \downarrow q \\ D^n \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & G^1(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & T \end{array}$$

entonces basta considerar en cada cilindro pegado en $G^1(\mathcal{F}, p)$ el levantamiento l que tenemos desde $D \times [0, 1]$ por la definición de fibración de Serre. Análogamente, cada i_k cumple la LLP respecto a cualquier fibración de Serre.

Ahora consideramos la factorización dada en la sección 2.5.2, a saber,

$$X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{F}, p) \xrightarrow{p_\infty} Y,$$

- i_∞ tiene la LLP con respecto a cualquier fibración de Serre. En efecto, dado el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ i_\infty \downarrow & & \downarrow q \\ G^\infty(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

en el que q es una fibración de Serre cualquiera, podemos considerar para cada k la factorización $i_\infty : X \rightarrow G^k(\mathcal{F}, p) \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, p)$. Como cada i_k cumple la LLP respecto a las fibraciones de Serre, entonces existe un levantamiento $l_k : G^k(\mathcal{F}, p) \rightarrow Z$ para el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ i_k \swarrow & & \downarrow q \\ G^k(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{h} & T \\ & \nearrow l_k & \\ & & G^\infty(\mathcal{F}, p) \end{array}$$

Además por construcción, los levantamientos son compatibles. Esto es, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} G^1(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & G^2(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & G^3(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow G^k(\mathcal{F}, p) \longrightarrow \dots \\ & & & & & & \searrow l_1 \\ & & & & & & G^\infty(\mathcal{F}, p) \\ & & & & & & \nearrow l \\ & & & & & & Z \end{array}$$

Por la propiedad universal del colímite, existe un morfismo $l : G^\infty(\mathcal{F}, p) \rightarrow Z$, que factoriza todos los l_k y que es por tanto el levantamiento buscado.

- i_∞ es equivalencia homotópica débil. Para ver esto, tengamos en cuenta que los grupos de homotopía se construyen mediante aplicaciones de la forma $f : S^n \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, p)$. Por 3.6 tenemos la biyección

$$\text{colímHom}_{\mathbf{Top}}(A, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(A, \text{colím}X).$$

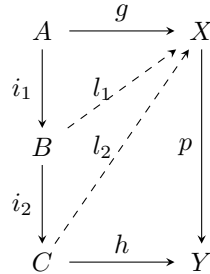
Por lo tanto, la imagen de cualquier f está en algún $G^k(\mathcal{F}, p)$. Y como cada $i_k : X \rightarrow G^k(\mathcal{F}, p)$ es equivalencia homotópica débil, también lo es i_∞ .

- p_∞ es fibración de Serre. Esta demostración es similar a la del Lema 2.35. Aunque no tengamos por hipótesis que los espacios $D^n \times [0, 1]$ sean secuencialmente pequeños, si que tenemos el Lema 3.5, que nos da la misma condición que utilizamos allí para afirmar que p_∞ tiene la RLP respecto de las aplicaciones de \mathcal{F} . Entonces, por el Lema 3.3, p_∞ es fibración de Serre.

□

3.3 Demostración

Es claro que las tres clases de aplicaciones contienen a la identidad. Además, las equivalencias débiles son cerradas respecto a la composición. Las fibraciones de Serre también son cerradas con la composición. En efecto, si tenemos dos fibraciones de Serre y consideramos su composición, buscamos un levantamiento en el siguiente diagrama.

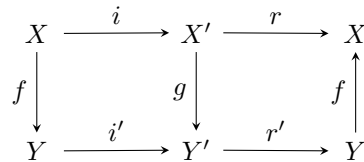


Utilizando sucesivamente los levantamientos que nos proporcionan i_1 e i_2 , obtenemos el levantamiento deseado l_2 . El caso de las cofibraciones es similar. Nos queda entonces probar los axiomas.

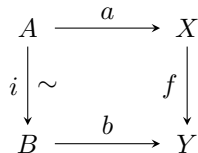
MC1 Se cumple porque **Top** es una categoría con límites y colímites finitos.

MC2 Se deduce directamente de la funtorialidad de π_n .

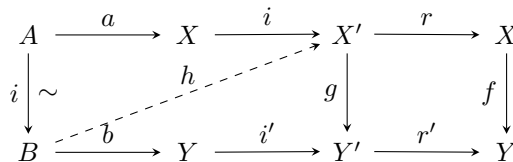
MC3 Supongamos que tenemos $f : X \rightarrow Y$ y $g : X' \rightarrow Y'$ tales que f es retracts de g . Esto es, tenemos el siguiente diagrama:



- Si g es equivalencia débil entonces $i'_* \circ g_*^{-1} \circ r_*$ es inversa de f_* por la funtorialidad de π .
- Si g es fibración, entonces tenemos que encontrar un levantamiento del diagrama



Para ello, podemos “pegar” por f el diagrama de la retracción en el anterior, quedando



Por hipótesis, como g es fibración, tenemos un levantamiento $h : B \rightarrow X'$. Por lo tanto, rh es el levantamiento que buscábamos.

