



UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

**EXISTENCIA DE SOLUCIONES Y
COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE UN SISTEMA
DEPREDADOR-PRESA CON QUIMIOTAXIS**

Víctor Navarro Fernández
vinavarr@ucm.es

JULIO 2020

DIRIGIDO POR:

Mihaela Negreanu
negreanu@mat.ucm.es

Instituto de Matemática Interdisciplinar
Dpto. Análisis Matemático y Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

Abstract

In the present work a nonlinear system of reaction-diffusion partial differential equations describing the evolution of a predator-prey biological system with chemotaxis is studied. The system consists of three equations, two parabolic equations corresponding to the active predators and preys, and an ordinary equation corresponding to the dormant predators (resting eggs). Chemotaxis in this context affects giving place to two different systems. On the one hand one chemotactic term in the active predators equation is considered such that they will move toward the regions in which the density of dormant predators is larger. On the other hand another chemotactic term is added to the preys equation so that they also move toward the regions in which the density of dormant predators is larger. First of all existence and uniqueness of classical solutions is proved and uniform bounds in $L^\infty(\Omega)$ are found using the Moser-Alikakos iterative method. Afterwards, the asymptotical behavior of the solutions is studied, the constant steady states are found and global stability conditions are obtained. Finally a numerical approximation is achieved by means of the Generalized Finite Differences Method. A numerical scheme is designed, its convergence is proved and to sum up it is applied to the classical Rosenzweig-MacArthur model in order to get a better visual understanding of the dynamics of the system.

Resumen

En este trabajo se estudia un sistema no lineal de reacción-difusión de ecuaciones en derivadas parciales que describe la evolución de un sistema biológico depredador-presa con quimiotaxis. El sistema está compuesto por tres ecuaciones, dos de ellas parabólicas, correspondientes a los depredadores activos y las presas, y una ordinaria correspondiente a los depredadores inactivos. La quimiotaxis en este contexto afecta dando lugar a dos sistemas diferentes. Para comenzar consideramos una única quimiotaxis que afecta a los depredadores activos dirigiendo su movimiento hacia las zonas de más densidad de inactivos. Análogamente se considera una quimiotaxis adicional en el término de las presas, que del mismo modo dirigirán su movimiento a las regiones de mayor densidad de depredadores inactivos. En primer lugar se demuestra la existencia y unicidad de soluciones clásicas y la acotación uniforme en $L^\infty(\Omega)$ en ambos sistemas utilizando el método iterativo de Moser-Alikakos. En segundo lugar se estudia el comportamiento asintótico de las soluciones, se determinan los estados estacionarios constantes y se analiza su estabilidad global. Por último se realiza una aproximación numérica al sistema a través del método de Diferencias Finitas Generalizadas, se diseña un esquema numérico para el sistema, se demuestra su convergencia y se aplica al modelo clásico de Rosenzweig-MacArthur para obtener un mejor entendimiento de la dinámica del sistema.

Índice general

Introducción	1
1. Resultados previos	11
1.1. Resultados previos	11
1.2. Hipótesis	15
2. Modelización	17
3. Existencia global de soluciones clásicas	21
3.1. Existencia local de soluciones	22
3.2. Acotación uniforme en $L^p(\Omega)$ y existencia global	27
4. Comportamiento asintótico de las soluciones	33
4.1. Linealización y estabilidad local	33
4.2. Estabilidad global y tasa de convergencia	37
4.2.1. Sistema con una quimiotaxis	38
4.2.2. Sistema con dos quimiotaxis	42
5. Investigación numérica	47
5.1. El método de Diferencias Finitas Generalizadas	47
5.2. Esquema numérico y convergencia del método	52
5.3. Aplicaciones: el modelo de Rosenzweig-MacArthur	59
5.3.1. Ejemplo 1	61
5.3.2. Ejemplo 2	64
5.3.3. Ejemplo 3	66
Conclusiones	69
Bibliografía	71

«the most rewarding part is the ‘Aha’ moment, the excitement of discovery and enjoyment of understanding something new – the feeling of being on top of a hill and having a clear view. But most of the time, doing mathematics [...] is like being on a long hike with no trail and no end in sight.»

Maryam Mirzakhani¹, 2014.

Introduction

History of Natural Sciences is replete of successful moments in which a mathematician comes upon a model than can predict the behavior of the natural world and the Universe. From the movement of the stars through the celestial sphere to the reaction velocity of a chemical substance in the human body, development of natural sciences has been historically linked to the evolution of mathematical tools and models capable of pushing a little forward the borders of knowledge. Progress in the most abstract mathematical fields carries evolution and discoveries in topics of natural sciences to which, in principle, have not a close relation. Similarly, limitations in the scientific development of physics, chemistry or biology are inevitably imposed by mathematical constraints in order to study the systems of equations which govern the dynamics of the phenomena that are aimed to be explained through the scientific method.

Connection between mathematical models and physics was the very first to strengthen more evidently. Isaac Newton² needed to define new mathematical concepts which ended up with the foundation of Calculus in order to develop his physical model about the forces between masses. Advances provided by Emmy Noether³ in theory of Rings, Fields and Algebras at the beginning of the 20th century allowed all the mathematical development of the well-known Standard Model of particle physics. Occasionally some mathematical set up designed to explain some specific aspects of nature comes into conflict with cultural ideas or accepted scientific canons about different natural phenomena. James C. Maxwell⁴ proposed in 1865 a compendium of differential and integral equations which completely described the behavior of the electromagnetic waves, the movement of light. Later, by the first years of the 20th century, Albert Einstein⁵ realized that if Maxwell’s model was fully accepted then the classical mechanics from Newton and Galileo were essentially wrong. Einstein came up with a new mathematical model about the dynamics of massive bodies in the Universe in accordance to Maxwell’s Laws of Electromagnetism, which is worldwide known under the name of General Relativity⁶.

Examples of revolutions in natural sciences arising from the analysis of mathematical models are uncountable. Nonetheless mathematical advancement in Biology, Medicine or Ecology has been subsequent since the living beings are composed by millions of cells and complex biochemical processes, therefore the mathematical analysis carries an extra difficulty. One of the very first solid mathematical models proposed to explain the dynamics of species with predator-prey relationships was the Lotka-Volterra model. On the one hand Alfred J. Lotka firstly designed this nonlinear differential equations system to explain the theory of autocatalytic reactions⁷,

¹Interview to M. Mirzakhani, The Guardian, Aug 13th 2014.

²I. Newton. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, 1687.

³E. Noether. *Invariante Variationsprobleme*. Mathematisch-Physikalische Klasse, 1918.

⁴J.C. Maxwell. *A dynamical theory of the electromagnetic field*, 1865.

⁵A. Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Ann. der Physik, 1905.

⁶A. Einstein. *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes*. Ann. der Physik, 1910.

⁷A.J. Lotka. *Contribution to the theory of periodic reactions*. J. Phys. Chem. 1910.

however, a brief period of time after, he was capable to extend it to organic systems using plant species and herbivorous animals⁸. Finally he used the equations of the model to analyze the predator-prey interactions in his work *Elements of Physical Biology* (Williams and Wilkins, Baltimore, 1925). On the other hand and concurrently to Lotka's work, the Italian mathematician Vito Volterra came up to the same set of equations⁹ inspired by Umberto D'Ancona's study about fish captures in the Adriatic Sea before and during the Great War. D'Ancona realized the number of predators had grown considerably during the war years and this fact disoriented him since precisely those years fishing activity was significantly reduced. Nonetheless Volterra's model was able to explain and predict with accuracy the variations on the number of predators and preys.

This first predator-prey model only counted on the changes in time of the total number of the species involved product of its interaction. The model was improved with years and spatial dynamics of the species within the ecosystem started to be also considered, i.e. the model turned into a partial differential equations system. First of all it was Alan Turing¹⁰ who introduced diffusion of species, which was in accordance with the early studied brownian motion which was characteristic of the dynamics of a wide variety of species. Around 1970, Keller and Segel in a joint work, see [26] and [27], enclosed the phenomenon of chemotaxis in the predator-prey model so as to study the concentration of amoeba *Dyctiostelium discoideum*.

Chemotaxis is a chemical-biological process through which some species are able to detect chemical substances around the ecosystem's environment and direct their movement towards the regions in which the concentration gradient of the chemical substance is higher or lower. The modeling problem here is a fascinating and a formidable one involving fluid mechanics and infiltration theory on quite a different scales at the same time (see J.D. Murray's text about mathematical biology [34]). This phenomenon is not only important in ecology but also in medicine or biology. There are thousands of biological processes in which chemotaxis plays a crucial role, for instance, the mechanism used by some antibiotics such that they are able to find the specific bacteria though the blood in the human body is also related to chemotaxis. Mathematically speaking models which consider the effect of chemotaxis are difficult to study since the chemotactic term involves the gradient of different functions, it is nonlinear and hence one cannot apply the classical theory of linear partial differential equations. As it is known nonlinear or quasi-linear equations present difficulties in order to analyze them because in many cases blow-up appears and solutions are no longer defined for all positive times. Therefore it is convenient to be careful while introducing terms like this in predator-preys models.

The model we aim to study along this Thesis is a predator-prey model with diffusion and chemotaxis. It arises as a generalization of the predator-prey models studied by Kuwamura [28], Jin and Wang [23], Wu, Shi and Wu [48] and Wu, Wang and Shi [49]. While Kuwamura proposes a predator-prey model without chemotaxis but with an extra term related to the dormant predators (resting eggs or predators on hibernation state), the rest of the authors introduce predator-prey models with chemotaxis but without dormant predators. Chemotaxis is presented on the predators equation in [23] (Jin, Wang) and [48] (Wu, Shi, Wu) whereas it is placed on the preys term in [49] (Wu, Wang, Shi).

The main objective of this Thesis is to propose a new model considering both the dormant predators equations and the phenomenon of chemotaxis. First of all we came up with a model with chemotaxis on the predators equation which forces them to move towards the regions in

⁸A.J. Lotka. *Undamped oscillations derived from the law of mass action*. J. Amer. Chem. Soc. 1920.

⁹V. Volterra. *Var. flutt. del numero d'individui in specie animali conviventi*. Mem. Acad. Lincei. 1926.

¹⁰A.M. Turing. *The chemical basis of morphogenesis*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1952.

which the density of dormant predators is larger, as a product of a protective instinct to defend the dormant and defenseless members of their species. Furthermore we add another chemotactic term with a different chemotactic response function on the preys equation, which makes them move towards the regions in which the density of the dormant predators is larger as well. In biological terms this can be analyzed as a trap the predators set in order to force their preys to move towards the regions of their interest.

On a mathematical level all this considerations can be translated defining a bounded, open domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ with smooth boundary $\partial\Omega$ and the functions,

$$(u, v, w) : \bar{\Omega} \times (0, T_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

where u represents the density of predators in the ecosystem, v the density of preys and w the density of dormant predators. Hence the system of our new model is defined as follows.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) + h_1(u, v, w, x) & \text{in } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ v_t = \Delta v - d\nabla \cdot (v\mu(w)\nabla w) + h_2(u, v, x), & \text{in } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ w_t = h_3(u, v, w, x), & \text{in } \Omega \times (0, T_{\max}), \end{cases} \quad (1)$$

with homogeneous Neumann-type boundary conditions,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial \mathbf{n}}, \quad \text{in } \partial\Omega \times (0, T_{\max}), \quad (2)$$

and non negative initial data,

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, \quad w(x, 0) = w_0(x) \geq 0, \quad \text{in } \Omega. \quad (3)$$

Functions h_1 , h_2 and h_3 are of the form,

$$\begin{aligned} h_1(u, v, w, x) &= c\xi(v)\phi(u, v, x) + a(v)w - g(u, x), \\ h_2(u, v, x) &= f(v, x) - \phi(u, v, x), \\ h_3(u, v, w, x) &= c\eta(v)\phi(u, v, x) - a(v)w - n(w, x)w, \end{aligned} \quad (4)$$

and all the terms involved have a biological justification:

- $d \in \{0, 1\}$ is the coefficient which determines if either we work with one chemotaxis ($d = 0$) or either with two ($d = 1$);
- $c > 0$ represents the fraction of preys density which can be turned into predators density after consumption;
- $\chi(w)$ and $\mu(w)$ are the functions responsible for the chemotaxis;
- $f(v, x)$ represents the production of preys;
- $g(u, x)$ is the mortality rate of predators;
- $n(w, x)$ is the mortality rate of dormant predators;
- $\phi(u, v, x)$ is related to the predators consumption of preys;
- $\xi(v)$ and $\eta(v)$ are the switching functions that determine the fraction of reproductive energy split between active and dormant predators and verify $0 \leq \xi(v), \eta(v) \leq 1$ and $\xi(v) + \eta(v) = 1$;
- $a(v)$ denotes the average dormancy period.

The first result we will prove about system (1) is the global existence and uniqueness of classical solutions. We use the classical theory of quasi-linear parabolic and ordinary equations in order to obtain the local existence of solutions and thereafter, by means of the Moser-Alikakos iterative method, we find uniform bounds in $L^\infty(\Omega)$ so as to obtain the global-in-time existence of solutions. All the hypotheses named in the following Theorems are explained in detail on Chapter 1. The main result about this section states as follows.

Theorem 1 (Global existence and uniqueness of classical solutions). *Let Ω a bounded domain in \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) with smooth boundary $\partial\Omega$. Let $d \in \{0, 1\}$, $c > 0$, $\chi(w)$, $a(v)$, $\xi(v)$, $\eta(v)$, $f(v, x)$, $g(u, x)$ and $\phi(u, v, x)$ such that the assumptions (h_0) - (h_5) are verified. Then for all $(u_0, v_0, w_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^3$, such that $u_0(x) \geq 0$, $v_0(x) \geq 0$, $w_0(x) \geq 0$ for all $x \in \bar{\Omega}$, the system (1) has a unique classical global solution $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$ which satisfies*

$$(u, v, w) \in (C([0, \infty); W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty)))^3.$$

Furthermore $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$ is uniformly bounded in $\Omega \times (0, \infty)$, i.e. there is a constant $C_1(u_0, v_0, w_0) > 0$ such that $\|u(t)\|_{L^\infty} + \|v(t)\|_{L^\infty} + \|w(t)\|_{L^\infty} \leq C_1$ for all $t \geq 0$.

Once the global existence of classical solutions for the model is assured, we study the asymptotic behavior of the solutions, this is, the dynamics of solutions for the different admissible initial data. For this analysis we will consider a less general version of the model (1) in which $\Phi(u, v, x) = u\Phi(v)$ and functions $f(v)$, $g(u)$ and $n(w)$ do not depend explicitly on $x \in \Omega$. moreover some additional hypotheses are considered that will be exposed on the next Chapter. The main result of this second part of the Thesis states as follows, where constant $D > 0$ is related to the mortality rate of predators as $g(u) \geq Du$ and $N > 0$ is a positive value for which function $f(v)$ verifies $f(N) = 0$.

Theorem 2 (Global stability of constant stationary states). *Under the hypotheses (h_0) - (h_7) and the assumptions from Theorem 1, if $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$ ($v_0 \not\equiv 0$) and $w_0 \geq 0$ in Ω , then for system (1) with $d = 0$ the constant stationary state $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ is globally asymptotically stable. In addition if $D > 0$ is sufficiently large then for system (1) with $d = 1$ the constant stationary state $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ is globally asymptotically stable. Furthermore if $d = 0$ there exists constants $\lambda, K, t_0 > 0$ such that for all $t > t_0$,*

$$\|u\|_{L^1} + \|v - N\|_{L^2} + \|w\|_{L^1} \leq Ke^{-\lambda t}.$$

To sum up we approximate to the system (1) numerically by means of the Generalized Finite Differences Method (GFDM). This is a meshless method which happens to be powerful and useful for nonlinear partial differential equations since once the conditional convergence is proved, one can always find a distribution of point on the domain such that the condition for the time step is verified. The main result about the numerical study states as follows.

Theorem 3 (Conditional convergence of the numerical scheme). *Under hypotheses (h_0) - (h_7) , if $\chi(w)$ and $\mu(w)$ are at least twice differentiable, then the explicit GFDM numerical scheme defined in (5.6), (5.7), (5.8) is conditionally convergent for all the stars that verify some reasonable conditions which depend on the distribution of the points in the star.*

This Master's Thesis is organized as follows. First of all in Chapter 1 fundamental concepts for all the development of the Thesis are defined and some classical results which will be of help during the proofs of Theorems 1, 2 and 3 are outlined. In addition the assumptions over the functions in system (1) are formulated. In Chapter 2 the modelization process in mathematical biology is explained and the derivation of the equations (1) is shown with a biological justification. In Chapter 3 on the one hand the local-in-time existence of solutions is proved and

on the other hand some uniform bounds to the solutions in $L^\infty(\Omega)$ are found so as to obtain the global existence. In Chapter 4 the system is linearized in order to study the local stability of the constant equilibrium points. Thereafter, for the locally asymptotically stable points, a Lyapunov energy-type functional is designed and the global stability is proved. Moreover the convergence rate of solutions to the globally asymptotically stable states is computed. Finally in Chapter 5 a numerical scheme is designed for system (1) using the Generalized Finite Differences Method, the convergence of the scheme is proved and some examples in the frame of the Rosenzweig-MacArthur classical model are computed and analyzed so as to get a better visual understanding of the model.

Results about global existence of solutions for the system (1) with $d = 0$ have been published in *Comptes Rendus Mathématique*, [13]. Results about the existence of solutions with $d = 1$ and the asymptotic behavior have been redacted as a preprint to be published, [15]. For the numerical results jointly with the Rosenzweig-MacArthur examples, a manuscript has been prepared as well and sent to be published, [14].

Introducción

La historia de las ciencias naturales está repleta de momentos de éxito en los que un modelo matemático es capaz de predecir el comportamiento del mundo natural y del Universo. Desde el movimiento de las estrellas por la bóveda celeste hasta la velocidad del efecto de una sustancia química en el cuerpo humano, el desarrollo de las ciencias naturales ha ido históricamente ligado a la evolución de herramientas y modelos matemáticos capaces de empujar la frontera del conocimiento un poco más allá. Los avances en campos de la matemática más abstracta implican evolución y descubrimientos en áreas de las ciencias naturales que, en principio, no tienen una relación cercana. Del mismo modo, las limitaciones del desarrollo científico en física, química o biología vienen irremediablemente impuestas por las limitaciones matemáticas a la hora de estudiar los modelos de ecuaciones que rigen la dinámica de los fenómenos que se intentan explicar mediante el método científico.

La relación entre modelos matemáticos y física fue la primera en fortalecerse de manera más evidente. Isaac Newton¹¹ necesitó definir nuevos conceptos matemáticos que sentaron las bases del cálculo diferencial para poder desarrollar su modelo físico sobre las fuerzas que se ejercen las masas entre sí. Los avances de Emmy Noether¹² en teoría de anillos, cuerpos y álgebras durante el primer tercio del siglo XX dieron lugar a todo el desarrollo matemático del celebrado Modelo Estándar de la física de partículas. A veces algunos modelos matemáticos desarrollados para explicar un aspecto concreto de la naturaleza entran en conflicto con ideas culturales o antiguos cánones científicos aceptados sobre otros fenómenos naturales. James C. Maxwell¹³ propuso en 1865 un modelo matemático completo que describía la dinámica del campo electromagnético, es decir, sobre el movimiento de la luz. Años más tarde, a principios del siglo XX, Albert Einstein¹⁴ se dio cuenta de que si se aceptaba el modelo de Maxwell entonces toda la dinámica clásica de Newton y Galileo era esencialmente errónea. Einstein desarrolló a partir de ahí un modelo matemático sobre la dinámica de los cuerpos en el Universo que respetaba las leyes del electromagnetismo de Maxwell, modelo que se conoce como Relatividad General¹⁵.

Los ejemplos de las revoluciones en ciencias naturales surgidas del análisis de modelos ma-

¹¹I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.

¹²E. Noether. *Invariante Variationsprobleme*. Mathematisch-Physikalische Klasse, 1918.

¹³J.C. Maxwell. *A dynamical theory of the electromagnetic field*, 1865.

¹⁴A. Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Ann. der Physik, 1905.

¹⁵A. Einstein. *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes*. Ann. der Physik, 1910.

temáticos son innumerables. En biología, medicina y ecología no obstante el desarrollo matemático ha sido bastante posterior al de la física debido a la enorme dificultad para predecir el comportamiento de entidades compuestas por millones y millones de células y procesos bioquímicos extremadamente complejos. Uno de los primeros modelos matemáticos sólidos que se propuso para explicar la dinámica de especies con relaciones de depredación en algunos ecosistemas fue el modelo de Lotka-Volterra. En primer lugar Alfred J. Lotka diseñó este modelo de ecuaciones diferenciales no lineales para explicar la teoría de las reacciones químicas autocatalíticas¹⁶, sin embargo poco tiempo después lo extendió a sistemas orgánicos utilizando especies de plantas y animales herbívoros como ejemplo¹⁷. Finalmente propuso lo que hoy conocemos como el modelo clásico de Lotka-Volterra en su libro *Elements of Physical Biology* (Williams and Wilkins, Baltimore, 1925). Paralelamente al trabajo de Lotka, el matemático italiano Vito Volterra llegó al mismo conjunto de ecuaciones¹⁸ inspirado en el estudio del biólogo Umberto D'Ancona sobre las capturas de peces en el Mar Adriático antes y durante la Primera Guerra Mundial. D'Ancona se dio cuenta de que el número de depredadores había crecido notablemente durante los años de la guerra y esto le provocaba un contrasentido, ya que durante esos años la pesca se había reducido considerablemente. El modelo de Volterra predecía perfectamente las variaciones en el número de depredadores y presas.

Este primer modelo depredador-presa solo consideraba cambios en el tiempo de la cifra total de las especies involucradas, producto de su interacción. El modelo fue perfeccionándose y comenzaron a considerarse también las dinámicas espaciales de las especies en el ecosistema, es decir, el modelo se transformó en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. En primer lugar Alan Turing¹⁹ introdujo la difusión de las especies, que encajaba puesto que incluía el fenómeno del movimiento browniano, característico de la dinámica de muchas especies. Años más tarde Keller y Segel en un trabajo conjunto, [26] y [27], incluyeron en los modelos depredador-presa el efecto de la quimiotaxis para estudiar la concentración de la ameba *Dyctiostelium discoideum*.

La quimiotaxis es un fenómeno químico-biológico por el cual algunas especies son capaces de detectar sustancias químicas en el ambiente del ecosistema y dirigir su movimiento hacia las zonas en las que el gradiente de concentración de la sustancia química es mayor o menor. El problema de modelización aquí es fascinante ya que incluye dinámica de fluidos y teoría de la filtración a muy diferentes escalas al mismo tiempo (ver el texto de J.D. Murray sobre matemática biológica [34]). Este fenómeno no es únicamente importante en ecología, ya que hay cientos de procesos biológicos en los que la quimiotaxis juega un papel crucial, por ejemplo, el mecanismo por el que un determinado antibiótico es capaz de encontrar a las bacterias objetivo a través de la sangre en el cuerpo humano también es un fenómeno relacionado con la quimiotaxis. Matemáticamente los modelos que consideran el efecto de la quimiotaxis son complicados de estudiar, ya que el término quimiotáctico involucra a los gradientes de varias funciones, es no lineal y por tanto la teoría clásica de ecuaciones en derivadas parciales lineales no puede aplicarse. Como es sabido las ecuaciones no lineales o quasi-lineales presentan comportamientos difíciles de analizar, en muchos casos aparecen fenómenos de blow-up en los que las soluciones se hacen infinito en tiempo finito y por tanto es conveniente ser cuidadosos a la hora de introducir términos de este estilo en modelos depredador-presa.

El modelo que vamos a estudiar durante todo este Trabajo Fin de Máster es un modelo depredador-presa con difusión y quimiotaxis. Parte con la idea de ser una generalización del los sistemas depredador-presa estudiados por Kuwamura [28], Jin y Wang [23], Wu, Shi y Wu [48] y

¹⁶A.J. Lotka. *Contribution to the theory of periodic reactions*. J. Phys. Chem. 1910.

¹⁷A.J. Lotka. *Undamped oscillations derived from the law of mass action*. J. Amer. Chem. Soc. 1920.

¹⁸V. Volterra. *Var. flutt. del numero d'individui in specie animali conviveti*. Mem. Acad. Lincei. 1926.

¹⁹A.M. Turing. *The chemical basis of morphogenesis*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1952.

Wu, Wang y Shi [49]. Kuwamura propone un modelo depredador-presa sin quimiotaxis pero con un término extra correspondiente a los depredadores inactivos, es decir, los huevos de depredador o depredadores en estado de hibernación. Por otro lado en el resto de trabajos se proponen unos modelos depredador-presa con quimiotaxis pero sin el término de los depredadores inactivos. La quimiotaxis se presenta en el término de los depredadores en los trabajos de Jin y Wang [23] y de Wu, Shi y Wu [48] mientras que Wu, Wang y Shi [49] la colocan en el término de las presas.

El objetivo es proponer un modelo nuevo que considere el término de los depredadores inactivos pero también el fenómeno de la quimiotaxis. A lo que llegamos es, en primer lugar a un modelo con quimiotaxis en el término de los depredadores activos que hace que dirijan su movimiento hacia las zonas de mayor densidad de depredadores inactivos, como resultado del instinto protector hacia los miembros inactivos e indefensos de la misma especie. En segundo lugar además añadimos otro término quimiotáctico en la ecuación de las presas que hace que dirijan su movimiento también a las zonas de mayor densidad de depredadores inactivos. Biológicamente esto puede interpretarse como una trampa que los depredadores activos les tienen a las presas para que acudan a unas regiones determinadas del ecosistema.

Matemáticamente estas consideraciones se traducen en que definimos un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado y con frontera $\partial\Omega$ regular y las funciones

$$(u, v, w) : \bar{\Omega} \times (0, T_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

donde u representa la densidad de depredadores activos en el modelo, v la densidad de presas y w la densidad de depredadores inactivos. Entonces el sistema que analizaremos en este Trabajo es el siguiente:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) + h_1(u, v, w, x) & \text{en } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ v_t = \Delta v - d\nabla \cdot (v\mu(w)\nabla w) + h_2(u, v, x), & \text{en } \Omega \times (0, T_{\max}), \\ w_t = h_3(u, v, w, x), & \text{en } \Omega \times (0, T_{\max}), \end{cases} \quad (1)$$

con condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneas,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial \mathbf{n}}, \quad \text{en } \partial\Omega \times (0, T_{\max}), \quad (2)$$

y con condiciones iniciales no negativas,

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, \quad w(x, 0) = w_0(x) \geq 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (3)$$

Las funciones h_1 , h_2 y h_3 tienen la siguiente forma,

$$\begin{aligned} h_1(u, v, w, x) &= c\xi(v)\phi(u, v, x) + a(v)w - g(u, x), \\ h_2(u, v, x) &= f(v, x) - \phi(u, v, x), \\ h_3(u, v, w, x) &= c\eta(v)\phi(u, v, x) - a(v)w - n(w, x)w, \end{aligned} \quad (4)$$

y todos los términos involucrados tienen una justificación biológica:

- $d \in \{0, 1\}$ es el coeficiente que determina sobre qué sistema estamos trabajando, el sistema con una quimiotaxis ($d = 0$) o el sistema con dos ($d = 1$);
- $c > 0$ representa la fracción de densidad de presas que puede convertirse en densidad de depredador tras su consumo;
- $\chi(w)$ y $\mu(w)$ son las funciones responsables de la quimiotaxis;
- $f(v, x)$ representa la producción de presas;

- $g(u, x)$ es la tasa de mortalidad de los depredadores activos;
- $n(w, x)$ es la tasa de mortalidad de los depredadores inactivos;
- $\phi(u, v, x)$ representa la tasa de consumo de presas por parte de los depredadores;
- $\xi(v)$ y $\eta(v)$ son las funciones que determinan la distribución de energía reproductora de los depredadores entre activos e inactivos y verifican $0 \leq \xi(v), \eta(v) \leq 1$ y $\xi(v) + \eta(v) = 1$;
- $a(v)$ denota el periodo de inactividad medio.

El primer resultado importante que demostraremos sobre el sistema (1) es la existencia global y unicidad de soluciones clásicas. Utilizaremos teoría clásica de ecuaciones parabólicas y ordinarias quasi-lineales para obtener la existencia local de soluciones y posteriormente, mediante el método iterativo de Moser-Alikakos, encontraremos cotas uniformes en $L^\infty(\Omega)$ obteniendo de este modo la existencia global en el tiempo de soluciones. Todas las hipótesis introducidas en el enunciado de los siguientes Teoremas se muestran en el siguiente Capítulo 1. El resultado principal de esta primer parte es el siguiente.

Teorema 1 (Existencia global y unicidad de soluciones clásicas). *Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) con frontera $\partial\Omega$ regular. Sean $d \in \{0, 1\}$, $c > 0$, $\chi(w)$, $a(v)$, $\xi(v)$, $\eta(v)$, $f(v, x)$, $g(u, x)$ y $\phi(u, v, x)$ tales que satisfacen las hipótesis (h_0) - (h_5) . Entonces para todo $(u_0, v_0, w_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^3$, tales que $u_0(x) \geq 0$, $v_0(x) \geq 0$, $w_0(x) \geq 0$ para $x \in \bar{\Omega}$, el sistema (1) tiene una única solución clásica global $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$ que satisface*

$$(u, v, w) \in (C([0, \infty); W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty)))^3.$$

Además $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$ está uniformemente acotado en $\Omega \times (0, \infty)$, es decir, existe una constante $C_1(u_0, v_0, w_0) > 0$ tal que $\|u(t)\|_{L^\infty} + \|v(t)\|_{L^\infty} + \|w(t)\|_{L^\infty} \leq C_1$ para todo $t \geq 0$.

Una vez asegurada la existencia global y la unicidad de soluciones clásicas para el modelo pasamos a estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones, es decir, la dinámica de las soluciones para los distintos datos iniciales admisibles. Para este estudio consideramos una versión menos general del modelo (1) en el que $\phi(u, v, x) = u\Phi(v)$ y las funciones $f(v)$, $g(u)$ y $n(w)$ no dependen explícitamente de $x \in \Omega$. Además se consideran unas hipótesis adicionales que se expondrán en el siguiente Capítulo. El resultado principal de esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster es el siguiente, donde se hace uso de una constante $D > 0$ relacionada con la mortalidad de los depredadores activos tal que $g(u) \geq Du$ y de $N > 0$, un valor para el que la función $f(v)$ verifica $f(N) = 0$.

Teorema 2 (Estabilidad global de los puntos estacionarios constantes). *Supongamos que se verifican las hipótesis (h_0) - (h_7) y las del Teorema 1. Si $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$ ($v_0 \neq 0$) y $w_0 \geq 0$ en c.t.p. Ω , entonces para el sistema (1) con $d = 0$, el punto estacionario constante $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ es globalmente asintóticamente estable. Si además la constante $D > 0$ es suficientemente grande, entonces para el sistema (1) con $d = 1$, el punto estacionario constante $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ es globalmente asintóticamente estable. Además si $d = 0$ existen constantes $\lambda, K, t_0 > 0$ tales que se verifica que para todo $t > t_0$,*

$$\|u\|_{L^1} + \|v - N\|_{L^2} + \|w\|_{L^1} \leq Ke^{-\lambda t}.$$

Finalmente realizamos una aproximación numérica al modelo (1) mediante el método de Diferencias Finitas Generalizadas. Este es un método sin malla muy útil para el estudio numérico de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales ya que una vez demostrada la convergencia condicional, siempre podremos encontrar una distribución de puntos en el dominio de forma que se cumpla la condición para el paso temporal. El resultado principal de esta última sección es el siguiente.

Teorema 3 (Convergencia condicional del esquema numérico). *Bajo las hipótesis (h_0) - (h_7) , si $\chi(w)$ y $\mu(w)$ son al menos dos veces diferenciables, entonces el esquema numérico de Diferencias Finitas Generalizadas explícito definido en (5.6), (5.7), (5.8) es condicionalmente convergente para todas las estrellas que verifiquen unas condiciones razonables que dependen de la distribución de puntos en la estrella.*

Este Trabajo Fin de Máster se organiza de la siguiente manera. En primer lugar en el Capítulo 1 se definen conceptos fundamentales para todo el desarrollo matemático y se enuncian algunos resultados clásicos importantes que se utilizarán en las demostraciones de los Teoremas 1, 2 y 3. Además se exponen las hipótesis a las que se someten las funciones del sistema (1). En el Capítulo 2 se explica el proceso de modelización en matemática biológica y se deduce el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (1) explicando las justificaciones biológicas. En el Capítulo 3 se demuestra en primer lugar la existencia local en el tiempo de soluciones para luego encontrar cotas uniformes en $L^\infty(\Omega)$, lo que nos permite asegurar la existencia global. En el Capítulo 4 se linealiza el sistema para estudiar la estabilidad local de los puntos estacionarios constantes. Posteriormente, para los puntos localmente asintóticamente estables se define un funcional de energía de tipo Lyapunov y se demuestra la estabilidad asintótica global. Además se calcula la tasa de convergencia de las soluciones a los puntos de equilibrio constantes globalmente asintóticamente estables. Finalmente en el Capítulo 5 se diseña un esquema numérico para el sistema (1) utilizando el método de Diferencias Finitas Generalizadas, se demuestra la convergencia del método y se analizan algunos ejemplos concretos utilizando las funciones del modelo clásico depredador-presa de Rosenzweig-MacArthur.

Los resultados de existencia global de soluciones para el sistema con $d = 0$ los hemos publicado en *Comptes Rendus Mathématique*, [13]. Los resultados sobre existencia de soluciones con $d = 1$ y comportamiento asintótico los hemos redactado y enviado como manuscrito para su publicación, [15]. Del mismo modo hemos preparado y enviado para su publicación otro manuscrito [14] que incluye la discretización del sistema, la demostración de la convergencia del método numérico y algunos ejemplos concretos utilizando el modelo de Rosenzweig-MacArthur.

Capítulo 1

Resultados previos

En este capítulo se recogen algunos resultados previos que se utilizarán en las demostraciones a lo largo del trabajo, así como las hipótesis con las que trabajaremos.

1.1. Resultados previos

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y con frontera regular.

Definición 1.1. Sea $1 \leq p < \infty$, se define el espacio de Lebesgue $L^p(\Omega)$ como

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f|^p < \infty\}.$$

Para $p = \infty$ se define el espacio de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ como

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists M \text{ tal que } |f| \leq M < \infty \text{ en c.t.p. de } \Omega\}.$$

Definimos las normas $\|\cdot\|_{L^p}$ y $\|\cdot\|_{L^\infty}$ en los espacios $L^p(\Omega)$ con $p < \infty$ y $L^\infty(\Omega)$ respectivamente como sigue,

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{M \geq 0 \mid |f| \leq M \text{ en c.t.p.}\}.$$

Además $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ con $1 \leq p \leq \infty$ es un espacio de Banach y $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} fg \quad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

Definición 1.2. Definimos los siguientes espacios de Sobolev,

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \int_{\Omega} |\nabla u|^p \leq C < \infty\},$$

$$H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq C < \infty\},$$

$$W^{q,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^s u \in L^p(\Omega), \forall 0 \leq |s| \leq q\},$$

equipados con la norma

$$\|u\|_{W^{q,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \sum_{|s| \leq q} \|D^s u\|_{L^p}^p)^{1/p}.$$

Además $(W^{q,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{q,p}})$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$ y $q \geq 1$ y $(H^q(\Omega) \equiv W^{q,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{q,2}(\Omega)})$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{H^q(\Omega)} = \int_{\Omega} fg + \sum_{|s| \leq q} \int_{\Omega} D^s f \cdot D^s g \quad \forall f, g \in H^q(\Omega).$$

Lema 1.1 (Desigualdad de Hölder). Sean $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ con p y q conjugados tal que $1 = 1/p + 1/q$ con $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Lema 1.2 (Desigualdad de Jensen). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Si $u \in L^1(\Omega)$ entonces,

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u).$$

En particular para todo $m \geq 1$ y para todo $u \in L^1(\Omega)$ se verifica que,

$$\frac{1}{|\Omega|^{m-1}} \left(\int_{\Omega} u\right)^m \leq \int_{\Omega} u^m.$$

Lema 1.3 (Desigualdades de Young). Sean $a, b > 0$, entonces para todo $1 < p, q < \infty$ que verifiquen

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

se cumple

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En particular para todo $\varepsilon > 0$ se verifica,

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Definición 1.3. Sea un polinomio $p(x)$ de grado n con coeficientes $a_k \in \mathbb{R}$, que escribimos de la forma,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde suponemos que $a_n \neq 0$. Se define la tabla de Routh como sigue,

$$\begin{array}{ccccccc} r_{(1,1)} & r_{(1,2)} & r_{(1,3)} & \cdots & r_{(1,N)} & & \\ r_{(2,1)} & r_{(2,2)} & r_{(2,3)} & \cdots & & & \\ r_{(3,1)} & r_{(3,2)} & r_{(3,3)} & \cdots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ r_{(n+1,1)} & & & & & & \end{array}$$

donde $N = n/2 + 1$ si n par y $N = (n-1)/2 + 1$ si n impar. Los coeficientes $r_{(i,j)}$ se definen,

1. $r_{(1,j)} = a_{n-2j+2}$, es decir, $r_{(1,1)} = a_n$, $r_{(1,2)} = a_{n-2}$, etc.
2. $r_{(2,j)} = a_{n-2j+1}$, es decir, $r_{(2,1)} = a_{n-1}$, $r_{(2,2)} = a_{n-3}$, etc.