- Si g es cofibración, la demostración es similar a la anterior. Esta vez, combinamos los diagramas en el lado izquierdo y después repetimos el levantamiento y la composición.

MC4 **MC4(i)** es cierto porque hemos definido las cofibraciones como las aplicaciones que cumplen esta propiedad. Para **MC4(ii)** disponemos del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & X \\ f \downarrow \sim & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

en donde q es cualquier fibración y f es una cofibración acíclica. Hemos de demostrar que existe un levantamiento. Por el Lema 3.6, podemos factorizar $f = p_\infty i_\infty$, en donde $p_\infty : A' \rightarrow B$ es fibración e $i_\infty : A \rightarrow A'$ es una equivalencia homotópica débil que cumple la propiedad del levantamiento a izquierda respecto a cualquier fibración. Por **MC2**, p es forzosamente acíclica. Por lo tanto, por ser f cofibración, tenemos un levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A' \\ f \downarrow & \nearrow l & \downarrow p \sim \\ B & \xrightarrow{id} & B \end{array}$$

Equivalentemente,

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{id} & A & \xrightarrow{id} & A \\ f \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{l} & A' & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

Es decir, f es una retracción de i . “Pegando” este diagrama por f de manera similar a como hicimos en la demostración de **MC3**, y teniendo en cuenta que i cumple la propiedad del levantamiento para todas as fibraciones de Serre, vemos que f también la cumple.

MC5 El Lema 3.6 nos proporciona **MC5(ii)**. Sea $f : X \rightarrow Y$ la aplicación que queremos factorizar. consideramos la familia de funciones $\mathcal{F} := \{j_n : S^{n-1} \rightarrow D^n\}_{n \geq 0}$. Consideramos la factorización de f dada por la construcción de pegado infinito

$$f : X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{F}, f) \xrightarrow{p_\infty} Y$$

- i_∞ es cofibración. Sabemos que $i_{k+1} : G^k(\mathcal{F}, p) \rightarrow G^{k+1}(\mathcal{F}, p)$ es una inclusión de CW-complejos relativos. Por lo tanto, por 3.4, todas las fibraciones de Serre que son equivalencias homotópicas débiles tienen la RLP respecto de i_{k+1} . Esto es, i_{k+1} tiene la LLP respecto de las fibraciones acíclicas. En consecuencia, por la propiedad universal del colímite, también la tiene i_∞ . Por lo tanto, i_∞ es una cofibración.
- p_∞ es fibración acíclica. La sucesión formada por los $G^k(\mathcal{F}, p_k)$ es una sucesión que cumple las hipótesis del Lema 3.5. Por lo tanto, tenemos la misma biyección que nos permite hacer la demostración de 2.35. Esto significa que p_∞ tiene la RLP respecto a las aplicaciones de \mathcal{F} . Por lo tanto, por el Lema 3.4, p_∞ es fibración de Serre y equivalencia débil (i.e. fibración acíclica, que era lo que queríamos probar).

□

3.4 Relación con la teoría de homotopía habitual

Ahora que hemos probado el Teorema 3.1, vamos a ver qué relación tenemos con la teoría de homotopía habitual. Para ello, probaremos la siguiente proposición:

Proposición 3.7. *Supongamos que A es un CW-complejo y que X es un espacio topológico arbitrario. Entonces el conjunto $\text{HomHo}(\mathbf{Top})(A, X)$ está en biyección con el conjunto de clases de homotopía convencionales de aplicaciones de A en X .*

Demostración. Sean f y g en $\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{Top})}(A, X)$. Como A es cofibrante (por el Lema 3.4) y X es fibrante (hemos vistos que todos lo son), entonces podemos aplicar la Proposición 2.32 para obtener la biyección entre $\pi(A, X)$ y $\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{Top})}(A, X)$, que nos permite considerar directamente clases en $\pi(A, X)$.

Por otro lado, tenemos que $A \times [0, 1]$ es un buen objeto cilíndrico para A , porque $A \amalg A \rightarrow A \times [0, 1]$ es una inclusión de CW complejos (es la inclusión de las dos tapas del cilindro).

Por lo tanto, por lo deducido de la demostración de 2.23, dos aplicaciones representan la misma clase en $\pi(A, X)$ si y sólo si son homótopas a izquierda a través de $A \times [0, 1]$, esto es, si y sólo si son homótopas en el sentido habitual. \square

4 \mathbf{Ch}_R como categoría de modelos

En esta sección, daremos estructura de modelos a la categoría \mathbf{Ch}_R . Probaremos el Teorema 4.1 y estudiaremos la relación de esta teoría de homotopía con la relación de homotopía de cadenas que definimos anteriormente. Seguimos [DS95], capítulo 7.

4.1 Enunciado

Teorema 4.1. *Decimos que una aplicación $f : M \rightarrow N$ en \mathbf{Ch}_R es*

- *equivalencia débil si f induce isomorfismos $H_k(M) \rightarrow H_k(N)$ (para cada $k \geq 0$).*
- *cofibración si $f_k : M_k \rightarrow N_k$ es un monomorfismo cuyo conúcleo es un R -módulo proyectivo (para cada $k \geq 0$).*
- *fibración si $f_k : M_k \rightarrow N_k$ es un epimorfismo (para cada $k > 0$).*

con estas elecciones \mathbf{Ch}_R es una categoría de modelos.

Nota. Notemos que para las anteriores designaciones, podemos ver fácilmente qué objetos de \mathbf{Ch}_R son fibrantes y cofibrantes. En efecto, no tenemos más que el complejo de cadenas nulo como objeto final e inicial de la categoría (denotado por 0), y por lo tanto basta considerar para cada objeto M los morfismos $0 \rightarrow M$ y $M \rightarrow 0$. El primero es un monomorfismo de conúcleo proyectivo para cada k si todos los M_k son proyectivos, y el segundo es siempre un epimorfismo. Por lo tanto, los objetos cofibrantes son los complejos de módulos proyectivos, y todos los objetos de \mathbf{Ch}_R son fibrantes.

Nota. Notemos que en el enunciado del teorema no hemos incluido el caso $k = 0$ en la designación de las cofibraciones. Sin embargo, tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & X_1/\ker \partial & \xrightarrow{\partial} & X_0 & \longrightarrow & H_0(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_0 & & \downarrow p_0^* & & \\
 0 & \longrightarrow & Y_1/\ker \partial & \xrightarrow{\partial} & Y_0 & \longrightarrow & H_0(Y) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Como p_0^* es isomorfismo, p_1 es sobreyectiva y podemos pasar al cociente por la conmutatividad del diagrama, podemos aplicar el lema 1.42 (lema de los cinco) y vemos que p_0 también es sobreyectiva.

Ésta no es la única manera de tratar los complejos de cadenas como categoría de modelos. En primer lugar, nosotros hemos puesto unas restricciones en los grados que también tenemos en [DS95]. En cambio, en [Hov07], Definición 2.3.3, esta restricción ha sido eliminada. También en esta última referencia, podemos encontrar otro modelo para los complejos de cadenas que enunciamos a continuación.

Teorema 4.2. *Decimos que una aplicación $f : M \rightarrow N$ en \mathbf{Ch}_R es*

- *equivalencia débil si f induce isomorfismos $H_k(M) \rightarrow H_k(N)$ (para cada $k \geq 0$).*
- *cofibración si $f_k : M_k \rightarrow N_k$ es un monomorfismo (para cada $k \geq 0$).*
- *fibración si $f_k : M_k \rightarrow N_k$ es un epimorfismo cuyo núcleo es un R -módulo inyectivo (para cada $k > 0$).*

con estas elecciones \mathbf{Ch}_R es una categoría de modelos.

Demostración. [Hov07], Teorema 2.3.13. □

También cabe comentar que existe un modelo análogo al de las fibraciones de Hurewicz en el que las equivalencias débiles son la homotopías de cadenas (ver por ejemplo [MP11], Teorema 17.1.1).

4.2 Previo a la prueba

Definición 4.3. Si A es un R -módulo, el **disco n -simo de A** $D_n(A)$ es un complejo de cadenas definido por

$$D_n(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, n-1 \\ A & \text{si } k = n, n-1 \end{cases}$$

tomando $\partial : D_n(A) \rightarrow D_{n-1}(A)$ como la identidad en A . Al disco n -simo de R (visto como módulo sobre sí mismo) lo denotamos D^n .

La **esfera n -sima de A** $S_n(A)$ es un complejo de cadenas definido por

$$S_n(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ A & \text{si } k = n \end{cases}$$

La esfera n -sima de R se denota por S^n .

Observemos que tenemos el isomorfismo

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ch}_R}(D_n(A), M) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(D_n(A), M_n) \quad (4.1)$$

que a cada morfismo de complejos f le asocia la n -sima de sus funciones entre módulos. Esto es porque, por la conmutatividad de f con ∂ , que en el caso de $D_n(A)$ es la identidad, $f_{n-1} = \partial f_n$. Por tanto, podemos recuperar f a partir de f_n .