3. Para el resto de elementos $r_{(i,j)}$ se sigue la siguiente relación de recursividad,

$$r_{(i,j)} = r_{(i-2,j+1)} - \frac{r_{(i-2,1)}}{r_{(i-1,1)}} r_{(i-1,j+1)}.$$

Para el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones es necesario aplicar el siguiente criterio al polinomio característico de la matriz de la linealización alrededor de los puntos estacionarios.

Teorema 1.1 (Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz). *Sea un polinomio $p(x)$ de grado n con coeficientes $a_k \in \mathbb{R}$ que escribamos de la forma,*

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde suponemos que $a_n \neq 0$. Entonces se verifica,

1. Si algunos de los coeficientes a_k es cero o negativo ante la presencia de al menos un coeficiente positivo, entonces hay al menos una raíz imaginaria o que tiene parte real positiva, es decir, el sistema no es estable.
2. El número de raíces del polinomio $p(x)$ con parte real positiva es igual al número de cambios de signo en la sucesión $r_{(j,1)}$ de términos de la primera columna de la tabla de Routh.
3. Todas las raíces del polinomio $p(x)$ tienen parte real negativa y por lo tanto el sistema es estable si y solo si todos los coeficientes del polinomio son positivos y todos los términos de la primera columna de la tabla de Routh tienen signo positivo.

Teorema 1.2 (Principio del Máximo para ecuaciones parabólicas). *Sea \mathcal{L} un operador uniformemente elíptico y sea una función $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T]) \cap C^2(\Omega \times (0, T))$ definida en $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ que satisfice*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u = f$$

en el dominio abierto $\Omega \times (0, T)$ donde los coeficientes a_{ij} constituyen una matriz simétrica localmente definida positiva en $\Omega \times (0, T)$, con $b_i(x,t), c(x,t)$ localmente acotados para todo $i = 1, \dots, n$ y $f(x,t) \geq 0$ en $\Omega \times (0, T)$. Si existe $x_0 \in \Omega \times (0, T)$ tal que $u(x_0) = \min_{x \in \bar{\Omega} \times [0, T]} u$ y si $u(x_0) \leq 0$, entonces u es constante en $\Omega \times (0, T)$.

Corolario 1.1 (al Principio del Máximo). *Sea $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T]) \cap C^2(\Omega \times (0, T))$ que satisfice (1.2) $f \geq 0$ en $\Omega \times (0, T)$ bajo las mismas hipótesis que en el Teorema. Si $u \geq 0$ en la frontera de $\Omega \times (0, T)$,*

1. o bien $u > 0$ en $\Omega \times (0, T)$,
2. o bien $u \equiv 0$ en $\Omega \times (0, T)$.

Lema 1.4 (Principio de Comparación). *Sea la ecuación diferencial escalar,*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

donde $f(t, u)$ es continua en t y localmente Lipschitz en u para todo $t \geq 0$ y todo $u \in \Omega$. Sea $[0, T_{max})$ el intervalo maximal de existencia de la solución $u(t) \in \Omega$. Sea $v(t) \in \Omega$ una función continua cuya derivada lateral derecha D^+v satisface la desigualdad diferencial,

$$D^+v(t) \leq f(t, v), \quad v(0) \leq u_0,$$

para todo $t \in [0, T_{max})$. Entonces $v(t) \leq u(t)$ para todo $t \in [0, T_{max})$.

Teorema 1.3 (Desigualdades de Gagliardo-Nirenberg). Sea $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Fijamos dos números reales $1 \leq q, r \leq \infty$ y un número natural m . Consideramos $\alpha \in \mathbb{R}$ y $j \in \mathbb{N}$ tales que verifican

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) \alpha + \frac{1-\alpha}{q}, \quad \frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1.$$

Entonces se cumple que:

1. si $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y $D^m u \in L^r(\mathbb{R}^n) \Rightarrow D^j u \in L^p(\mathbb{R}^n)$,
2. existe una constante $C = C(m, n, j, q, r, \alpha)$ tal que

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq C \|D^m u\|_{L^r}^\alpha \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}.$$

Además si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ está definida en un dominio acotado y regular $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ las hipótesis anteriores dan como resultado que para un $s > 0$ arbitrario existen constantes $C_1, C_2 \geq 0$ tales que

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq C_1 \|D^m u\|_{L^r}^\alpha \|u\|_{L^q}^{1-\alpha} + C_2 \|u\|_{L^s}.$$

Lema 1.5 (Alikakos). Sea $m \geq 1$ y sea $w(x, t)$ solución de,

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta(|w|^m \operatorname{sgn} w) + B(x, t)w & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \leq 0 & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ w(x, 0) = w_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

donde $w_0 \in L^\infty(\Omega)$. Sean c_1 y c_2 constantes que verifican que $B(x, t) < c_1$ y

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} |w|^m dx < c_2.$$

Entonces existe una constante c_3 tal que,

$$\sup_{t \geq 0} \|w\|_{L^\infty} < c_3 \max \left\{ 1, \sup_{t \geq 0} \left(\int_{\Omega} |w|^m dx \right)^{1/m}, \|w_0\|_{L^\infty} \right\}.$$

Teorema 1.4 (Principio de invariancia de LaSalle). Sea $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable y sea

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid E(x) \leq c\}$$

actodo tal que $\dot{E} \leq 0$ para todo $x \in \Omega_c$. Definimos $S \subset \Omega_c$ como

$$S = \{x \in \Omega_c \mid \dot{E}(x) = 0\}$$

y llamamos M al mayor subconjunto invariante de S . Entonces, para todo $x_0 \in \Omega_c$, toda trayectoria $\phi(t; t_0, x_0)$ tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$.

1.2. Hipótesis

Para la demostración del Teorema 1 tenemos que trabajar bajo unas hipótesis razonables con sentido biológico y matemático. Estas hipótesis son referidas al sistema de ecuaciones en derivadas parciales principal de este trabajo (1).

- En primer lugar es necesario que las funciones correspondientes a las condiciones iniciales verifiquen que,

$$(u_0, v_0, w_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^3$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$. Además deben verificar las condiciones de contorno homogéneas de Neumann,

$$\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w_0}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Con respecto a las funciones implicadas en el sistema (1) las hipótesis que deben verificar para los resultados sobre la existencia global de soluciones son las siguientes:

- (h₀) Las funciones $g, n : [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$, $a : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f : [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : [0, \infty) \times [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$ y $\xi, \eta : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ son al menos de clase C^2 y verifican $f(0, x) = 0$, $g(0, x) = 0$, $a(v)$ es no decreciente con $a(0) = 0$, $\phi(u, 0, x) = 0$ y $\phi(0, v, x) = 0$ para todo $u, v \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$.
- (h₁) $\exists B > 0$ tal que $\phi(u, v, x) \leq Bu$ para todo $u, v \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$.
- (h₂) Las funciones respuesta de la quimiotaxis $\chi, \mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ verifican $\chi, \mu \in C^{1+\theta} \cap L^1[0, \infty)$ para $\theta > 0$.
- (h₃) $\exists D > 0$ tal que $g(u, x) \geq Du$ para todo $u \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$, $n(w) > D$ para todo $w \geq 0$, y que verifica que $D > cB$.
- (h₄) $\exists E, F > 0$ tal que $f(v, x) \leq Ev - Fv^2$ para todo $v \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$.
- (h₅) $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tal que $h_3(0, 0, w) \geq -\delta_1/\chi(w)$ y $h_3(0, 0, w) \geq -\delta_2/\mu(w)$, para todo valor de w . Además en relación a las constantes de las hipótesis (h₁) y (h₃), δ_1 verifica que $\delta_1 < D - cB$.

Observación 1.1. Típicamente en los sistemas depredador-presa con un término ordinario $w_t = h(u, v, w)$, se suele imponer la siguiente hipótesis adicional.

- (h_{*}) Las derivadas de la función $h_3(u, v, w)$ de (1) con respecto a u y v verifican que,

$$\left. \frac{\partial h_3}{\partial u} \right|_{(u,v,w)} \geq 0, \quad \left. \frac{\partial h_3}{\partial v} \right|_{(u,v,w)} \geq 0,$$

para todo valor de u, v y w .

Para nuestro estudio no es necesario imponer dicha condición ya que esto se deduce del resto de hipótesis planteadas.

En relación con los resultados sobre estabilidad y comportamiento asintótico, además de (h₁)-(h₅) hay que considerar las siguientes hipótesis:

- (h₆) $\phi(u, v) = u\Phi(v)$ donde la función $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es al menos de clase C^1 y verifica
 - $\Phi(0) = 0$,
 - $\Phi'(v) > 0$ para todo $v \geq 0$,
 - existe $\omega > 0$ tal que $\Phi'(v) \geq \omega\Phi(v)^2$ para todo $v \geq 0$.

(h₇) La función $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida a través de $f(v)$ y $\Phi(v)$ como $\sigma(v) = f(v)/\Phi(v)$ es de clase C^1 y verifica

- $\sigma(0) > 0$,
- existe $N > 0$ tal que $\sigma(N) = 0$ y si $v \neq N$ verifica $\sigma(v)(v - N) < 0$,
- existe $M \in (0, N)$ tal que $\sigma'(v) > 0$ si $v \in [0, M)$ y $\sigma'(v) < 0$ si $v \in (M, N]$.

Capítulo 2

Modelización

En este capítulo se expone la modelización de un sistema depredador-presa con quimiotaxis y con tres ecuaciones correspondientes a la población de depredadores activos, presas y depredadores inactivos.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$ regular. Sea $t_0 \geq 0$ un instante inicial y un conjunto arbitrario $\omega \subset \Omega$. Sea $\mathbf{z} : [t_0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ la densidad de las poblaciones $\mathbf{z} = (u, v, w)$, con $u, v, w \in \mathbb{R}^+$. Es decir, la cantidad de miembros de las especies u , v y w por unidad de volumen n -dimensional en el punto $x \in \Omega$ y el instante $t \in [t_0, T)$. La ecuación de continuidad en su forma integral resulta,

$$\underbrace{\int_{\omega} \mathbf{z}(t, x) dx}_{\text{población en } t} = \underbrace{\int_{\omega} \mathbf{z}(t_0, x) dx}_{\text{población en } t_0} - \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{\partial\omega} (T \cdot \mathbf{n}) d\sigma}_{\text{flujo en la frontera}} + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{\omega} \mathbf{h}(\mathbf{z}, t, x) dx dt}_{\text{creación/destrucción}}, \quad (2.1)$$

donde:

1. El término de la izquierda se refiere a la densidad de las especies $\mathbf{z} = (u, v, w)$ en el instante $t \geq t_0$ que se encuentra en el interior de ω .
2. T es un tensor que representa el flujo de la densidad de especies \mathbf{z} a través de la frontera del recinto, cuyo vector normal es \mathbf{n} . Este flujo puede depender de varios factores. Si las poblaciones \mathbf{z} sufren difusión, es decir, los individuos son separados debido a su densidad de población, tienden a ocupar todo el dominio, habrá un término $-\nabla \mathbf{z}$. La difusión es un término importante en el flujo pero no es el único. La quimiotaxis es un proceso biológico a través del cual algunas especies son capaces de dirigir su movimiento dependiendo de la concentración de ciertas sustancias químicas en el ambiente. Por ejemplo, como se indica en [34], la polilla de la seda hembra *Bombyx mori* exuda una feromona llamada bombykol que es un atractor del macho de la misma especie. Los machos de *Bombyx mori* poseen una eficiente antena que es capaz de detectar en qué zonas se encuentra una concentración mayor de bombykol y dirigir su movimiento hacia ellas. Los primeros en explicar matemáticamente este proceso fueron Keller y Segel [26], [27] a principios de los años 70, y lo hicieron con un término del estilo $\mathbf{p}\Upsilon(\mathbf{q})\nabla\mathbf{q}$, donde \mathbf{q} es la densidad de las especies que producen las sustancias químicas y \mathbf{p} la densidad de las especies que son capaces de detectar las sustancias químicas. El signo de $\Upsilon(q)$ indica si la sustancia química es un *químioatractor* (signo +) o un *químiorepelente* (signo -).
3. $\mathbf{h}(\mathbf{z}, t, x)$ es una función que incluye la creación y destrucción de las especies y las relaciones entre ellas. Es decir incluye tasas de natalidad, de mortalidad, de depredación, de competición, de simbiosis... Los términos positivos en \mathbf{h} se llaman con frecuencia términos de *reacción*, y junto con el proceso de difusión dan luego a los *sistemas de reacción-difusión*, muy utilizados para describir matemáticamente desde la dinámica de un fluido hasta la dinámica de un ecosistema.

En (2.1) reagrupamos los dos primeros términos y aplicamos el teorema de la divergencia a la integral del flujo para obtener

$$\int_{\omega} (\mathbf{z}(x, t) - \mathbf{z}(x, t_0)) dx = - \int_{t_0}^t \int_{\omega} (\nabla \cdot T) dx dt + \int_{t_0}^t \int_{\omega} \mathbf{h}(\mathbf{z}, t, x) dx dt.$$

Con el objetivo de agrupar todo bajo una misma integral podemos escribir el término de la izquierda,

$$\int_{\omega} (\mathbf{z}(x, t) - \mathbf{z}(x, t_0)) dx = \int_{t_0}^t \int_{\omega} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} dx dt.$$

Ahora suponemos que en el término de flujo T de la población \mathbf{z} hay difusión y quimiotaxis quimioatractora para proceder con el cálculo. Entonces podemos sustituir la expresión de $T = -\nabla \mathbf{z} + \mathbf{p}\Upsilon(\mathbf{q})\nabla \mathbf{q}$,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{\omega} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} dx dt &= \int_{t_0}^t \int_{\omega} \Delta \mathbf{z} dx dt - \int_{t_0}^t \int_{\omega} \nabla \cdot (\mathbf{p}\Upsilon(\mathbf{q})\nabla \mathbf{q}) dx dt + \int_{t_0}^t \int_{\omega} \mathbf{h}(\mathbf{z}, t, x) dx dt, \\ \int_{t_0}^t \int_{\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} - \Delta \mathbf{z} + \nabla \cdot (\mathbf{p}\Upsilon(\mathbf{q})\nabla \mathbf{q}) - \mathbf{h}(\mathbf{z}, t, x) \right) dx dt &= 0. \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis de que todas las funciones en las integrales son continuas y como ω y t son arbitrarios, tenemos como resultado que la función entre paréntesis ha de ser idénticamente nula. Llegamos a así a la siguiente ecuación en derivadas parciales,

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} - \Delta \mathbf{z} + \nabla \cdot (\mathbf{p}\Upsilon(\mathbf{q})\nabla \mathbf{q}) - \mathbf{h}(\mathbf{z}, t, x) = 0. \quad (2.2)$$

Durante todo el resto de este trabajo vamos a estudiar dos modelos de ecuaciones en derivadas parciales de tres ecuaciones $\mathbf{z} = (u, v, w)$ del tipo parabólico-parabólico-ordinario. En ambos modelos la primera función $u : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ indica la densidad de depredadores activos del ecosistema que modelizamos. La ecuación correspondiente con la dinámica de la primera especie u es,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) + h_1(u, v, w). \quad (2.3)$$

Se aprecia que u sufre un proceso de difusión. Además u tiene un término quimiotáctico que es quimioatractor, es decir, que hace que u dirija su movimiento hacia las zonas en las que la densidad de la especie w es mayor. Además la sensibilidad de esta quimiotaxis viene dada por la función positiva $\chi(w)$.

Por otro lado la función $v : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ se corresponde con la densidad de presas. Las ecuaciones que modelan la dinámica de las presas v se pueden escribir como,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - d\nabla \cdot (v\mu(w)\nabla w) + h_2(u, v), \quad (2.4)$$

donde $d \in \{0, 1\}$ es un coeficiente que determinará en cada momento qué modelo aplica. Cuando $d = 0$ entonces tendremos un sistema con una sola quimiotaxis que obliga a la especie u a moverse hacia las zonas de mayor densidad de w mientras que si $d = 1$ entonces el modelo aplica para un ecosistema en el que hay dos procesos de quimiotaxis, tanto en depredadores activos u con sensibilidad quimiotáctica $\chi(w) \geq 0$, como en presas v , con sensibilidad quimiotáctica $\mu(w) \geq 0$. Ambas especies dirigen su movimiento hacia las zonas de mayor abundancia de la especie w .

Vemos además que v también sufre un proceso de difusión y es interesante que el término sin derivadas h_2 solo depende de los depredadores activos u y de las propias presas v .

Por último la función $w : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ representa la densidad de depredadores inactivos, es decir, huevos de depredador o depredadores en estado de hibernación dependiendo de a qué ecosistema se aplique este modelo, ver [28] y [35]. Su ecuación de continuidad por tanto no presenta ningún proceso de difusión puesto que se presupone que los depredadores activos no puede desplazarse por medios propios, su densidad cambiará en el espacio únicamente dependiendo de los lugares en los que dicha especie aparezca. Es decir, o bien donde los depredadores activos pongan los huevos o bien donde comienzcen la hibernación. Esta ecuación es de la forma de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = h_3(u, v, w). \quad (2.5)$$

A la hora de determinar la forma de las funciones $h_1(u, v, w)$, $h_2(u, v, w)$ y $h_3(u, v, w)$ hemos decidido diseñar un modelo que generalizara otros sistemas con quimiotaxis y con término de depredadores inactivos. Para ello en primer lugar estudiamos el modelo presentado por Kuwamura en [28], donde hay sistema depredador-presa clásico, de reacción-difusión, con término de depredadores inactivos pero sin quimiotaxis. Kuwamura propone un sistema del tipo,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c\xi(v)u\Phi(v) + a(v)w - g(u), \\ v_t = \Delta v + f(v) - u\Phi(v), \\ w_t = c\eta(v)u\Phi(v) - a(v)w - n(w)w. \end{cases} \quad (2.6)$$

En este sistema el escalar $c > 0$ denota la fracción de biomasa de las presas que puede ser convertida en biomasa de los depredadores. $\xi(v)$ y $\eta(v)$ denotan la distribución de energía reproductora de los depredadores entre activos e inactivos respectivamente. Además esta funciones verifican $0 \leq \xi(v), \eta(v) \leq 1$ y $\xi(v) + \eta(v) = 1$ para todo $v \geq 0$. $\Phi(v)$ es la respuesta funcional que determina la tasa de depredación de los depredadores activos sobre las presas. $a(v)$ determina el periodo de incubación o de hibernación de los depredadores inactivos. $f(v)$ representa la tasa de natalidad de las presas mientras que $g(u)$ y $n(w)$ representan las tasas de mortalidad de los depredadores activos e inactivos respectivamente. Por otro lado se considera que la tasa de mortalidad de las presas está totalmente gobernada por la tasa de depredación $u\Phi(v)$ así como las tasas de natalidad de depredadores activos e inactivos son directamente proporcionales a la tasa de depredación, $c\xi(v)u\Phi(v)$ y $c\eta(v)u\Phi(v)$ respectivamente.