Como consecuencia del isomorfismo anterior, si $\{A_i\}_{i \in I}$ son proyectivos, entonces $\bigoplus_{i \in I} D_n(A_i)$ es un complejo de cadenas proyectivo. Basta hacer el levantamiento para cada A_i , después utilizar el isomorfismo y hacer la suma directa.

Ahora probamos el siguiente lema:

Lema 4.4. Supongamos que P es un objeto acíclico de \mathbf{Ch}_R tal que cada P_k es un R -módulo proyectivo. Entonces $\text{Cy}_k(P)$ son proyectivos y P es isomorfo como complejo de cadenas a la suma $\bigoplus_{k \geq 1} (D_k(\text{Cy}_{k-1}P))$.

Demostración. Definimos el complejo de cadenas $P^{(k)}$ por

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_k \longrightarrow \text{Bd}_{k-1}P \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0.$$

Notemos que $P^{(k)}/P^{(k+1)} \cong D_k(\text{Cy}_{k-1}P)$. En efecto, todos los módulos de dicho complejo son nulos salvo los correspondientes a los lugares $k-1$ y k . En el primero de ellos, tenemos $\text{Bd}_{k-1}P (= \text{Cy}_{k-1}P$ por la aciclicidad) cocientado por 0, que es 0. En el segundo, tenemos el cociente $P_k/\text{Bd}_kP = P_k/\text{Cy}_kP \cong \text{Bd}_{k-1}P = \text{Cy}_{k-1}P$, en donde hemos aplicado la aciclicidad y el primer teorema de isomorfía.

Ahora, es claro que $\text{Cy}_0P = P_0$ es proyectivo por hipótesis. Y por lo deducido en el párrafo anterior, $P = P^{(1)} \cong P^{(2)} \oplus D_1(\text{Cy}_0P)$. Como todos los sumandos de un módulo proyectivo son proyectivos, entonces $P^{(2)}$ es un complejo de módulos proyectivos (con el primero de ellos nulo). En particular, $\text{Bd}_1P = \text{Cy}_1P$ es proyectivo. Por lo tanto, razonando de manera similar, podemos descomponer $P^{(2)}$ como lo hicimos con P . Así sucesivamente, conseguimos la descomposición que buscábamos. \square

Con esto conseguimos que, dado un complejo de cadenas como en las hipótesis del lema, al ser suma directa de discos de módulos proyectivos, podamos hacer levantamientos.

Además, se cumple la siguiente caracterización de las fibraciones y de las fibraciones acíclicas, semejantes a los Lemas 3.3 y 3.4.

Proposición 4.5. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ en \mathbf{Ch}_R es

- (i) una fibración si y sólo si cumple la RLP respecto a las aplicaciones $0 \rightarrow D^n$ para cualquier $n \geq 1$.
- (ii) una fibración acíclica si y sólo si cumple la RLP respecto a las aplicaciones $j_n : S^{n-1} \rightarrow D^n$ para cualquier $n \geq 0$.

Demostración.

- (i) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ D^n & \xrightarrow{h} & Y. \end{array}$$

Por el isomorfismo 4.1, podemos considerar el diagrama en los n -simos módulos de cada uno de los complejos. Cada diagrama de esta forma representa un $y \in Y_n$. La aplicación f es fibración si es sobreyectiva, esto es, si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un x tal que $f_n(x) = y$. Por lo tanto, podemos definir el levantamiento como la aplicación constantemente igual a x .

- (ii) [Hov07], proposición 2.3.5. □

4.3 Demostración

Directamente por la definición sabemos que las clases anteriormente definidas son cerradas respecto a la composición y contienen a la identidad. Por un lado, la funtorialidad de H_k lo tenemos para las equivalencias débiles, y para las fibrationes es obvio. Por otro lado, si tenemos dos monomorfismos de módulos con conúcleo proyectivo $f : L \rightarrow M$ y $M \rightarrow N$, entonces tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M/L \longrightarrow N/L \longrightarrow N/M \longrightarrow 0$$

M/L y N/M son los conúcleos de f y g , por lo que son proyectivos. Por lo tanto, por el Lema 1.37, el conúcleo de la composición N/L también es proyectivo, y aplicando esto mismo grado a grado, se prueba que la composición de cofibraciones es cofibración.

Basta por lo tanto que probemos los axiomas **MC1** - **MC5**.

MC1 Los límites y colímites finitos existen en \mathbf{Ch}_R . Se pueden computar grado a grado, y por lo tanto se deducen de la existencia de límites y colímites finitos en \mathbf{Mod}_R .