Por otro lado hemos estudiado en relación a estos modelos depredador-presa de reacción-difusión con quimiotaxis pero sin término de depredadores inactivos los siguientes modelos:

1. En primer lugar un modelo con prey-taxis o quimiotaxis quimioattractora en el término de los depredadores,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(v)\nabla v) + c\phi(u, v) - g(u), \\ v_t = \Delta v + f(v) - \phi(u, v). \end{cases} \quad (2.7)$$

Este sistema clásico presenta una quimiotaxis en el término de los depredadores hacia las presas con sensibilidad quimiotáctica $\chi(v)$. El resto de términos del sistema son análogos a los de Kuwamura con $w = 0$ y donde $\phi(u, v) = u\Phi(v)$. La existencia global de soluciones para este sistema fue probada por Wu, Shi y Wu en [48] mientras que el comportamiento asintótico de las soluciones fue estudiado por Jin y Wang en [23].

2. Por otro lado consideramos un modelo análogo pero con predator-taxis, es decir, con quimiotaxis en el término de las presas que les fuerza a dirigir su movimiento en contra de las direcciones en las que la densidad de depredadores crece.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c\phi(u, v) - g(u), \\ v_t = \Delta v + \nabla \cdot (v\chi(u)\nabla u) + f(v) - \phi(u, v). \end{cases} \quad (2.8)$$

Tanto la existencia global como el comportamiento asintótico de las soluciones de este modelo han sido estudiados por Wu, Wang y Shi en [49].

Los modelos que vamos a estudiar durante este Trabajo Fin de Master se basan en los modelos de Kuwamura [28], Wu, Shi y Wu [48], Jin y Wang [23] y Wu, Wang y Shi [49]. Consideramos de este modo un sistema depredador-presa de reacción-difusión con término de depredadores inactivos y dos quimiotaxis. Vamos a estudiar por separado el efecto de una quimiotaxis en el término de los depredadores activos y el efecto de dos quimiotaxis, la anterior más una en el término de las presas. Ambas quimiotaxis van dirigidas hacia los depredadores inactivos. Este proceso tiene su justificación biológica en el instinto natural de los depredadores activo de reunirse con sus huevos o el resto de depredadores que está en hibernación.

Por su parte es interesante analizar un sistema en el que las presas son ajenas a las dinámicas de los depredadores (no pueden identificarlos y huir como en [49]) y un sistema más complejo en el que las presas acuden a las zonas en las que la densidad de depredadores inactivos es mayor, como una suerte de trampa que los depredadores pueden colocar para hacer que las presas acudan. Sobre la justificación biológica de estas dinámicas depredador-presa puede encontrarse más información en el libro *Mathematical Biology* de Murray, [34].

Además de las ecuaciones del sistema es importante señalar que las condiciones de contorno típicas son condiciones de Neumann homogéneas, es decir, condiciones sobre las derivadas espaciales de las funciones evaluadas en la frontera del dominio Ω . Estas condiciones biológicamente se traducen en que el sistema es cerrado, no puede entrar ni salir a través de la frontera biomasa de las especies que se consideran. No quiere decir esto que la masa total del sistema se conserve, eso dependerá de la constante $c > 0$, ya que indica la fracción de biomasa de la presa que se transforma en biomasa de los depredadores tras el proceso de depredación, así como como de las tasas de mortalidad $g(u)$ y $n(w)$.

Si $\mathbf{n}(x) \in \mathbb{R}^n$ es el vector normal exterior a todo $x \in \partial\Omega$, las condiciones de Neumann homogéneas se escriben matemáticamente como,

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial \mathbf{n}(x)} \equiv \nabla u(t, x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0, \quad \frac{\partial v(t, x)}{\partial \mathbf{n}(x)} \equiv \nabla v(t, x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0, \quad \frac{\partial w(t, x)}{\partial \mathbf{n}(x)} \equiv \nabla w(t, x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0,$$

para todo $(t, x) \in [t_0, T) \times \partial\Omega$.

Finalmente consideramos datos iniciales positivos y suficientemente regulares y obtenemos de este modo que para $d \in \{0, 1\}$ los modelos que vamos a estudiar son,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) + c\xi(v)\phi(u, v) + a(v)w - g(u) \\ v_t = \Delta v - d\nabla \cdot (v\mu(w)\nabla w) + f(v) - u\Phi(v) \\ w_t = c\eta(v)\phi(u, v) - a(v)w - n(w)w \end{array} & \begin{array}{l} \text{en } [t_0, T) \times \Omega, \\ \text{en } [t_0, T) \times \Omega, \\ \text{en } [t_0, T) \times \Omega, \end{array} \\ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \\ (u, v, w)(0, x) = (u_0, v_0, w_0)(x) \in (\mathbb{R}^+)^3 \end{array} & \begin{array}{l} \text{en } [t_0, T) \times \partial\Omega, \\ \text{en } \Omega. \end{array} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Capítulo 3

Existencia global de soluciones clásicas

En este capítulo se estudia la existencia, unicidad y regularidad de soluciones de los sistemas depredador-presa con quimiotaxis y término de depredadores inactivos (1). Como se ha explicado, inspirados en las investigaciones de Kuwamura [28], Jin y Wang [23] y de Wu, Wang y Shi [49], [48] planteamos dos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, uno con término quimiotáctico en presas y depredadores activos y otro solo en depredadores activos. Es decir,

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) + c\xi(v)\phi(u, v) + a(v)w - g(u), \\ v_t = \Delta v - d\nabla \cdot (v\mu(w)\nabla w) + f(v) - \phi(u, v), \\ w_t = c\eta(v)\phi(u, v) - a(v)w - n(w)w, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $d \in \{0, 1\}$ y $\xi(v) + \eta(v) = 1$ para todo v .

Además asumimos que el sistema tiene condiciones de contorno de Neumann homogéneas y las condiciones iniciales positivas y en $W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & x \in \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \Omega, \\ w(x, 0) = w_0(x) \geq 0 & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

Como hemos mencionado en capítulos anteriores, si quitamos los términos quimiotácticos $\chi = 0$, $\mu = 0$, obtenemos el sistema estudiando por Kuwamura en [28] de modo que así conocemos sus puntos estacionarios y la condiciones de estabilidad de dichos puntos. Esta configuración nos es favorable ya que se puede entender así este modelo como una generalización de los modelos de Kuwamura y Wu, Wan y Shi o Wu, Shi y Wu de modo que podemos comprobar en los casos límite que este nuevo modelo sea coherente con los ya estudiados en [28], [23], [48] y [49]. Los resultados obtenidos sobre existencia para el sistema (3.1) los hemos publicado en [13] y [15].

A lo largo de este capítulo nos vamos a centrar en demostrar la existencia global uniforme de soluciones de estos sistemas utilizando técnicas clásicas para sistemas del tipo parabólico-parabólico-ordinario. Para ello imponemos sobre las funciones del sistema unas hipótesis iniciales con sentido biológico que nos aseguran la existencia en los casos extremos en los que el sistema coincide con [28] y [48]. Recordemos las hipótesis que necesitamos a continuación imponer sobre las funciones del sistema (3.1).

(h₀) Las funciones $g, n : [0, \infty) \times \overline{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$, $a : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f : [0, \infty) \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : [0, \infty) \times [0, \infty) \times \overline{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$ y $\xi, \eta : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ son al menos de clase C^2 y verifican

$f(0, x) = 0$, $g(0, x) = 0$, $a(v)$ es no decreciente con $a(0) = 0$, $\phi(u, 0, x) = 0$ y $\phi(0, v, x) = 0$ para todo $u, v \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$.

(h₁) $\exists B > 0$ tal que $\phi(u, v, x) \leq Bu$ para todo $u, v \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$.

(h₂) Las funciones respuesta de la quimiotaxis $\chi, \mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ verifican $\chi, \mu \in C^{1+\theta} \cap L^1[0, \infty)$ para $\theta > 0$.

(h₃) $\exists D > 0$ tal que $g(u, x) \geq Du$ para todo $u \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$, $n(w) > D$ para todo $w \geq 0$, y que verifica que $D > cB$.

(h₄) $\exists E, F > 0$ tal que $f(v, x) \leq Ev - Fv^2$ para todo $v \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$.

(h₅) $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tal que $h_3(0, 0, w) \geq -\delta_1/\chi(w)$ y $h_3(0, 0, w) \geq -\delta_2/\mu(w)$, para todo valor de w . Además en relación a las constantes de las hipótesis (h₁) y (h₃), δ_1 verifica que $\delta_1 < D - cB$.

3.1. Existencia local de soluciones

Para demostrar la existencia global de las soluciones obtenemos en primer lugar la existencia local con argumentos clásicos de ecuaciones en derivadas parciales y después encontramos cotas uniformes en el tiempo para concluir la demostración. Para todo ello necesitamos utilizar, entre otros, dos resultados de Amann [3] y [4], el Lema de Comparación, el Principio del Máximo de Hopf y el Teorema de Alikakos [1] expuesto en el Capítulo 1 de Resultados Previos. El resultado de existencia local se enuncia en los siguientes cuatro Lemas. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera regular y las condiciones iniciales $(u_0, v_0, w_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^3$ para $p > n$ con $u_0, v_0 \geq 0$, además bajo las hipótesis (h₀)-(h₄) se verifican los siguientes resultados.

Lema 3.1. *Existe una constante positiva T_{max} tal que el sistema (1) tiene una única solución clásica no negativa $(u(x, t), v(x, t), w(x, t)) \in (C([0, T_{max}]; W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{max})))^3$.*

Demostración. Para demostrar este punto necesitamos enunciar un resultado de Amann [3] que nos da la existencia de soluciones locales de manera bastante directa para sistemas de ecuaciones de evolución de reacción-difusión como el que se presenta en nuestro problema.

Lema 3.2 (Amann). *Sea $p \in (1, \infty)$, N el número de ecuaciones escalares en el sistema de ecuaciones y V el conjunto de funciones pertenecientes a $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ con condiciones homogéneas de Neumann en $\partial\Omega$. Sea $\mathcal{A}(u)$ una matriz $N \times N$ que incluye explícitamente las segundas derivadas espaciales de u de la forma*

$$\mathcal{A}(u)u = -\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\alpha_{jk} \frac{\partial u}{\partial x^k} \right)$$

Análogamente sea $\mathcal{B}(u)$ la misma matriz que \mathcal{A} pero evaluada en la frontera de Ω . Dada una función $u_0 \in V$, consideramos el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(u)u = f(\cdot, u, \partial u) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \mathcal{B}(u)u = 0, & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0, & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

Entonces existe una solución maximal única,

$$u(\cdot, u_0) \in C([0, t(u_0)), V) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, t(u_0)), \mathbb{R}^N),$$

donde $0 < t(u_0) \leq \infty$.

Para poder aplicar este resultado definimos $\omega = (u, v, w)$ de modo que el sistema (1) se puede escribir en forma matricial como,

$$\begin{cases} \omega_t = \nabla \cdot (\alpha(\omega)\nabla\omega) + \Phi(\omega) & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ \omega(x, 0) = (u_0(x), v_0(x), w_0(x)), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

donde

$$\alpha(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u\chi(w) \\ 0 & 1 & -dv\mu(w) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\Phi(\omega, \partial\omega) = \begin{pmatrix} c\xi(v)\phi(u, v) + a(v)w - g(u) \\ f(v) - \phi(u, v) \\ c\eta(v)\phi(u, v) - a(v)w - n(w)w \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Expresar de este modo nuestro sistema nos permite hacer la asociación $\mathcal{A}(\omega)\omega = -\nabla \cdot (\alpha(\omega)\nabla\omega)$ y $f(\cdot, \omega, \partial\omega) = \Phi(\omega, \partial\omega)$. Esto directamente nos permite aplicar el Lema 3.2 ya que se verifican todas las hipótesis necesarias, y por tanto se concluye que existe una constante $T_{\max} \equiv t(\omega_0) > 0$ tal que existe una solución maximal única,

$$\omega(x, t) \in (C([0, T_{\max}], W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max}]))^3.$$

□

Lema 3.3. *La masa total de $u(x, t)$, $v(x, t)$ y $w(x, t)$ satisface*

$$\int_{\Omega} u(x, t)dx \leq U_1, \quad \int_{\Omega} v(x, t)dx \leq V_1, \quad \int_{\Omega} w(x, t)dx \leq W_1 \quad \forall t \in (0, T_{\max}),$$

donde

$$V_1 = \max \left\{ \|v_0\|_{L^1}, \frac{E}{F}|\Omega| \right\}, \quad U_1 = W_1 = \max \left\{ \|u_0 + w_0 + cv_0\|_{L^1}, \frac{c(E+D)V_1}{D} \right\}.$$

Demostración. A continuación pasamos a estudiar el punto 2 que nos habla sobre la acotación de las soluciones en $L^1(\Omega)$. Para resolver este punto necesitamos aplicar un resultado general derivado del Lema de Gronwall (ver Capítulo 1). Este lema, que a veces se denomina Lema de Comparación, es una generalización del Lema de Gronwall y su demostración puede encontrarse en [16].

Lema 3.4 (versión generalizada del Lema de Gronwall). *Sea $y(t)$ una función no negativa que satisface la inecuación,*

$$\frac{dy}{dt} \leq k_0 + ay - by^q,$$

con condiciones iniciales $y(0) = y_0$, donde $k_0, a, b \geq 0$ y $q > 1$. Entonces, si Y es el máximo valor de y para el que $f(y) = k_0 + ay - by^q = 0$, existe una constante positiva $K = \max\{y_0, Y\}$ de modo que,

$$y(t) \leq K.$$

Si $q = 1$ entonces el Lema aplica del mismo modo pero con $a = 0$.

Comenzamos por la acotación para $v(t, x)$. Integramos en todo el dominio Ω la segunda ecuación de (1) ya que podemos utilizar las condiciones de contorno homogéneas de Neumann para que la integral del laplaciano y la integral del término quimiotáctico (para el caso $d = 1$) desaparezcan de la ecuación. También utilizamos que $\phi(u, v) \geq 0$ y la hipótesis (h₄),

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v = \int_{\Omega} f(v) - \int_{\Omega} \phi(u, v) \leq \int_{\Omega} (Ev - Fv^2).$$

Ahora utilizamos la desigualdad de Hölder con los conjugados $p = q = 1/2$ de manera clásica de modo que obtenemos que,

$$\int_{\Omega} v \leq \left(\int_{\Omega} v^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} 1^2 \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} v^2 \right)^{1/2} |\Omega|^{1/2} \Leftrightarrow \int_{\Omega} v^2 \geq \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} v \right)^2.$$

Así pues obtenemos que la norma en $L^1(\Omega)$ de v verifica,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \leq E \int_{\Omega} v - \frac{F}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} v \right)^2.$$

A continuación podemos utilizar el resultado anterior, Lema 3.4 donde $k_0 = 0$, $a = E > 0$ y $b = F/|\Omega| > 0$, lo que implica que

$$\int_{\Omega} v \leq V_1 = \max \left\{ \|v_0\|_{L^1}, \frac{E}{F} |\Omega| \right\}.$$

Para hallar la acotación de u y w consideramos la combinación lineal $u + w + cv$. Sumamos la primera, la tercera y la segunda ecuación multiplicada por c de (1), de modo que obtenemos la expresión,

$$u_t + w_t + cv_t = d\Delta u + c\Delta v - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) - d\nabla \cdot (v\mu(w)\nabla w) - g(u) + cf(v) - n(w)w.$$

Integramos esta expresión en todo el dominio Ω y utilizamos las condiciones de contorno homogéneas de Neumann para eliminar los términos con gradiente y laplaciano.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u + w + cv) = \int_{\Omega} (cf(v) - g(u) - n(w)w),$$

ahora utilizamos las hipótesis (h₃) y (h₄),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u + w + cv) &\leq c \int_{\Omega} (Ev - Fv^2) - D \int_{\Omega} u - \int_{\Omega} n(w)w \\ &\leq cE \int_{\Omega} v - D \int_{\Omega} u - \int_{\Omega} n(w)w \\ &= -D \int_{\Omega} (u + w + cv) + c(E + D) \int_{\Omega} v + \int_{\Omega} (D - n(w))w, \end{aligned}$$

por (h₃), como $n(w) \geq D$, el último término es negativo y por lo tanto podemos escribir

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u + w + cv) \leq -D \int_{\Omega} (u + w + cv) + c(E + D)V_1$$

En este punto ya podemos utilizar el Lema 3.4 de modo que en general llegamos a que

$$\int_{\Omega} (u + w + cv) \leq \max \left\{ \|u_0 + w_0 + cv_0\|_{L^1}, \frac{c(E + D)V_1}{D} \right\} =: U_1 \equiv W_1,$$

y en particular,

$$\int_{\Omega} u(t) \leq U_1, \quad \int_{\Omega} w(t) \leq W_1,$$

para todo $0 \leq t \leq T_{\max}$. □

Lema 3.5. *Existe una constante $V_\infty^0 > 0$ tal que u , w y v satisfacen*

$$0 \leq u(t, x), \quad 0 \leq w(t, x), \quad 0 \leq v(t, x), \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq t < T_{max}.$$

Además si $d = 0$ entonces $v(t, x) \leq V_\infty^0$ para todo $t \in [0, T_{max})$, $x \in \Omega$, donde

$$V_\infty^0 = \text{máx} \left\{ 1, \|v_0\|_{L^\infty}, \sup_{t \in [0, T_{max})} \|v\|_{L^1} \right\}.$$

Demostración. Para demostrar el tercer Lema comenzamos estudiando la positividad de la función w . Para ello aplicamos el Teorema del Valor Medio, de modo que existen $\xi_1 \geq 0$ y $\xi_2 \geq 0$ tales que se verifica

$$\frac{\partial w}{\partial t} = h_3(u, v, w) = \frac{\partial h_3}{\partial u} \Big|_{(\xi_1, v, w)} u + \frac{\partial h_3}{\partial v} \Big|_{(0, \xi_2, w)} v + h_3(0, 0, w). \quad (3.6)$$

Por la hipótesis (h*) obtenemos que $h_3(u, v, w) \geq h_3(0, 0, w)$ para todo valor de u , v y w . Así pues obtenemos la relación

$$\frac{\partial w}{\partial t} \geq h_3(0, 0, w) = -(a(0) + n(w))w,$$

de modo que integrando la ecuación o aplicando el Lema de Gronwall llegamos a que

$$w(t, x) \geq w_0(x) e^{-\int_0^t (a(0) + n(w(s, x))) w(s, x) ds}.$$

Con la condición inicial $w_0(x) = w(0, x) \geq 0$ en particular implica que $w(t, x) \geq 0$ para todo $(t, x) \in [0, T_{max}) \times \Omega$.

A continuación para probar la positividad de u y v vamos a utilizar directamente un argumento de Comparación consecuencia del Principio del Máximo, ver Capítulo 1. La ecuación de u en el sistema (3.1) puede escribirse como,

$$u_t - \Delta u + \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) = c\xi(v)u\Phi(v) + a(v)w - g(u),$$

es decir, utilizando las hipótesis,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \chi(w)\nabla w \cdot \nabla u + (\chi'(w)|\nabla w|^2 + \chi(w)\Delta w - cB + D)u \leq a(v)w \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

De este modo vemos que $\underline{u} \equiv 0$ verifica el sistema (3.7) y por tanto es una subsolución de la ecuación de u . Así pues por el Principio de Comparación para ecuaciones parabólicas obtenemos directamente que $u \geq 0$.

Por otro lado la ecuación de v en el sistema (3.1) puede reescribirse como

$$v_t - \Delta v + d\nabla \cdot (v\mu(w)\nabla w) = f(v) - \phi(u, v),$$

es decir, utilizando las hipótesis,

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + d\mu(w)\nabla w \cdot \nabla v + (d\mu'(w)|\nabla w|^2 + d\mu(w)\Delta w - E)v \leq 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \\ v(0, x) = v_0(x) \geq 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

De forma totalmente análoga a lo visto para u , se observa que $\underline{v} \equiv 0$ verifica el sistema (3.8) y por tanto es una subsolución de la ecuación de v , es decir $v \geq 0$.

Para demostrar que v está uniformemente acotado en tiempo y en espacio también superiormente si $d = 0$, es decir, si la ecuación de v no tiene una quimiotaxis, tenemos que utilizar un resultado de Alikakos demostrado en la referencia [1] y citado en el Capítulo 1 pero que recordamos a continuación.

Lema 3.6 (Alikakos). *Sea $m \geq 1$ y sea $w(x, t)$ solución de,*

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta(|w|^m \operatorname{sgn} w) + B(x, t)w & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \leq 0 & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ w(x, 0) = w_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

donde $w_0 \in L^\infty(\Omega)$. Sean c_1 y c_2 constantes que verifican que $B(x, t) < c_1$ y

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} |w|^m dx < c_2.$$

Entonces existe una constante c_3 tal que,

$$\sup_{t \geq 0} \|w\|_{L^\infty} < c_3 \max \left\{ 1, \sup_{t \geq 0} \left(\int_{\Omega} |w|^m dx \right)^{1/m}, \|w_0\|_{L^\infty} \right\}.$$

La segunda ecuación del sistema (1) se puede escribir utilizando la hipótesis (h₄) de manera que,

$$v_t = \Delta v + f(v) - \phi(u, v) \leq \Delta v + f(v) \leq \Delta v + Ev - Fv^2 \leq \Delta v + Ev,$$

así pues por el Lema de Comparación, una función $\varphi \in L^1(\Omega)$ que verifique $\varphi_t = \Delta\varphi + E\varphi$ con $\varphi(0) \geq v_0$, va a cumplir que $v(t) \leq \varphi(t)$ para todo $t \in [0, T_{\max})$. Ahora aplicamos el resultado de Alikakos a φ que cumple todas las hipótesis necesarias y por comparación obtenemos que v verifica que

$$\sup_{t \in [0, T_{\max})} \|v\|_{L^\infty} \leq \max \left\{ 1, \|v_0\|_{L^\infty}, \sup_{t \in [0, T_{\max})} \|v\|_{L^1} \right\} = V_\infty^0,$$

y por lo tanto tenemos que $0 \leq v \leq V_\infty^0$ para todo $(t, x) \in [0, T_{\max}) \times \bar{\Omega}$. □

Lema 3.7. *Si para cada $T > 0$ existe una constante $M_0(T)$ que depende de T y de la norma en $W^{1,p}(\Omega)$ de (u_0, v_0, w_0) tal que*

$$\|(u(t), v(t), w(t))\|_{L^\infty} \leq M_0(T), \quad 0 < T < \min\{T, T_{\max}\},$$

entonces $T_{\max} = +\infty$.

Demostración. Este último Lema es una consecuencia directa de un segundo resultado de Amann, esta vez demostrado en [4]. En las mismas condiciones en las que el Lema 3.2 de Amann aplica obtenemos el siguiente resultado.

Lema 3.8 (Amann). *Supongamos que la matriz \mathcal{A} es triangular superior y que se verifica que existe c únicamente dependiente de $|u|$ tal que*

$$|f_i(u, \partial u)| \leq c(|u|) \left(1 + |\nabla u_i|^2\right), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Además supongamos que para cada $T > 0$ existe una constante $c(T) > 0$ que depende de $\|u\|_{1,p}$ tal que

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq c(T), \quad 0 \leq t \leq \min\{T, T_{max}\},$$

entonces $T_{max} = +\infty$.

Como hemos escrito en la demostración del primer punto, nuestra matriz \mathcal{A} (3.4) es triangular superior, y los componentes del vector $f = \Phi$ verifican que,

$$\Phi_2 = f(v) - \phi(u, v) \leq Ev - Fv^2 \leq Ev$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_3 + c\Phi_2 &= -g(u) + f(v) - n(w)w \leq -Du + Ev - Fv^2 - Dw \\ &\leq -D(u + w + cv) + (Dc + E)v \leq -D(u + w + cv) + (Dc + E)Q, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las hipótesis sobre las funciones y la acotación que hemos hecho sobre v en el Lema 3.5. Así pues aplicando directamente el Lema de Amann obtenemos que $T_{max} = \infty$, es decir, las soluciones existen para todo $t \geq 0$. \square

3.2. Acotación uniforme en $L^p(\Omega)$ y existencia global

En esta sección vamos a estudiar las acotaciones en $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. En particular nos interesa la acotación uniforme en $L^\infty(\Omega)$ de las funciones u , v y w del sistema (1). Para el caso en el que $d = 0$, es decir, para el sistema con sólo un término quimiotáctico, ya hemos demostrado en el Lema 3.5 la acotación uniforme en $L^\infty(\Omega)$ de v . No obstante de la acotación u y w y de v en el sistema con $d = 1$ sólo conocemos una cota en $L^1(\Omega)$.

Para obtener el resultado que buscamos utilizamos el denominado *método iterativo de Moser-Alikakos*, que consiste en multiplicar las ecuaciones por una función específica que nos ayude a encontrar cotas las funciones en L^p con p cada vez mayor para así, recursivamente, llegar a una acotación L^∞ para $p \rightarrow \infty$.

Para las demostraciones que vamos a realizar a continuación vamos a definir unas funciones auxiliares $F_1, F_2 : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ relacionadas con el término quimiotáctico del sistema,

$$F_1(w) = \exp \left\{ \int_0^w \chi(s) ds \right\}, \quad F_2(w) = \exp \left\{ \int_0^w \mu(s) ds \right\}, \quad (3.9)$$

donde w es la variable correspondiente a la densidad de depredadores inactivos, solución de la tercera ecuación de (3.1) y $\chi(w)$, $\mu(w)$ las funciones responsables de la quimiotaxis. Estas aplicaciones cumplen la siguiente propiedad, $F_1'(w) = \chi(w)F_1(w)$, $F_2'(w) = \mu(w)F_2(w)$. Además volvemos a utilizar la notación $w_t = h_3(u, v, w)$ donde aplica la hipótesis (h_*) para la función $h_3(u, v, w)$. También definimos la norma en $L^1(0, \infty)$ de las funciones χ y μ como,

$$\|\chi\|_1 = \int_0^\infty \chi(s) ds, \quad \|\mu\|_1 = \int_0^\infty \mu(s) ds.$$

Proposición 3.1. Sea $p > 1$ y sea (u, v, w) solución de (1). Definimos $F_1(w)$ función positiva tal y como en (3.9). Si se verifican las hipótesis (h_0) - (h_5) , entonces existe una constante $N_1 > 0$ de modo que

$$\int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} \leq N_1,$$

donde $N_1 = \|u_0^p F_1(w_0)^{1-p}\|_{L^1}$.

Demostración. Vamos a utilizar el método de Moser-Alikakos, esto es, calculamos la derivada temporal de la integral sobre todo Ω de $u^p F_1(w)^{1-p}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} &= p \int_{\Omega} u^{p-1} u_t F_1(w)^{1-p} + (1-p) \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{-p} F_1'(w) w_t \\ &= p \int_{\Omega} u^{p-1} u_t F_1(w)^{1-p} + (1-p) \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} \chi(w) h_3(u, v, w) \\ &= p \int_{\Omega} u^{p-1} F_1(w)^{1-p} (\Delta u + c\xi(v)\phi(u, v) + a(v)w - g(u) - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w)) \\ &\quad + (1-p) \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} \chi(w) h_3(u, v, w). \end{aligned}$$

En primer lugar nos fijamos en la parte de la expresión que incluye las derivadas espaciales,

$$p \int_{\Omega} u^{p-1} F_1(w)^{1-p} (\Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w)) = p \int_{\Omega} u^{p-1} F_1(w)^{1-p} \nabla \cdot (\nabla u - u\chi(w)\nabla w),$$

a continuación utilizamos la integración por partes y las condiciones de Neumann homogéneas en la frontera, es decir, $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$ y $\nabla w \cdot \mathbf{n} = 0$ en $\partial\Omega$,

$$p \int_{\Omega} u^{p-1} F_1(w)^{1-p} (\Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w)) = -p \int_{\Omega} \nabla (u^{p-1} F_1(w)^{1-p}) \cdot (\nabla u - u\chi(w)\nabla w). \quad (3.10)$$

Operamos a continuación para obtener una expresión explícita del gradiente de $u^{p-1} F_1(w)^{1-p}$,

$$\begin{aligned} \nabla (u^{p-1} F_1(w)^{1-p}) &= (p-1)u^{p-2} F_1(w)^{1-p} \nabla u + u^{p-1} (1-p) F_1(w)^{1-p} \chi(w) \nabla w = \\ &= (p-1)u^{p-2} F_1(w)^{1-p} (\nabla u - u\chi(w)\nabla w), \end{aligned}$$

de modo que la expresión (3.10) finalmente toma la forma,

$$p \int_{\Omega} u^{p-1} F_1(w)^{1-p} (\Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w)) = -p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} F_1(w)^{1-p} (\nabla u - u\chi(w)\nabla w)^2,$$

por lo que como $u \geq 0$, $F_1(w) > 0$ y $p > 1$, obtenemos que

$$p \int_{\Omega} u^{p-1} F_1(w)^{1-p} (\Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w)) \leq 0,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} &\leq p \int_{\Omega} u^{p-1} F_1(w)^{1-p} (c\xi(v)\phi(u, v) + a(v)w - g(u)) \\ &\quad + (1-p) \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} \chi(w) h_3(u, v, w). \end{aligned} \quad (3.11)$$

A continuación estudiamos el último sumando a la derecha de la desigualdad en (3.11), aplicando las hipótesis (h_5) y (h^*) sobre la función $h_3(u, v, w)$,

$$\begin{aligned} -(p-1) \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} \chi(w) h_3(u, v, w) &\leq -(p-1) \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} \chi(w) h_3(0, 0, w) \\ &\leq \delta_1 (p-1) \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p}. \end{aligned}$$

Para el primer sumando a la derecha de la desigualdad en (3.11) también podemos operar utilizando la expresión explícita de $h_3(u, v, w)$, la relación $\xi(v) + \eta(v) = 1$ y las hipótesis (h_0) - (h_5) , de modo que,

$$\begin{aligned} c\xi(v)\phi(u, v) + a(v)w - g(u) &= c\xi(v)\phi(u, v) - g(u) + c\eta(v)\phi(u, v) - n(w)w - h_3(u, v, w) \\ &= c\phi(u, v) - g(u) - n(w)w - h_3(u, v, w) \\ &\leq c\phi(u, v) - g(u) - n(w)w - h_3(0, 0, w) \\ &= c\phi(u, v) - g(u) \leq cBu - Du. \end{aligned}$$

Finalmente utilizando estos dos últimos resultados, (3.11) toma la expresión,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} &\leq p(cB - D) \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} + \delta_1(p - 1) \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} \\ &= (p(cB - D) + \delta_1(p - 1)) \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} \\ &= (p(cB - D + \delta_1) - \delta_1) \int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p}. \end{aligned}$$

Así pues en este punto podemos utilizar el Lema 3.4 ya que por la hipótesis (h_5) tenemos que $D > cB + \delta_1$, y entonces $p(cB - D + \delta_1) - \delta_1 < 0$ para todo $p > 1$. Utilizando el Lema de Comparación obtenemos que,

$$\int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} \leq \|u_0^p F_1(w_0)^{1-p}\|_{L^1} = \int_{\Omega} u_0^p F_1(w_0)^{1-p} \equiv N_1 < \infty.$$

□

Teorema 3.1. *Sea (u, v, w) solución de (1). Si se verifican las hipótesis (h_0) - (h_5) y $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, entonces $u \in L^\infty(\Omega)$ y está uniformemente acotado en el tiempo por una constante $U_\infty > 0$,*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq U_\infty,$$

donde U_∞ verifica,

$$U_\infty = \exp(\|\chi\|_1) \|u_0 F_1(w_0)^{-1}\|_{L^\infty}.$$

Demostración. Partimos del resultado de la Proposición 3.1. Es decir, sabemos que

$$\int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} \leq \int_{\Omega} u_0^p F_1(w_0)^{1-p} = \int_{\Omega} \left(\frac{u_0}{F_1(w_0)} \right)^p F_1(w_0). \quad (3.12)$$

Por otro lado tenemos que $\chi \in L^1[0, \infty)$ y $\chi \geq 0$, lo que implica entonces que la función $F_1(w)$ es una función acotada de la siguiente manera,

$$F_1(w) = \exp \left\{ \int_0^w \chi(s) ds \right\} \leq \exp \left\{ \int_0^\infty \chi(s) ds \right\} = \exp(\|\chi\|_1).$$

Como $p > 1$, podemos utilizar el valor de la cota superior de $F_1(w)$ para escribir que,

$$\int_{\Omega} u^p F_1(w)^{1-p} \geq \exp((1-p)\|\chi\|_1) \int_{\Omega} u^p = \exp((1-p)\|\chi\|_1) \|u\|_{L^p}^p,$$

y también en el otro lado de la desigualdad de (3.12) tenemos que,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{u_0}{F_1(w_0)} \right)^p F_1(w_0) \leq \exp(\|\chi\|_1) \int_{\Omega} \left(\frac{u_0}{F_1(w_0)} \right)^p,$$

de modo que juntando estos dos últimos resultados obtenemos

$$\begin{aligned} \exp((1-p)\|\chi\|_1)\|u\|_{L^p}^p &\leq \exp(\|\chi\|_1) \int_{\Omega} \left(\frac{u_0}{F_1(w_0)} \right)^p, \\ \|u\|_{L^p}^p &\leq \frac{\exp(\|\chi\|_1)}{\exp((1-p)\|\chi\|_1)} \int_{\Omega} \left(\frac{u_0}{F_1(w_0)} \right)^p = \exp(p\|\chi\|_1) \left\| \frac{u_0}{F_1(w_0)} \right\|_{L^p}^p, \\ \|u\|_{L^p} &\leq \exp(\|\chi\|_1) \left\| \frac{u_0}{F_1(w_0)} \right\|_{L^p}, \end{aligned}$$

lo que nos da una cota para u en L^p , para todo $p > 1$. Ahora como esta relación se verifica para todo $p > 1$, podemos tomar el límite cuando $p \rightarrow \infty$ tal y como justifica Alikakos en [2], de modo que obtenemos

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \exp(\|\chi\|_1) \left\| \frac{u_0}{F_1(w_0)} \right\|_{L^\infty} \equiv U_\infty.$$

□

Teorema 3.2. *Sea w solución de la tercera ecuación del sistema (1). Si se verifican las hipótesis (h_0) - (h_5) y $w_0 \in L^\infty(\Omega)$, entonces $\exists W_\infty > 0$ tal que $\|w\|_{L^\infty} < W_\infty$ para todo $x \in \Omega$ y $t \in [0, \infty)$, donde W_∞ toma la forma*

$$W_\infty = \text{máx} \left\{ \|w_0\|_{L^\infty}, \frac{cBU_\infty}{D} \right\}.$$

Demostración. Para la demostración de este resultado necesitamos utilizar el Lema 3.4 de acotación. Escribimos la ecuación diferencial ordinaria para w y utilizamos las hipótesis (h_1) y (h_3) así como la positividad de w y de la función α ,

$$w_t = c\eta(v)\phi(u, v) - a(v)w - n(w)w \leq cBu - (a(v) + n(w))w \leq cBu - Dw.$$

A continuación aplicamos el resultado anterior sobre la acotación de u en L^∞ de modo que nos queda una expresión a la que podemos aplicar directamente el Lema 3.4.

$$w_t \leq cBU_\infty - Dw \quad \Leftrightarrow \quad w(x, t) \leq \text{máx} \left\{ \|w_0\|_{L^\infty}, \frac{cBU_\infty}{D} \right\},$$

para todo $x \in \Omega$ y $t \in [0, \infty)$. De modo que definimos

$$W_\infty = \text{máx} \left\{ \|w_0\|_{L^\infty}, \frac{cBU_\infty}{D} \right\},$$

y por tanto $\|w\|_{L^\infty} \leq W_\infty$. □

Por último para demostrar la acotación uniforme de v en el caso en el que $d = 1$, tenemos que utilizar el método iterativo de Moser-Alikakos [2] de forma parecida al procedimiento seguido para probar la acotación de u .