MC2 Sean f, g morfismos en \mathbf{Ch}_R y sea gf su composición. Por la funtorialidad de H_k , se induce un diagrama conmutativo entre f_*, g_* , y gf_* . Si dos de tres son isomorfismos, entonces el tercero también lo es.

MC3 En \mathbf{Mod}_R , los monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos se conservan por retracts. En efecto, si f es un retracto de g , basta considerar el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & A' & \xrightarrow{r} & A \\ f \downarrow & & g \downarrow & & f \downarrow \\ B & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{r'} & B \end{array}$$

Si g es sobre, entonces $r'g$ es sobre, y por la conmutatividad en el cuadro derecho, f es sobre. Si g es inyectiva, gi es inyectiva, y por la conmutatividad en el cuadro izquierdo, f es inyectiva. Por lo tanto, si g es isomorfismo, f es isomorfismo. Pero además, por la funtorialidad de H_k , si g es equivalencia débil también lo es f . Esto prueba **MC3**.

MC4 (i) Consideremos el diagrama de complejos de cadenas.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \sim \\ B & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

Si i es cofibración y p es fibración acíclica, tenemos que probar que existe un levantamiento.

Hemos visto en la Nota 4.1 que p_0 era sobreyectiva, y por lo tanto todas las p_i . Consideramos $K_i := \ker(p_i)$. Podemos construir un complejo de cadenas K cuyos objetos sean los K_i y con los operadores borde de X restringidos a K (esto se puede hacer por la conmutatividad de ∂ con p). Por lo tanto, tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

Por el Lema 1.41(i), K es acíclico.

Vamos a construir $f : B \rightarrow X$ inductivamente sobre el grado. En el caso $k = 0$, nos situamos en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{g_0} & X_0 \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p_0 \sim \\ B_0 & \xrightarrow{h_0} & Y_0 \end{array}$$

Como i_0 es monomorfismo, esto es, inyectivo, y el conúcleo de i_0 es proyectivo por ser i_0 cofibración, podemos poner $B_0 = A_0 \oplus B_0/A_0 = A_0 \oplus P_0$. Podemos definir $f_0 = g_0$ en A_0 y, como P_0 es proyectivo, podemos escoger cualquier levantamiento del diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & X_0 \\ & \nearrow & \downarrow p_0 \\ P_0 & \xrightarrow{h_0} & Y_0 \end{array}$$

y definir f_0 en P_0 mediante dicho levantamiento.

Para $k > 0$, suponemos que existen $f_j; B_j \rightarrow X_j$ con $j < k$ de manera que conmuten con el operador ∂ (que es lo que requerimos para tener un morfismo en \mathbf{Ch}_R) y que tengamos un levantamiento del siguiente diagrama para cada j . Esto es, cumpliendo:

- (1) $\partial f_j = f_{j-1} \partial$ para $1 \leq j < k$.
- (2) $p_j f_j = h_j$ para $0 \leq j < k$.
- (3) $f_j i_j = g_j$ para $0 \leq j < k$.

Puesto que i_k sigue siendo una cofibración, podemos poner $B_k = A_k \oplus P_k$ y definir \tilde{f}_k de la misma manera que en el caso $k = 0$. Por tanto, \tilde{f}_k cumple (2) y (3), pero no necesariamente (1). Procedemos por lo tanto a estudiar $\epsilon : B_k \rightarrow X_{k-1}$ definida por $\partial \tilde{f}_k - f_{k-1} \partial$, que mide precisamente lo que le falta a \tilde{f}_k para cumplir 1. Se tiene que

- (a) $\partial \epsilon = 0$
- (b) $p_{k-1} \epsilon = p_{k-1} \partial \tilde{f}_k - h_{k-1} \partial = \partial p_k \tilde{f}_k - h_{k-1} \partial = 0$ por (2) y la conmutatividad de h y ∂ .
- (c) $\epsilon i_k = 0$ de manera similar.

Por lo tanto, ϵ induce una aplicación

$$\epsilon' : B_k/i_k(A_k) \cong P_k \longrightarrow \text{Cy}_{k-1}(K)$$

En efecto, (a) nos asegura que la imagen está en el conjunto de ciclos, (b) nos dice que de hecho está en K y (c) nos permite cocientar por $i_k(A_k)$.

Como K es acíclico, $\text{Cy}_{k-1}(K) = \text{Bd}_{k-1}(K) = \text{Im}(\partial : K_k \longrightarrow K_{k-1})$. En consecuencia, $\partial : K_k \longrightarrow \text{Cy}_{k-1}(K)$ es sobreyectiva. Por lo tanto, al ser P_k proyectivo, podemos levantar ϵ' a

$$\epsilon'' : P_k \longrightarrow K_k \tag{4.2}$$

Finalmente, definimos ϵ''' componiendo ϵ'' con $B_k \longrightarrow P_k$ como se indica en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} B_k & \xrightarrow{\epsilon'''} & X_k & \xrightarrow{\partial} & X_{k-1} \\ \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\ P_k & \xrightarrow{\epsilon''} & K_k & \xrightarrow{\partial} & \text{Cy}_{k-1}(K) \end{array}$$

ϵ' (curved arrow from P_k to $\text{Cy}_{k-1}(K)$)

Consideramos $f_k := \tilde{f}_k - \epsilon'''$. A la vista del diagrama anterior, se deducen inmediatamente las propiedades (1)-(3) para f_k , ya que

- (1) $\partial \epsilon''' = 0$
- (2) La imagen de ϵ'' está en el núcleo de p_k, K_k .
- (3) $P_k \cong B_k/i_k(A_k)$.

Con esto hemos probado el paso inductivo.

(ii) Sea el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & X \\ i \downarrow \sim & & p \downarrow \\ B & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

Probar **MC4(ii)** significa encontrar un levantamiento para este diagrama. Tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

En donde P es el conúcleo de i (con cada uno de los P_i proyectivo por hipótesis). Por el Lema 1.41(ii), P es acíclico. Además, por ser cada P_k proyectivo, podemos poner $B \cong A \oplus P$. Para obtener el levantamiento, podemos definirlo por g en A y buscar uno de P en Y .

Como P es acíclico y cada uno de los P_k es proyectivo, podemos aplicar el Lema 4.4 y poner $P \cong \bigoplus_{k \geq 1} (D_k(\text{Cy}_{k-1}P))$ con cada uno de los $\text{Cy}_k(P)$ proyectivos. Por lo tanto, por la ecuación 4.1 y el razonamiento posterior, P es un complejo de cadenas proyectivo, así que existe un levantamiento $P \longrightarrow Y$ de h , que era lo que queríamos probar.

MC5 (i) Sea $f : X \longrightarrow Y$ la aplicación que queremos factorizar. Consideramos \mathcal{F} el conjunto de aplicaciones $\{j_n : S^{n-1} \longrightarrow D^n\}_{n \geq 0}$. Consideramos la factorización de f dada por el argumento del objeto pequeño

$$f : X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{F}, f) \xrightarrow{p_\infty} Y.$$

Por el Lema 2.35, p_∞ tiene la propiedad del levantamiento a derecha respecto a las aplicaciones j_n . Por la proposición 4.5, p_∞ es fibración acíclica.

Para ver que i es cofibración, tenemos que notar que la inclusión de X en $G^1(\mathcal{F}, f)$ viene dada por el pushout en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{n \in \mathbb{N}} \coprod_{(g,h) \in S(i)} S^{n-1} & \xrightarrow{+i + (g,h) g} & X \\ +i + (g,h) j_n \downarrow & & \downarrow i_1 \\ \coprod_{n \in \mathbb{N}} \coprod_{(g,h) \in S(i)} D^n & \dashrightarrow & G^1(\mathcal{F}, f) \end{array}$$

Esto significa que, para cada grado n , cada uno de los módulos $G^1(\mathcal{F}, f)_n$ es una suma directa de X_n con copias de R (con la restricción dada por la inclusión de la esfera en los discos). Al considerar el conúcleo de dicha inclusión, obtenemos una suma directa de copias de R . Como ocurre lo mismo para cada una de las inclusiones $G^k(\mathcal{F}, f)_n \rightarrow G^{k+1}(\mathcal{F}, f)_n$, podemos pasar al colímite, y por lo tanto el conúcleo de la inclusión $X_n \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, f)_n$ es una suma directa de copias de R . Como cada R es proyectivo (por ser obviamente libre), el conúcleo es proyectivo para cada n e i_∞ es cofibración.