Proposición 3.2. *Sea $d = 1$, $p > 1$ y sea (u, v, w) solución de (1). Definimos $F_2(w)$ función positiva tal y como en (3.9). Si se verifican las hipótesis (h_0) - (h_5) , entonces existe una constante $N_2 > 0$ de modo que*

$$\int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} \leq N_2,$$

donde

$$N_2 = \text{máx} \left\{ \int_{\Omega} v_0^p F_2(w_0)^{1-p}, \frac{|\Omega|}{F^p} \left(E + \frac{p-1}{p} \delta_2 \right)^p \right\}.$$

Demostración. Comenzamos la demostración calculando al derivada temporal del término que queremos acotar.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} &= p \int_{\Omega} v^{p-1} v_t F_2(w)^{1-p} + (1-p) \int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} \mu(w) h_3(u, v, w) \\ &= p \int_{\Omega} v^{p-1} F_2(w)^{1-p} (\Delta v - \nabla(v\mu(w)\nabla w)) + p \int_{\Omega} v^{p-1} F_2(w)^{1-p} (f(v) - \phi(u, v)) \\ &\quad + (1-p) \int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} \mu(w) h_3(u, v, w). \end{aligned}$$

Así pues estudiamos estos tres sumandos por separado. El primero de ellos verifica,

$$\begin{aligned} p \int_{\Omega} v^{p-1} F_2(w)^{1-p} (\Delta v - \nabla(v\mu(w)\nabla w)) &= -p \int_{\Omega} \nabla(v^{p-1} F_2(w)^{1-p}) \cdot (\nabla v - v\mu(w)\nabla w) \\ &= -p(p-1) \int_{\Omega} v^{p-2} F_2(w)^{1-p} (\nabla v - v\mu(w)\nabla w)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

El segundo,

$$\begin{aligned} p \int_{\Omega} v^{p-1} F_2(w)^{1-p} (f(v) - \phi(u, v)) &\leq p \int_{\Omega} v^{p-1} F_2(w)^{1-p} (Ev - Fv^2) \\ &= pE \int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} - pF \int_{\Omega} v^{p+1} F_2(w)^{1-p}. \end{aligned}$$

Ahora definimos un número $m > 1$ que verifique que $mp = p + 1$, y por tanto

$$v^{p+1} F_2(w)^{1-p} = v^{mp} F_2(w)^{m(1-p)} F_2(w)^{(1-m)(1-p)},$$

pero ahora utilizando la definición de $F_2(w)$ y de m ,

$$F_2(w)^{(1-m)(1-p)} = \exp \left\{ (1-m)(1-p) \int_0^w \mu(s) ds \right\} = \exp \left\{ \frac{p-1}{p} \int_0^w \mu(s) ds \right\} \geq 1$$

Entonces volviendo al desarrollo del segundo sumando, como $m > 1$, lo tenemos todo de forma adecuada para utilizar la desigualdad de Jensen tal que,

$$\begin{aligned} p \int_{\Omega} v^{p-1} F_2(w)^{1-p} (f(v) - \phi(u, v)) &\leq pE \int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} - pF \int_{\Omega} (v^p F_2(w)^{1-p})^m \\ &\leq pE \int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} - \frac{pF}{|\Omega|^{m-1}} \left(\int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} \right)^m \end{aligned}$$

Por último, para el tercer sumando, utilizando de nuevo (h₅)

$$\begin{aligned} (1-p) \int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} \mu(w) h_3(u, v, w) &\leq -(p-1) \int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} \mu(w) h_3(0, 0, w) \\ &\leq \delta_2 (p-1) \int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p}. \end{aligned}$$

Ahora volviendo a juntar todo lo que obtenemos es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} &\leq (pE + \delta_2 (p-1)) \int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} \\ &\quad - p \frac{F}{|\Omega|^{m-1}} \left(\int_{\Omega} v^p F_2(w)^{1-p} \right)^m, \end{aligned}$$

de modo que por el Lema 1.4 de Comparación obtenemos que la integral de v^p por $F_2(w)^{1-p}$ está acotada por una constante N_2 que se define como,

$$N_2 = \max \left\{ \int_{\Omega} v_0^p F_2(w_0)^{1-p}, \frac{|\Omega|}{F^p} \left(E + \frac{p-1}{p} \delta_2 \right)^p \right\}.$$

□

Teorema 3.3. Si $d = 1$ y $v_0 \in L^\infty(\Omega)$ entonces existe una constante $V_\infty^1 > 0$ tal que $\|v\|_{L^\infty} < V_\infty^1$ para todo $t \in [0, \infty)$, donde la constante está determinada por,

$$V_\infty^1 = \text{máx} \left\{ e^{\|\mu\|_1} \|v_0 F_2(w_0)^{-1}\|_{L^\infty}, \frac{e^{\|\mu\|_1}}{F} (E + \delta_2) \right\}.$$

Demostración. Para probar este resultado partimos del resultado anterior, la Proposición 3.2. Si sucede que

$$N_2 = \int_{\Omega} v_0^p F_2(w_0)^{1-p}$$

entonces obtenemos directamente la cota uniforme para la norma infinito de v exactamente del mismo que lo que hemos hecho para u en la demostración del Teorema 3.1 y entonces obtenemos que,

$$\|v\|_{L^\infty} \leq e^{\|\mu\|_1} \|v_0 F_2(w_0)^{-1}\|_{L^\infty}.$$

Si por el contrario sucede que

$$N_2 = F^{-p} |\Omega| \left(E + \frac{p-1}{p} \delta_2 \right)^p$$

entonces tenemos,

$$e^{-(p-1)\|\mu\|_1} \int_{\Omega} v^p \leq \int_{\Omega} v^p G(w)^{1-p} \leq N_2,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^p &\leq \frac{|\Omega|}{F^p} e^{(p-1)\|\mu\|_1} \left(E + \frac{p-1}{p} \delta_2 \right)^p \leq \frac{|\Omega|}{F^p} e^{p\|\mu\|_1} \left(E + \frac{p-1}{p} \delta_2 \right)^p, \\ \|v\|_{L^p}^p &\leq \int_{\Omega} \frac{e^{p\|\mu\|_1}}{F^p} \left(E + \frac{p-1}{p} \delta_2 \right)^p = \left\| \frac{e^{\|\mu\|_1}}{F} \left(E + \frac{p-1}{p} \delta_2 \right) \right\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Finalmente como la relación se verifica para todo $p > 1$ podemos tomar entonces el límite $p = \infty$, tal y como justifica Alikakos en [2],

$$\|v\|_{L^\infty} \leq \left\| \frac{e^{\|\mu\|_1}}{F} (E + \delta_2) \right\|_{L^\infty} \equiv \frac{e^{\|\mu\|_1}}{F} (E + \delta_2).$$

□

Demostración del Teorema 1. Finalmente para demostrar el Teorema 1 simplemente tenemos que tomar la existencia local de soluciones que hemos demostrado en el Lema 3.1 y la acotación uniforme en L^∞ para las tres funciones que ha sido demostrada para u en el Teorema 3.1, para v en el Lema 3.5 y el Teorema 3.3 y para w en el Teorema 3.2, donde $C_1 = U_\infty + \text{máx}\{V_\infty^0, V_\infty^1\} + W_\infty$. La existencia local más la acotación uniforme nos dan directamente el resultado de existencia global en el tiempo de soluciones. Además no solo hemos obtenido eso ya que el Lema 3.1 nos da la unicidad y nos habla de la regularidad de las soluciones del sistema (1). □

Capítulo 4

Comportamiento asintótico de las soluciones

Una vez que sabemos que los sistemas (1) tienen solución uniformemente acotada en $L^\infty(\Omega)$ el siguiente paso consiste en estudiar cómo se comportan las soluciones cuando el tiempo tiende a infinito. Ya sabemos que las soluciones están acotadas, es decir, no hay blow up, no tiende a infinito la solución. ¿Convergen las soluciones a un estado estacionario? ¿Convergen a ciclos límite? Para estudiar el comportamiento asintótico del sistema en primer lugar hay que linealizarlo para ver cuales son sus puntos estacionarios y qué naturaleza tienen. Primero debemos considerar unas nuevas hipótesis sobre las funciones del sistema.

(h₆) $\phi(u, v) = u\Phi(v)$ donde la función $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es al menos de clase C^1 y verifica

- $\Phi(0) = 0$,
- $\Phi'(v) > 0$ para todo $v \geq 0$,
- existe $\omega > 0$ tal que $\Phi'(v) \geq \omega\Phi(v)^2$ para todo $v \geq 0$.

(h₇) La función $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida a través de $f(v)$ y $\Phi(v)$ como $\sigma(v) = f(v)/\Phi(v)$ es de clase C^1 y verifica

- $\sigma(0) > 0$,
- existe $N > 0$ tal que $\sigma(N) = 0$ y si $v \neq N$ verifica $\sigma(v)(v - N) < 0$,
- existe $M \in (0, N)$ tal que $\sigma'(v) > 0$ si $v \in [0, M)$ y $\sigma'(v) < 0$ si $v \in (M, N]$.

Estas hipótesis tienen su justificación biológica y son utilizadas en los modelos de Jin y Wang [23] y de Wu, Wang y Shi [49], [48] en los que se tienen sistemas depredador-presa con quimiotaxis similares pero sin término de depredadores inactivos. Así pues el sistema del que vamos a estudiar la estabilidad local resulta,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) + c\xi(v)u\Phi(v) + a(v)w - g(u), \\ v_t = \Delta v - d\nabla \cdot (v\mu(w)\nabla w) + f(v) - u\Phi(v), \\ w_t = c\eta(v)u\Phi(v) - a(v)w - n(w)w, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde todas las funciones verifican las hipótesis (h₀)-(h₇).

4.1. Linealización y estabilidad local

Para linealizar el sistema alrededor de los puntos de equilibrio $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ escribimos la solución del sistema como

$$\begin{cases} u = \bar{u} + \epsilon\phi \\ v = \bar{v} + \epsilon\varphi \\ w = \bar{w} + \epsilon\psi \end{cases}$$

de modo que desarrollando el sistema y eliminando los términos de orden 2 o superior en ϵ resulta el sistema linealizado como sigue,

$$\begin{pmatrix} \phi_t \\ \varphi_t \\ \psi_t \end{pmatrix} = L(\chi) \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\varphi \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + J(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix},$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\bar{u}\chi(\bar{w}) \\ 0 & 1 & -d\bar{v}\mu(\bar{w}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

y J es una matriz 3×3 que solo depende de los valores estacionarios $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ con coeficientes,

$$\begin{aligned} j_{11} &= c\xi(\bar{v})\Phi(\bar{v}) - g'(\bar{u}), \\ j_{12} &= c(\xi'(\bar{v})\Phi(\bar{v}) + \xi(\bar{v})\Phi'(\bar{v}))\bar{u} + a'(\bar{v})\bar{w}, \\ j_{13} &= a(\bar{v}), \\ j_{21} &= -\Phi(\bar{v}), \\ j_{22} &= f'(\bar{v}) - \bar{u}\Phi'(\bar{v}), \\ j_{23} &= 0, \\ j_{31} &= c\eta(\bar{v})\Phi(\bar{v}), \\ j_{32} &= c(\eta'(\bar{v})\Phi(\bar{v}) + \eta(\bar{v})\Phi'(\bar{v}))\bar{u} - a'(\bar{v})\bar{w}, \\ j_{33} &= -a(\bar{v}) - n'(\bar{w})\bar{w} - n(\bar{w}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

La estabilidad del punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ se obtiene del problema de autovalores,

$$L(\chi) \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix},$$

esto es,

$$\begin{aligned} \Delta\phi - \bar{u}\chi(\bar{w})\Delta\psi + (c\xi(\bar{v})\Phi(\bar{v}) - g'(\bar{u}))\phi + \\ (c(\xi'(\bar{v})\Phi(\bar{v}) + \xi(\bar{v})\Phi'(\bar{v}))\bar{u} + a'(\bar{v})\bar{w})\varphi + a(\bar{v})\psi = \beta\phi, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\Delta\varphi - d\bar{v}\mu(\bar{w})\Delta\psi - \Phi(\bar{v})\phi + (f'(\bar{v}) - \bar{u}\Phi'(\bar{v}))\varphi = \beta\varphi, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} c\psi(\bar{v})\Phi(\bar{v})\phi + (c(\psi'(\bar{v})\Phi(\bar{v}) + \psi(\bar{v})\Phi'(\bar{v}))\bar{u} - a'(\bar{v})\bar{w})\varphi \\ - (a(\bar{v}) + n'(\bar{w})\bar{w} + n(\bar{w}))\psi = \beta\psi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si $\{\lambda_m\}$ es la sucesión de autovalores del operador $-\Delta$ con condiciones de contorno de Neumann homogéneas, entonces $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \infty$. Además si escribimos $\zeta_m(x)$ a sus correspondientes autofunciones normalizadas, $m \in \mathbb{N}$, estas forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$. Ahora por la expansión de Fourier sabemos que existen coeficientes $\{a_m\}$, $\{b_m\}$ y $\{c_m\}$ tales que

$$\phi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta_m(x), \quad \varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \zeta_m(x), \quad \psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \zeta_m(x).$$

Entonces $(\phi, \varphi, \psi) \neq (0, 0, 0)$ (no idénticamente cero) implica que $(a_m, b_m, c_m) \neq (0, 0, 0)$. Y si ahora multiplicamos (4.4), (4.5) y (4.6) por ζ_m e integramos sobre Ω , teniendo en cuenta que $\|\zeta_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} -\lambda_m a_m + \bar{u}\chi(\bar{w})\lambda_m c_m + (c\xi(\bar{v})\Phi(\bar{v}) - g'(\bar{u}))a_m + \\ (c(\xi'(\bar{v})\Phi(\bar{v}) + \xi(\bar{v})\Phi'(\bar{v}))\bar{u} + a'(\bar{v})\bar{w})b_m + a(\bar{v})c_m = \beta_m a_m, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$-\lambda_m b_m + d\bar{v}\mu(\bar{w})\lambda_m c_m - \Phi(\bar{v})a_m + (f'(\bar{v}) - \bar{u}\Phi'(\bar{v}))b_m = \beta_m b_m, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} c\eta(\bar{v})\Phi(\bar{v})a_m + (c(\eta'(\bar{v})\Phi(\bar{v}) + \eta(\bar{v})\Phi'(\bar{v}))\bar{u} - a'(\bar{v})\bar{w})b_m \\ - (a(\bar{v}) + n'(\bar{w})\bar{w} + n(\bar{w}))c_m = \beta_m c_m, \end{aligned} \quad (4.9)$$

lo que es equivalente a

$$L_m \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix} = \beta_m \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

donde los coeficientes de la matriz L_m vienen dados por,

$$\begin{aligned} \ell_{11} &= -\lambda_m + c\xi(\bar{v})\Phi(\bar{v}) - g'(\bar{u}), \\ \ell_{12} &= c(\xi'(\bar{v})\Phi(\bar{v}) + \xi(\bar{v})\Phi'(\bar{v}))\bar{u} + a'(\bar{v})\bar{w}, \\ \ell_{13} &= \bar{u}\chi(\bar{w})\lambda_m + a(\bar{v}), \\ \ell_{21} &= -\Phi(\bar{v}), \\ \ell_{22} &= -\lambda_m + f'(\bar{v}) - \bar{u}\Phi'(\bar{v}), \\ \ell_{23} &= d\bar{v}\mu(\bar{w})\lambda_m, \\ \ell_{31} &= c\eta(\bar{v})\Phi(\bar{v}), \\ \ell_{32} &= c(\eta'(\bar{v})\Phi(\bar{v}) + \eta(\bar{v})\Phi'(\bar{v}))\bar{u} - a'(\bar{v})\bar{w}, \\ \ell_{33} &= -a(\bar{v}) - n'(\bar{w})\bar{w} - n(\bar{w}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sabemos que un punto de equilibrio $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ es localmente asintóticamente estable con respecto al sistema original parabólico-parabólico-ordinario si y solo si para todo $m \in \mathbb{N}$ todos los autovalores de L_m tienen parte real negativa, y que es inestable si existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que L_m tiene al menos un autovalor con parte real positiva.

Vamos a estudiar todos los puntos de equilibrio constantes o puntos estacionarios homogéneos, es decir, los puntos en los que todas las derivadas espaciales también se anulan. Estos vienen determinados por,

$$\begin{cases} 0 = c\xi(\bar{v})\bar{u}\Phi(\bar{v}) + a(\bar{v})\bar{w} - g(\bar{u}), \\ 0 = f(\bar{v}) - \bar{u}\Phi(\bar{v}), \\ 0 = c\eta(\bar{v})\bar{u}\Phi(\bar{v}) - a(\bar{v})\bar{w} - n(\bar{w})\bar{w}. \end{cases} \quad (4.12)$$

1. En primer lugar es claro que el punto trivial $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$ es un punto estacionario homogéneo puesto que $f(0) = 0$ y $g(0) = 0$.
2. Si ahora imponemos el caso en el que no hay depredadores $\bar{u} = \bar{w} = 0$ pero sí que permitimos que haya presas $\bar{v} > 0$, nos encontramos que por la hipótesis (h₇), como $\sigma(N) = 0$ y $\sigma(v) = f(v)/\Phi(v)$ entonces f verifica que $f(N) = 0$ y por tanto el punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ es un punto estacionario homogéneo.
3. Es claro que si $\bar{u} = 0$ entonces $\bar{w} = 0$ puesto que la primera ecuación resultaría $a(\bar{v})\bar{w} = 0$ y la tercera $a(\bar{v})\bar{w} + n(\bar{w})\bar{w} = 0$ pero por las hipótesis sobre existencia de soluciones $n(w) > D > 0$ y $a(v) \geq 0$.
4. Por otro lado si consideramos el caso $\bar{w} = 0$ entonces por la primera ecuación y la hipótesis (h₃) se debe verificar que,

$$g(\bar{u}) = c\xi(\bar{v})\bar{u}\Phi(\bar{v}) \leq cB\bar{u},$$

pero $g(\bar{u}) \geq D\bar{u}$ y D verifica que $D > cB$, así pues este punto no puede verificar las hipótesis sobre existencia global.

5. Por último si consideramos un punto estacionario homogéneo en el que las tres especies coexistan, entonces con una combinación lineal de la ecuación primera y tercera obtenemos que se debe verificar,

$$n(\bar{w})\bar{w} = c\bar{u}\Phi(\bar{v}) - g(\bar{u}),$$

si bien por otro lado, por las hipótesis sobre la existencia global de soluciones, sabemos que $g(\bar{u}) \geq D\bar{u}$ y que $\Phi(\bar{v}) \leq B$, entonces $n(\bar{w})\bar{w} \leq (cB - D)\bar{u} < 0$ puesto que por la hipótesis (h₃) se verifica que $D > cB$. Esto claramente es imposible puesto que $\bar{w} \geq 0$ y $n(\bar{w}) > D > 0$. Es decir, hemos llegado a que: *el único punto estacionario constante en el que los tres términos coexisten no es admisible biológicamente porque bajo las hipótesis de existencia global de soluciones se verifica que $\bar{w} < 0$.*

De este modo llegamos a que los únicos puntos de equilibrio homogéneos admisibles por las hipótesis sobre existencia global de soluciones son $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$ y $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$. Este modelo no admite puntos de equilibrio constantes en el que depredadores y presas coexisten.

Si bien en los modelos presentados por Jin y Wang [23] y por Wu, Wang y Shi [49], [48] sí que hay un punto de equilibrio en el que depredadores y presas coexisten, y si bien es cierto que el modelo aquí presentado supone una generalización del modelo de Wu, Wang y Shi y del de Kuwamura [28], las modificaciones sobre esos sistemas que aquí se introducen no permiten recuperar en este modelo más general ese punto de equilibrio de coexistencia que vendría dado por,

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \left(\sigma(\nu), \nu, \frac{g(\sigma(\nu)) - c\xi(\nu)f(\nu)}{a(\nu)} \right) \quad (4.13)$$

donde el parámetro ν vendría determinado por $cf(\nu) - n(\bar{w})\bar{w} = 0$.

A continuación vamos a analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio homogéneos que hemos determinado utilizando argumentos clásicos sobre la matriz de la linealización alrededor de dichos puntos. El criterio general se denomina Criterio de Routh-Hurwitz y se muestra en el Capítulo 1, no obstante todo el procedimiento se basa en determinar el signo de los autovalores de la linealización, que es lo que clásicamente determina la estabilidad.

Lema 4.1. *Supongamos que se verifican las hipótesis (h₀)-(h₇). Entonces para el sistema (4.1), el punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$ es inestable.*

Demostración. La matriz de la linealización en este punto resulta,

$$L_m = \begin{pmatrix} -\lambda_m - g'(0) & 0 & a(0) \\ 0 & -\lambda_m + f'(0) & 0 \\ 0 & 0 & -n(0) \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

de modo que sus autovalores vienen dados por $\beta_1 = -\lambda_m - g'(0)$, $\beta_2 = -\lambda_m + f'(0)$ y $\beta_3 = -n(0)$. Así pues como para $m = 0$ se verifica que $\beta_2 > 0$ porque $f'(0) = \sigma(0)\Phi'(0) > 0$ entonces obtenemos que el punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio inestable. \square

Lema 4.2. *Supongamos que se verifican las hipótesis (h₀)-(h₇). Entonces para el sistema (4.1), el punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ es localmente asintóticamente estable.*

Demostración. La matriz de la linealización en el punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ resulta un poco menos fácil de manejar.

$$L_m = \begin{pmatrix} -\lambda_m + c\xi(N)\Phi(N) - g'(0) & 0 & a(N) \\ -\Phi(N) & -\lambda_m + f'(N) & d\lambda_m N \mu(0) \\ c\eta(N)\Phi(N) & 0 & -a(N) - n(0) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

Para calcular el signo de los autovalores es más sencillo proceder utilizando que en la columna central hay dos ceros, de modo que el polinomio característico $p(\beta)$ se puede escribir como sigue,

$$p(\beta) = (-\lambda_m + f'(N) - \beta) \begin{vmatrix} -\lambda_m + c\xi(N)\Phi(N) - g'(0) - \beta & a(N) \\ c\eta(N)\Phi(N) & -a(N) - n(0) - \beta \end{vmatrix}.$$

Así pues el primer autovalor se obtiene directamente, $\beta_1 = -\lambda_m + f'(N)$. Además como $f'(N) = \sigma'(N)\Phi(N)$ y $\Phi(N) > 0$, $\sigma'(N) < 0$ tenemos que $f'(N) < 0$ y por lo tanto $\beta_1 < 0$ para todo $m \geq 0$.

Para estudiar los otros autovalores nos fijamos en la traza y el determinante de la matriz del polinomio característico

$$p_m(\beta) = (-\lambda_m + f'(N) - \beta_1) \det(L_m^{1,3} - \beta I)$$

donde

$$L_m^{1,3} = \begin{pmatrix} -\lambda_m + c\xi(N)\Phi(N) - g'(0) & a(N) \\ c\eta(N)\Phi(N) & -a(N) - n(0) \end{pmatrix}.$$

Obtenemos así que los autovalores (reales) son negativos si la traza T_m del menor $L_m^{1,3}$ es negativa y el determinante D_m del menor $L_m^{1,3}$ es positivo.

$$T_m = -\lambda_m + c\xi(N)\Phi(N) - g'(0) - a(N) - n(0),$$

$$D_m = (\lambda_m + g'(0))(a(N) + n(0)) - c\Phi(N)a(N) - c\xi(N)\Phi(N)n(0).$$

Como hemos visto antes en el comentario sobre los puntos estacionarios homogéneos admisibles, las hipótesis sobre existencia global de soluciones imponen que $g(u) \geq Du$, que $\|\Phi\|_\infty \leq B$ y que $D > cB$. Esto implica en particular que

$$g(u) = g'(0)u + O(u^2) \quad \text{si } u \sim 0,$$

es decir, $g'(0) \geq D$. Entonces $g'(0) > cB \geq c\|\Phi\|_\infty \geq c\Phi(N) \geq c\xi(N)\Phi(N)$, ya que $\xi(N) \in [0, 1]$. Por tanto $T_m < 0$ para todo $m \geq 0$.

Para el determinante se razona análogamente, como $g'(0) > c\Phi(N)$, podemos escribir el determinante como

$$D_m = \lambda_m(a(N) + n(0)) + (g'(0) - c\Phi(N))a(N) + (g'(0) - c\xi(N)\Phi(N))n(0) > 0$$

para todo $m \geq 0$. Así pues se obtiene que para todos los valores de los parámetros admisibles por las hipótesis de existencia global, el punto de equilibrio $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ es localmente asintóticamente estable. \square

4.2. Estabilidad global y tasa de convergencia

En este capítulo vamos a estudiar la estabilidad global del único punto estacionario homogéneo admisible biológicamente que sabemos que es localmente asintóticamente estable, es decir el punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$. El punto estacionario trivial ya hemos obtenido que es inestable con el estudio local de modo que no es necesario ver la estabilidad global puesto que ya la conocemos.

Vamos a utilizar técnicas relacionadas con funcionales de energía de tipo Lyapunov [23]. Uno de los resultados principales que vamos a utilizar es consecuencia directa del Principio de Invarianza de la LaSalle, Teorema 1.4, cuya prueba se puede encontrar en [43]. El resultado es el siguiente.

Proposición 4.1 (Aplicación del Principio de LaSalle). *Sea $E(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E(x) \geq 0$ y $\dot{E}(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además sea*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{E} = 0\}$$

tal que no continene trayectorias triviales, es decir puntos de equilibrio para otros puntos distintos de $x = 0$. Entonces $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

4.2.1. Sistema con una quimiotaxis

Durante todo el capítulo trabajaremos bajo las hipótesis (h₀)-(h₇) y con el sistema con una única quimiotaxis $d = 0$. Como hemos mencionado en esta sección vamos a definir unos funcionales de energía de tipo Lyapunov que tienen que verificar las condiciones del Principio de LaSalle, de modo que es necesario un resultado previo que nos asegure como en el Lema 4.1 de [23] que el factor de los funcionales de energía que definiremos después relacionado con el término de las presas v es correcto.

Lema 4.3. *Sea $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que satisface la hipótesis (h₆) y sea (u, v, w) una solución de (4.1). Dada una constante $\omega > 0$, definimos la siguiente función*

$$\zeta(v) = \int_{\omega}^v \frac{\Phi(s) - \Phi(\omega)}{\Phi(s)} ds. \quad (4.16)$$

Entonces $\zeta(v)$ es una función convexa tal que $\zeta(v) \geq 0$. Si además $v \rightarrow \omega$ cuando $t \rightarrow \infty$ entonces existe una constante $T_0 > 0$ tal que para todo $t \geq T_0$ se verifica que,

$$\frac{\Phi'(\omega)}{4\Phi(\omega)}(v - \omega)^2 \leq \zeta(v) \leq \frac{\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}(v - \omega)^2. \quad (4.17)$$

Demostración. Claramente la función $\zeta(v)$ verifica que $\zeta(\omega) = 0$. Si la derivamos obtenemos que,

$$\begin{aligned} \zeta'(v) &= \frac{\Phi(v) - \Phi(\omega)}{\Phi(v)}, \\ \zeta''(v) &= \frac{\Phi'(v)\Phi(\omega)}{\Phi(v)^2}. \end{aligned}$$

De modo que $\zeta'(\omega) = 0$ y por la hipótesis (h₆) se tiene que $\zeta''(v) \geq 0$. Así pues utilizando el Teorema de Taylor sabemos que para todo $v > \omega$ existe un $\bar{v} \in [v, \omega]$ tal que la función $\zeta(v)$ se puede escribir como,

$$\zeta(v) = \frac{\zeta''(\bar{v})}{2}(v - \omega)^2 \geq 0$$

y así llegamos a que $\zeta(v)$ es convexa. Por último como $\Phi(v) > 0$ para todo $v > 0$ y $\Phi'(v) \geq 0$ obtenemos directamente que $\zeta(v) \geq 0$.

Además se sigue del hecho de $v \rightarrow \omega$ cuando $t \rightarrow \infty$ que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta(v)}{(v - \omega)^2} = \frac{1}{2} \lim_{v \rightarrow \omega} \zeta''(\bar{v}) = \frac{1}{2} \lim_{v \rightarrow \omega} \Phi(\omega) \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)^2} = \frac{\Phi'(\omega)}{2\Phi(\omega)},$$

de modo que existe una constante $T_0 > 0$ de modo que para todo $t \geq T_0$,

$$\frac{\Phi'(\omega)}{4\Phi(\omega)}(v - \omega)^2 \leq \zeta(v) \leq \frac{\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}(v - \omega)^2,$$

lo que concluye la demostración. □

El resultado demostrado en el Lema 4.3 será de utilidad en las siguientes proposiciones donde se demuestra la estabilidad global asintótica del único punto estacionario admisible no trivial, es decir, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$.

Teorema 4.1. *Supongamos que se verifican las hipótesis (h_0) - (h_7) . Entonces para el sistema (4.1) con $d = 0$, el punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ es globalmente asintóticamente estable.*

Demostración. Comenzamos definiendo la función $V : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, en el espacio

$$X = \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} \quad (4.18)$$

de la siguiente forma,

$$V(u, v, w) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} u dx + \int_{\Omega} \int_N^v \frac{\Phi(s) - \Phi(N)}{\Phi(s)} ds dx + \frac{1}{c} \int_{\Omega} w dx. \quad (4.19)$$

Ahora consideramos tripletes (u, v, w) que sean solución de (4.1) y derivamos $V(u, v, w)$ con respecto a t . Los términos Δu y $\nabla(u\chi(w)\nabla w)$ se anulan directamente por las condiciones de contorno homogéneas de tipo Neumann.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(u, v, w) &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} u_t dx + \int_{\Omega} \frac{\Phi(v) - \Phi(N)}{\Phi(v)} v_t dx + \frac{1}{c} \int_{\Omega} w_t dx \\ &\leq \int_{\Omega} \xi(v) u \Phi(v) dx + \frac{1}{c} \int_{\Omega} a(v) w dx - \frac{D}{c} \int_{\Omega} u dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\Phi(N)}{\Phi(v)} \right) (\Delta v + f(v) - u \Phi(v)) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \eta(v) u \Phi(v) dx - \frac{1}{c} \int_{\Omega} a(v) w dx - \frac{D}{c} \int_{\Omega} w dx \\ &= \int_{\Omega} u \Phi(v) dx - \frac{D}{c} \int_{\Omega} u dx - \frac{D}{c} \int_{\Omega} w dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\Phi(N)}{\Phi(v)} \right) (\Delta v + f(v) - u \Phi(v)) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\Phi(v) - \frac{D}{c} \right) u dx - \int_{\Omega} \nabla \left(1 - \frac{\Phi(N)}{\Phi(v)} \right) \cdot \nabla v dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\Phi(N)}{\Phi(v)} \right) (f(v) - u \Phi(v)) dx - \frac{D}{c} \int_{\Omega} w dx. \end{aligned}$$

Estos sumandos se pueden escribir respectivamente como sigue. En primer lugar,

$$\int_{\Omega} \nabla \left(1 - \frac{\Phi(N)}{\Phi(v)} \right) \cdot \nabla v dx = \Phi(N) \int_{\Omega} \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)^2} |\nabla v|^2 dx,$$

mientras que para el segundo podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a Φ de modo que existe un $b \in (v, N)$ o $b \in (N, v)$ dependiendo del caso tal que $\Phi(v) - \Phi(N) = \Phi'(b)(v - N)$. Así pues obtenemos que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\Phi(N)}{\Phi(v)} \right) (f(v) - u \Phi(v)) dx &= \int_{\Omega} \frac{f(v)}{\Phi(v)} (\Phi(v) - \Phi(N)) dx - \int_{\Omega} (\Phi(v) - \Phi(N)) u dx \\ &= \int_{\Omega} \Phi'(b) \frac{f(v)}{\Phi(v)} (v - N) dx - \int_{\Omega} (\Phi(v) - \Phi(N)) u dx. \end{aligned}$$

La derivada del funcional de energía resulta,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(u, v, w) &\leq \int_{\Omega} \left(\Phi(N) - \frac{D}{c} \right) u dx + \int_{\Omega} \Phi'(b)\sigma(v)(v - N) dx \\ &\quad - \Phi(N) \int_{\Omega} \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)^2} |\nabla v|^2 dx - \frac{D}{c} \int_{\Omega} w dx, \end{aligned}$$

pero ahora como $\sigma'(v)(v - N) < 0$ si $v \neq N$, $\Phi'(v) > 0$ y $\Phi(v) \geq 0$ para todo $v \geq 0$, los tres últimos sumandos son trivialmente menores que 0. Por otro lado por las hipótesis (h₁) y (h₃) se tiene que $g'(0) > c\Phi(v)$ para todo $v \geq 0$ de modo que los cuatro sumando verifican que son ≤ 0 . Entonces,

$$\frac{d}{dt}V(u, v, w) \leq 0 \quad \text{y} \quad V(u, v, w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u, v, w) = (0, N, 0),$$

y por el Principio de Invariancia de LaSalle obtenemos que el punto estacionario $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ es globalmente asintóticamente estable bajo las hipótesis indicadas. \square

A continuación es importante también estudiar el ritmo al que las soluciones cercanas al punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ tienden a dicho punto estacionario asintóticamente estable cuando t tiende a infinito. El siguiente resultado estudia la propiedad de la tasa de convergencia el único punto de equilibrio homogéneo asintóticamente estable.

Teorema 4.2. *Supongamos que se verifican las hipótesis (h₀)-(h₇) y sea (u, v, w) la solución del sistema (4.1) con $d = 0$. Entonces si $v_0(x) > M$ en casi todo punto $x \in \Omega$, existen constantes $\lambda, K > 0$ y un tiempo $t_0 > 0$ tales que*

$$\|u\|_{L^1} + \|v - N\|_{L^2} + \|w\|_{L^1} \leq Ke^{-\lambda t} \quad \text{para todo } t > t_0.$$

Demostración. En primer lugar recordamos la definición del funcional de energía de tipo Lyapunov utilizado en la Proposición anterior,

$$V(u, v, w) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} u dx + \int_{\Omega} \int_N^v \frac{\Phi(s) - \Phi(N)}{\Phi(s)} ds dx + \frac{1}{c} \int_{\Omega} w dx. \quad (4.20)$$

cuya derivada verifica,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(u, v, w) &\leq \int_{\Omega} \left(\Phi(N) - \frac{D}{c} \right) u dx + \int_{\Omega} \Phi'(\mu)\sigma(v)(v - N) dx \\ &\quad - \Phi(N) \int_{\Omega} \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)^2} |\nabla v|^2 dx - \frac{D}{c} \int_{\Omega} w dx, \end{aligned} \quad (4.21)$$

Teniendo en cuenta que $v \rightarrow N$ cuando $t \rightarrow \infty$ podemos aplicar dos veces el Teorema del Valor Medio a $\sigma(v)(\Phi(v) - \Phi(N))$ de modo que existen μ_1, μ_2 entre v y N ,

$$\Phi(v) - \Phi(N) = \Phi'(\mu_1)(v - N),$$

$$\sigma(v) - \sigma(N) = \sigma'(\mu_2)(v - N),$$

pero como $\sigma(N) = 0$, obtenemos que

$$\int_{\Omega} \frac{f(v)}{\Phi(v)} (\Phi(v) - \Phi(N)) dx = \int_{\Omega} \sigma(v) (\Phi(v) - \Phi(N)) dx = \int_{\Omega} \Phi'(\mu_1) \sigma'(\mu_2) (v - N)^2 dx.$$

Ahora considerando la derivada temporal del funcional de energía V ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(u, v, w) &\leq \left(\Phi(N) - \frac{D}{c} \right) \int_{\Omega} u dx - \Phi(N) \int_{\Omega} \Phi'(v) \left| \frac{\nabla v}{\Phi(v)} \right|^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \Phi'(\mu_1) \sigma'(\mu_2) (v - N)^2 dx - \frac{D}{c} \int_{\Omega} w dx. \end{aligned}$$

Así pues si $\mu_2 > M$, como $M < N$, entonces $\sigma'(\mu_2) < 0$ y $\Phi'(\mu_1) > 0$, de modo que podemos definir una constante

$$c_1 = \min \left\{ \frac{g'(0)}{c} - \Phi(N), -\Phi'(\mu_1) \sigma'(\mu_2), \frac{D}{c}, 1 \right\} > 0$$

tal que

$$\frac{d}{dt}V(u, v, w) \leq -c_1 \mathcal{V}(u, v, w)$$

donde

$$\mathcal{V}(u, v, w) = \int_{\Omega} u dx + \Phi(N) \int_{\Omega} \Phi'(v) \left| \frac{\nabla v}{\Phi(v)} \right|^2 dx + \int_{\Omega} (v - N)^2 dx + \int_{\Omega} w dx. \quad (4.22)$$

Ahora utilizando el resultado del Lema 4.3 sabemos que la función $\zeta(v)$ verifica

$$\zeta(v) = \int_N^v \frac{\Phi(s) - \Phi(N)}{\Phi(s)} ds \leq \frac{\Phi'(N)}{\Phi(N)} (v - N)^2$$

y por lo tanto podemos definir una constante c_2 como

$$c_2 = \max \left\{ 1, \frac{\Phi'(N)}{\Phi(N)} \right\} \geq 0$$

de modo que $V \leq c_2 \mathcal{V}$. Esto implica que podemos escribir,

$$\frac{d}{dt}V(u, v, w) \leq -c_1 \mathcal{V}(u, v, w) \leq -\frac{c_1}{c_2} V(u, v, w)$$

y por tanto aplicando el Lema de Gronwall sabemos que existen constantes $c_3, c_4 > 0$ tales que

$$V(t) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} u dx + \int_{\Omega} \int_N^v \frac{\Phi(s) - \Phi(N)}{\Phi(s)} ds dx + \frac{1}{c} \int_{\Omega} w dx \leq c_3 e^{-c_4 t}$$

para todo t suficientemente grande. Además por la definición de $V(u, v, w)$ y por el Lema 4.3 se obtiene directamente que

$$\int_{\Omega} u dx + \int_{\Omega} (v - N)^2 dx + \int_{\Omega} w dx \leq c_5 V(t)$$

$$\text{i.e. } \|u\|_{L^1} + \|v - N\|_{L^2} + \|w\|_{L^1} \leq c_6 e^{-c_7 t}$$

para todo $t > t_0$ donde t_0 viene dado por el Lema 4.3 y donde $c_6, c_7 > 0$. \square

Observación 4.1. Cuando se estudian las tasas de convergencia a los estados estacionarios constantes típicamente se miden con la norma en $L^\infty(\Omega)$, no obstante para poder trabajar con estas normas necesitamos establecer cotas en $W^{1,\infty}(\Omega)$ de las tres funciones. Con v no hay problema, utilizando resultados básicos de teoría de semigrupos como hacen Wu, Wang y Shi en [49]. Sin embargo no es posible obtener en general cotas en $L^\infty(\Omega)$ sobre el gradiente de w y por ello tenemos que conformarnos con medir la tasa de convergencia utilizando normas en $L^1(\Omega)$ y en $L^2(\Omega)$.