- (ii) De manera similar al caso anterior, consideramos la familia $\mathcal{G} := \{0 \rightarrow D^n\}_{n \geq 1}$, y la factorización dada por el argumento del objeto pequeño es

$$f : X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{G}, f) \xrightarrow{p_\infty} Y.$$

Otra vez por los Lemas 2.35 y 4.5, p_∞ es una fibración, y por el mismo razonamiento que en el apartado anterior, i_∞ es cofibración. Ahora tenemos que ver que es acíclica. Para ello, podemos considerar el siguiente diagrama, en el que representamos el pegado de cada uno de los discos.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \dashrightarrow & G^1(\mathcal{G}, f) \end{array}$$

En donde $G^1(\mathcal{G}, f)$ es el complejo

$$\cdots \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow X_{n-1} \oplus R \longrightarrow X_n \oplus R \longrightarrow X_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

(Antes en lugar de $X_{n-1} \oplus R$ teníamos X_{n-1} con una copia de R metida dentro, dada por las aplicaciones $g : S^{n-1} \rightarrow X$). Obviamente, los grupos de homología de $G^1(\mathcal{G}, f)$ son los mismos que los de X . Por lo tanto, siguiendo el mismo razonamiento para cada n y cada uno de los pushouts (cada g), $G^\infty(\mathcal{G}, f)$ tiene la misma homología que X y por lo tanto es cofibración acíclica. □

4.4 Relación con el álgebra homológica habitual

Sea A un R -módulo. Definimos $K(A, n)$, ($n \geq 0$) como el objeto M de \mathbf{Ch}_R definido por $M_n = A$ y $M_k = 0$ para $k \neq n$. Se cumple la siguiente proposición:

Proposición 4.6. *Para dos R -módulos cualesquiera A y B y enteros no negativos m y n con $n \geq m$, existe un isomorfismo natural*

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{Ch}_R)}(K(A, m), K(B, n)) \cong \text{Ext}_R^{n-m}(A, B) \quad (4.3)$$

Demostración. Supongamos primero que $m = 0$ y $n \geq 0$. El resto de casos son una traslación. Utilizando **MC5(i)** podemos factorizar la aplicación $0 \rightarrow K(A, 0)$ como $0 \rightarrow P \rightarrow K(A, 0)$, en donde P es cofibrante y $P \rightarrow K(A, 0)$ es fibración acíclica. En otras palabras, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A \end{array}$$

con cada uno de los P_k proyectivo. Por la conmutatividad del diagrama, la sucesión

$$\cdots \longrightarrow P_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A$$

es exacta. Por lo tanto, es una resolución proyectiva de A .

Como $P \rightarrow K(A, 0)$ es equivalencia débil, por la Proposición 2.29, es un isomorfismo en $\text{Ho}(\mathbf{Ch}_R)$. Por lo tanto

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{Ch}_R)}(K(A, 0), K(B, n)) \cong \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{Ch}_R)}(P, K(B, n)).$$

Además, como P es cofibrante y $K(A, 0)$ es fibrante, podemos aplicar la Proposición 2.32 y tenemos

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{Ch}_R)}(P, K(B, n)) \cong \pi(P, K(B, n)).$$

Sea ahora X dado por

$$X_i = \begin{cases} B \oplus B & \text{si } i = n \\ B & \text{si } i = n - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con $\partial : X_n \rightarrow X_{n-1}$ enviando (b_0, b_1) a $b_1 - b_0$. X es un buen objeto de caminos para $K(B, n)$. En efecto, tenemos

$$K(B, n) \xrightarrow{q} X \xrightarrow{(p_0, p_1)} K(B, n) \times K(B, n)$$

en donde, para grado n $q(b) = b$ y $p_i(b_0, b_1) = b_i$, y para el resto de grados tenemos todo nulo. Como $X \rightarrow K(B, n)$ es sobreyectiva, X es un buen objeto de caminos.

Por la Proposición 2.24, dos aplicaciones $f, g : P \rightarrow K(B, n)$ tienen la misma clase en $\pi(P, K(B, n))$ si y sólo si son homótopas, en este caso a derecha, respecto a X . Es decir, si y sólo si existe $H : P \rightarrow X$ tal que $p_0 H = f$ y $p_1 H = g$. Pero una aplicación $f : P \rightarrow K(B, n)$ es una aplicación $f_n : P_n \rightarrow B$ tal que $f_n \partial^P = 0$ (esto es definir f para el único grado en el que no es nula y aplicar la condición de conmutatividad con el operador borde).

Esto nos permite considerar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
& & P & & \cdots & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow H & & & & \downarrow h_n & & \downarrow h_{n-1} & & \\
& & X & & \cdots & \xrightarrow{f_n, g_n} & B \oplus B & \xrightarrow{q} & B & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow p_0 \text{ ó } p_1 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & K(B, n) & & \cdots & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

De él se deduce que f y g están relacionadas por una homotopía a derecha si y sólo si hay una $h : P_{n-1} \rightarrow B$ tal que $h\partial^P = f_n - g_n$. Esta h es la h_{n-1} del diagrama. Si tenemos una homotopía H , entonces aplicamos la condición de conmutatividad en el cuadro superior y deducimos que $h_{n-1}\partial^P = f_n - g_n$. Y recíprocamente, si tenemos tal h , podemos definir $h_n = (f_n, g_n)$ y comprobar que tenemos una homotopía. Ahora vemos que coincide con $\text{Ext}_R^n(A, B)$. En efecto, tomando la misma resolución proyectiva que tenemos,

$$\text{Ext}_R^n(A, B) = H^i(\text{Hom}_{\text{Mod}_R}(_, B)(P)) = \frac{\ker(\text{Hom}_{\text{Mod}_R}(P_n, B) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Mod}_R}(P_{n+1}, B))}{\text{Im}(\text{Hom}_{\text{Mod}_R}(P_{n-1}, B) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Mod}_R}(P_n, B))}$$

Por lo tanto, f_n y $g_n : P_n \rightarrow B$ están en la misma clase si y sólo si $f_n - g_n$ está en la imagen, esto es, si y sólo si existe $h : P_{n-1} \rightarrow B$ tal que $h\partial^P = f_n - g_n$, que coincide con lo que queríamos demostrar.

Para ver que es natural, basta considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ext}_R^n(A, B) & \xrightarrow{\text{iso}} & \pi(P, K(B, n)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Ext}_R^n(A, C) & \xrightarrow{\text{iso}} & \pi(P, K(C, n))
\end{array}$$

dado por un morfismo $k : B \rightarrow C$ y sus imágenes por los funtores $\text{Ext}_R^n(A, _)$ y $\pi(P, K(_, n))$. Este diagrama es conmutativo porque la condición $h\partial^P = f_n - g_n$ se transforma en $h\partial^P = k_n \circ f_n - k_n \circ g_n$, tanto desarrollando desde el funtor Ext como desarrollando desde el funtor $\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{C})}$. \square

Por construcción, todos los objetos de la estructura de modelos de \mathbf{Ch}_R son fibrantes, mientras que los cofibrantes son aquellos complejos compuestos de módulos proyectivos. El funtor γ que construimos en el capítulo 3 asocia por lo tanto complejos de ese tipo a cualquier otro de la categoría (y por tanto dos complejos con el mismo objeto cofibrante asociado van a ser débilmente equivalentes). En consecuencia, podemos ver la categoría de homotopía como aquella cuyos objetos son complejos de cadenas de módulos proyectivos. En cuanto a los morfismos, se puede probar que si M es cofibrante, entonces dos aplicaciones $f, g : M \rightarrow N$ son homótopas si y sólo si son homótopas con la homotopía de cadenas habitual (ver por ejemplo Lema 2.13 en [CH00]).

Bibliografia

- [Bra19] Tai-Danae Bradley. Limits and colimits part 3 (examples). 2019.
- [Car07] Jacobien Carstens. Homotopy theory of topological spaces and simplicial sets. 2007.
- [CE99] Henry Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*, volume 41. Princeton University Press, 1999.
- [CH00] J Daniel Christensen and Mark Hovey. Quillen model structures for relative homological algebra. *arXiv preprint math/0011216*, 2000.
- [Dol58] Albrecht Dold. Homology of symmetric products and other functors of complexes. *Annals of Mathematics*, pages 54–80, 1958.
- [Dol80] Albrecht Dold. *Lectures on algebraic topology*. Springer Science & Business Media, 1980.
- [DS95] William G Dwyer and Jan Spalinski. Homotopy theories and model categories. *Handbook of algebraic topology*, 73:126, 1995.
- [Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [Hov07] Mark Hovey. *Model categories*. Number 63. American Mathematical Soc., 2007.
- [Hu59] Sze-tsen Hu. *Homotopy theory*. Academic press, 1959.
- [Kan58] Daniel M Kan. On homotopy theory and css groups. *Annals of Mathematics*, pages 38–53, 1958.
- [ML13] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [MP11] J Peter May and Kate Ponto. *More concise algebraic topology: localization, completion, and model categories*. University of Chicago Press, 2011.
- [MV99] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky. A 1-homotopy theory of schemes. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 90(1):45–143, 1999.
- [Qui06] Daniel G Quillen. *Homotopical algebra*, volume 43. Springer, 2006.
- [RN13] Daniel Robert-Nicoud. *Quillen equivalence of topological spaces and simplicial sets*. PhD thesis, 01 2013.
- [Spa89] Edwin H Spanier. *Algebraic topology*. Springer Science & Business Media, 1989.
- [Str72] A. Strom. The homotopy category is a homotopy category. *Arch. Math XXIII*, 435-441, 1972.
- [Vak17] Ravi Vakil. The rising sea: foundations of algebraic geometry. *preprint*, 2017.
- [Wei95] Charles A Weibel. *An introduction to homological algebra*. Number 38. Cambridge university press, 1995.