4.2.2. Sistema con dos quimiotaxis

Para estudiar la estabilidad global asintótica del punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ para el caso $d = 1$, es decir, cuando tenemos la quimiotaxis adicional en el término de las presas, vamos a definir un funcional de tipo Lyapunov parecido al caso con $d = 0$ pero con algunos términos extra que nos ayudarán a obtener el resultado deseado. Si bien ahora sí que tenemos que aplicar una hipótesis adicional para obtener la estabilidad global asintótica, actualmente seguimos trabajando en este resultado para mejorarlo y encontrar unas hipótesis, si cabe, más finas.

Antes de demostrar el resultado de estabilidad asintótica global con $d = 1$ necesitamos introducir un Lema algebraico que será de utilidad en la demostración del Teorema.

Lema 4.4. Sean $\alpha, \beta > 0$ y $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} < 1$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que los valores $x = \alpha + \sqrt{\alpha\beta} + \varepsilon$, $y = \beta + \sqrt{\alpha\beta}$ verifican las desigualdades

$$x + y < 1, \quad \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} < 1.$$

Demostración. Como se tiene que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} < 1$ podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 + \varepsilon < 1$. Para este valor de ε tenemos

$$\begin{aligned} x + y &= \alpha + \sqrt{\alpha\beta} + \varepsilon + \beta + \sqrt{\alpha\beta} = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 + \varepsilon < 1, \\ \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} &= \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\alpha\beta} + \varepsilon} + \frac{\beta}{\alpha + \sqrt{\alpha\beta}} < \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\alpha\beta}} + \frac{\beta}{\beta + \sqrt{\alpha\beta}} = 1, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración del Lema previo. \square

Teorema 4.3. Supongamos que se verifican las hipótesis (h_0) - (h_7) . Entonces si la constante $D > 0$ es suficientemente grande, el punto $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, N, 0)$ es globalmente asintóticamente estable para el sistema (4.1) con $d = 1$.

Demostración. Comenzamos análogamente al caso $d = 0$ definiendo el funcional de energía de tipo Lyapunov $V : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, donde el espacio X está definido en (4.18), como

$$\begin{aligned} V(u, v, w) &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} u dx + \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} \int_N^v \frac{\Phi(s) - \Phi(N)}{\Phi(s)} ds dx \\ &\quad + \frac{1}{c} \int_{\Omega} w dx + \frac{\lambda_2}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx, \end{aligned} \tag{4.23}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ son constantes positivas a determinar.

A continuación consideramos los tripletes (u, v, w) que sean solución de (4.1) y derivamos el funcional V con respecto al parámetro t . Para simplificar la notación de momento vamos a denotar la tercera ecuación de (4.1) por $w_t = h_3(u, v, w)$ como se hace en (1) y por $(h_3)_\theta$ a la derivada parcial de la función $h_3(u, v, w)$ con respecto a $\theta = u, v, w$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(u, v, w) &\leq \int_{\Omega} \left(\Phi(N) - \frac{D}{c} \right) u dx + \int_{\Omega} \Phi'(b) \sigma(v) (v - N) dx \\ &\quad - \Phi(N) \int_{\Omega} \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)^2} |\nabla v|^2 dx - \frac{D}{c} \int_{\Omega} w dx + \Phi(N) \int_{\Omega} v \mu(w) \nabla v \cdot \nabla w \\ &\quad - \lambda_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \lambda_1 \int_{\Omega} u \chi(w) \nabla u \cdot \nabla w dx \\ &\quad + \lambda_1 \int_{\Omega} (c\xi(v)\Phi(v)u^2 + a(v)wu - g(u)u) dx + \lambda_2 \int_{\Omega} (h_3)_u \nabla u \cdot \nabla w dx \\ &\quad + \lambda_2 \int_{\Omega} (h_3)_v \nabla v \cdot \nabla w dx + \lambda_2 \int_{\Omega} (h_3)_w |\nabla w|^2 dx, \end{aligned}$$

de modo que por las hipótesis (h₀)-(h₇) llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(u, v, w) &\leq \int_{\Omega} \left(\lambda_1 a(v)u - \frac{D}{c} \right) w dx - \lambda_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \lambda_1 \int_{\Omega} u \chi(w) \nabla u \cdot \nabla w dx \\ &\quad - \Phi(N) \int_{\Omega} \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)^2} |\nabla v|^2 dx + \lambda_2 c B \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx + \Phi(N) \int_{\Omega} v \mu(w) \nabla v \cdot \nabla w \\ &\quad + \lambda_2 \int_{\Omega} (h_3)_v \nabla v \cdot \nabla w dx - \lambda_2 \int_{\Omega} (a(v) + n(w) + n'(w)w) |\nabla w|^2 dx. \end{aligned}$$

Como $a(v)$ es una función no decreciente en v , se verifica $0 = a(0) \leq a(v) \leq a(V_{\infty}) \equiv A$ para todo $v \geq 0$. Además por la hipótesis (h₆) se verifica también para todo $v > 0$,

$$\omega \leq \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)^2} \leq \left\| \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)^2} \right\|_{\infty} \equiv \Theta,$$

donde $\Theta < \infty$ si $v > 0$. Definimos entonces $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ tres constantes a determinar y aplicamos con ellas la desigualdad de Young a los productos de los gradientes.

$$(\lambda_1 u \chi(w) + \lambda_2 c B) \nabla u \cdot \nabla w \leq \varepsilon_1 (\lambda_1 u \chi(w) + \lambda_2 c B)^2 |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} |\nabla w|^2,$$

$$\lambda_2 (h_3)_v \nabla v \cdot \nabla w \leq \varepsilon_2 \lambda_2 (h_3)_v^2 |\nabla v|^2 + \frac{\lambda_2}{4\varepsilon_2} |\nabla w|^2,$$

$$\Phi(N) v \mu(w) \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)^2} \nabla v \cdot \nabla w \leq \varepsilon_3 \Phi(N)^2 v^2 \left(\frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)^2} \right)^2 |\nabla v|^2 + \frac{\mu(w)^2}{4\varepsilon_3} |\nabla w|^2,$$

de modo que podemos escribir la derivada de V como,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(u, v, w) &\leq \left(\lambda_1 A U_{\infty} - \frac{D}{c} \right) \int_{\Omega} w dx \\ &\quad + (\varepsilon_1 (\lambda_1 U_{\infty} \|\chi\|_{\infty} + \lambda_2 c B)^2 - \lambda_1) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\ &\quad + (\varepsilon_2 \lambda_2 \|(h_3)_v\|_{\infty}^2 + \varepsilon_3 \Phi(N)^2 V_{\infty}^2 \Theta^2 - \Phi(N) \omega) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{4\varepsilon_1} + \frac{\lambda_2}{4\varepsilon_2} + \frac{\|\mu\|_{\infty}}{4\varepsilon_3} - \lambda_2 D \right) \int_{\Omega} |\nabla w|^2. \end{aligned}$$

Así pues buscamos constantes $\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ que verifiquen las relaciones,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad &\lambda_1 < \frac{D}{c A U_{\infty}}, \\ \text{(ii)} \quad &\varepsilon_1 (\lambda_1 U_{\infty} \|\chi\|_{\infty} + \lambda_2 c B)^2 < \lambda_1, \\ \text{(iii)} \quad &\varepsilon_2 \lambda_2 \|(h_3)_v\|_{\infty}^2 + \varepsilon_3 \Phi(N)^2 V_{\infty}^2 \Theta^2 < \Phi(N) \omega, \\ \text{(iv)} \quad &\frac{1}{4\varepsilon_1} + \frac{\lambda_2}{4\varepsilon_2} + \frac{\|\mu\|_{\infty}}{4\varepsilon_3} < \lambda_2 D. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Para cierto $\varepsilon > 0$ y $\ell = \min\{1, D\}$ elegimos

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{(c + \varepsilon)A}{4\ell U_{\infty} \|\chi\|_{\infty}^2}, \\ \lambda_1 &= \frac{\ell}{(c + \varepsilon)A U_{\infty}}, \quad \lambda_2 = \frac{\ell \|\chi\|_{\infty}}{2c(c + \varepsilon)A B}. \end{aligned}$$

Primero obtenemos (i) directamente,

$$\lambda_1 AU_\infty - \frac{D}{c} = \frac{\ell}{c + \varepsilon} - \frac{D}{c} < \frac{\ell - D}{c} \leq 0.$$

Para (ii) se verifica

$$\lambda_1 U_\infty \|\chi\|_\infty = \frac{\ell \|\chi\|_\infty}{(c + \varepsilon)A}, \quad \lambda_2 cB = \frac{\ell \|\chi\|_\infty}{2(c + \varepsilon)A},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 (\lambda_1 U_\infty \|\chi\|_\infty + \lambda_2 cB)^2 - \lambda_1 &= \frac{(c + \varepsilon)A}{4\ell U_\infty \|\chi\|_\infty^2} \frac{3\ell^2 \|\chi\|_\infty^2}{4(c + \varepsilon)^2 A^2} - \frac{\ell}{(c + \varepsilon)AU_\infty} \\ &= \frac{9\ell}{16(c + \varepsilon)AU_\infty} - \frac{\ell}{(c + \varepsilon)AU_\infty} \\ &= -\frac{7\ell}{16aU_\infty} < 0. \end{aligned}$$

A la hora de escoger ε_2 y ε_3 necesitamos hacer uso del Lema 4.4. Definimos

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1 \|\mu\|_\infty^2 \Phi(N) V_\infty^2 \Theta^2}{\omega(4D - 1)}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_1 \lambda_2^2 \|(h_3)_v\|_\infty^2}{\omega \Phi(N)(4D - 1)}.$$

Si $D > 0$ se toma lo suficientemente grande como para que se verifique $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} < 1$ entonces podemos elegir x y y como en el Lema. Si definimos,

$$\varepsilon_2 = \frac{\Phi(N)\omega}{\lambda_2 \|(h_3)_v\|_\infty^2} y, \quad \varepsilon_3 = \frac{\omega}{\Phi(N)^2 V_\infty^2 \Theta^2} x,$$

las desigualdades del Lema se pueden escribir como

$$\begin{aligned} 1 > x + y &= \frac{\varepsilon_3 \omega}{\Phi(N)^2 V_\infty^2 \Theta^2} + \frac{\varepsilon_2 \Phi(N)\omega}{\lambda_2 \|(h_3)_v\|_\infty^2}, \\ 1 > \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} &= \frac{\|\mu\|_\infty^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_3 (4D\varepsilon_1 - 1)} + \frac{\lambda_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 (4D\varepsilon_1 - 1)} \\ &= \frac{\varepsilon_1}{(4D\varepsilon_1 - 1)} \left(\frac{\|\mu\|_\infty^2}{\varepsilon_3} + \frac{\lambda_2}{\varepsilon_2} \right) \end{aligned}$$

que son las relaciones (iii) y (iv) respectivamente. Así pues obtenemos

$$\frac{d}{dt} V(u, v, w) \leq 0, \quad \frac{d}{dt} V(u, v, w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u, v, w) = (0, N, 0)$$

y por tanto por el mismo argumento que en el Teorema 4.1 obtenemos el resultado del Teorema. \square

Observación 4.2. La condición sobre $D > 0$ de ser *suficientemente grande* se puede expresar explícitamente como

$$D > \frac{1}{4\Phi(N)^2 \omega} \left[\|\mu\|_\infty \Phi(N) V_\infty \Theta + \frac{\|\chi\|_\infty \|(h_3)_v\|_\infty}{2c^2 AB} \right]^2 + \frac{U_\infty \|\chi\|_\infty^2}{cA} \quad (4.25)$$

del mismo modo que los valores explícitos de ε_2 y ε_3

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 \frac{\|\mu\|_\infty \Phi(N) V_\infty \Theta + \lambda_2 \|(h_3)_v\|_\infty}{(4D\varepsilon_1 - 1) \|(h_3)_v\|_\infty}, \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_1 \frac{\|\mu\|_\infty \Phi(N) \|v\|_\infty \Theta + \lambda_2 \|(h_3)_v\|_\infty}{\Phi(N) V_\infty \Theta (4D\varepsilon_1 - 1)}. \end{aligned}$$

Demostración del Teorema 2. El resultado principal sobre estabilidad global asintótica del único punto estacionario estable admisible se demuestra en el Teorema 4.1 para $d = 0$ sin hipótesis adicionales y para $d = 1$ en 4.3 añadiendo la condición sobre $D > 0$ (que se muestra explícitamente en (4.25)). Por otro lado la tasa de convergencia para el sistema con $d = 0$ en normas $L^1(\Omega)$ y en $L^2(\Omega)$ se demuestra en el Teorema 4.2. \square

Capítulo 5

Investigación numérica

En este capítulo vamos a estudiar el sistema (1) numéricamente ya que esta es una manera de estudiar ciertas propiedades de las ecuaciones, sobre todo las relacionadas con el comportamiento asintótico. También es una buena forma de visualizar la dinámica del sistema y comprobar así que los resultados obtenidos numéricamente y los obtenidos teóricamente están en concordancia. Para esta aproximación numérica vamos a utilizar el método clásico de diferencias finitas pero en una versión generalizada que se incluye dentro de los métodos llamados *sin malla* ya que se aplica en mallas irregulares que permiten optimizar los resultados computacionalmente. Este método de diferencias finitas generalizadas, o GFDM por sus siglas en inglés, se utiliza frecuentemente para estudiar sistemas depredador-presa con quimiotaxis por la relativa sencillez conceptual de las demostraciones de consistencia y convergencia del esquema numérico y por los buenos resultados que da pese a las no linealidades del sistema.

5.1. El método de Diferencias Finitas Generalizadas

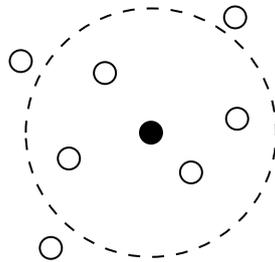
El método clásico de diferencias finitas es uno de los más utilizados a la hora de resolver ecuaciones diferenciales utilizando análisis numérico debido a lo sencillo de su esquema así como a la cantidad enorme de situaciones en las que funciona adecuadamente. No obstante este método tiene una restricción importante ya que es necesario utilizar mallas regulares, es decir, es obligatorio dividir el dominio en el que está definida la ecuación en intervalos de la misma longitud. Esto no es inconveniente en muchas ocasiones pero cuando se trabaja sobre todo con ecuaciones no lineales supone una restricción importante. Por ejemplo, en problemas de contorno el valor de la ecuación en la frontera es algo controlado y que afecta fuertemente al resultado del método numérico de resolución y si podemos distribuir la malla de modo que caigan más puntos cerca de la frontera vamos a obtener un resultado numérico mucho más preciso y cercano a la solución real de la ecuación. Además una de las mejores propiedades de los métodos sin malla (*meshless methods*) es que una vez demostrada la convergencia condicional, siempre podremos encontrar una distribución de puntos en el dominio de forma que se cumpla la condición para el paso temporal.

El método de Diferencias Finitas Generalizadas (GFDM) fue introducido a principios de los años setenta por Jensen [22]. Antes de llamar el método por el nombre que aquí se le da ya se habían enfrentado problemas numéricos utilizando diferencias finitas y dividiendo la malla irregular en subdominios regulares y posteriormente en subdominios irregulares pero con una topología restringida. Jensen en su primer resultado propuso un esquema de seis puntos denominado *estrella* de seis puntos. Mediante el uso de los desarrollos de Taylor obtuvo fórmulas en diferencias finitas que aproximaban derivadas superiores al segundo orden pero encontraba con demasiada frecuencia singularidades o mal condicionamiento del esquema de control.

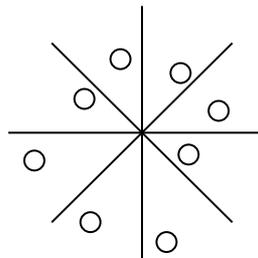
A día de hoy muchos autores han dedicado sus esfuerzos a evitar estos problemas de esquemas o estrellas incorrectas. Se han propuesto técnicas de promediado para generar los coeficientes en las fórmulas de diferencias finitas [40], triangulaciones del dominio o un sistema de coordenadas curvilíneas para transformar toda la región Ω en un rectángulo [17]. En resumen, todo el proceso de generación de mallas, de elección óptima de la estrella, evitando singularidades y esquemas mal condicionado o la generación de las fórmulas en diferencias finitas de forma óptima son algunos de los principales problemas derivados de las mallas irregulares.

Los puntos del esquema de control se denominan *estrella de nodos*. El número de nodos en cada estrella es un factor importante que afecta notablemente a las fórmulas de aproximación por diferencias finitas.

El primer criterio para diseñar las estrella de nodos intriducido por Jensen [22] consistía en fijar un nodo central, elegir una distancia a ese nodo y distribuir aleatoriamente un número de nodos fijo en esa distancia. Este criterio suele fallar debido a la irregular densidad de los nodos en el dominio.



Por otro lado Perrone y Kao [40] propusieron el método de los ocho segmentos que consisten en dividir el dominio en ocho áreas separas en las que se distribuyen aleatoriamente el número prefijado de nodos que le corresponda a cada una. Las estrellas así generadas tienen buenas propiedades pero es demasiado riguroso y consume un excesivo tiempo de computación.



A la hora de diseñar las estrellas de nodos se recomienda pues realizar una combinación de varios métodos. En primer lugar se seleccionan varios grupos de nodos en las inmediaciones de un nodo central, a continuación se seleccionan de 20 a 30 nodos por el criterio de la distancia de Jensen y por último se aplica un criterio geométrico, como el criterio de los ocho segmentos, que selecciona el número de nodos de la estrella. Este algoritmo de selección de la estrella de nodos se atribuye a Liszka y Orkisz [31].

Para cada estrella se genera una fórmula de diferencias finitas, de acuerdo con la ecuación en derivadas parciales del problema tratado, por tanto estas fórmulas se generan una única vez para todas las estrellas que sean idénticas. De este modo el método clásico de Diferencias Finitas con sus fórmulas estándar se puede entender como un caso particular de este método de Diferencias Finitas Generalizadas en el caso en el que la estrella de nodos consiste en una malla regular con nodos equiespaciados en todas las dimensiones.

A continuación vamos a calcular los coeficientes de un esquema de diferencias finitas para mallas irregulares. Consideramos en este caso un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Los cálculos a partir de aquí se pueden generalizar de forma directa para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con n arbitrario, no obstante la notación puede ser muy compleja y el desarrollo de los cálculos muy tedioso en ese caso. De cualquier modo los ejemplos numéricos que nos interesan y las simulaciones que realizamos al final del capítulo serán en un dominio bidimensional. En primer lugar porque si el dominio fuera en dimensión mayor la representación gráfica de los resultados sería más problemática, habría que hacerla por secciones bidimensionales y no obtendríamos de un golpe de vista toda la información. Por otro lado como estamos estudiando un modelo depredador-presa, típicamente en biología se utilizan dominios bidimensionales correspondientes a superficies de un ecosistema, de modo que las densidades de especies biológicas u , v y w con las que se trabaja representan el número de especímenes por unidad de superficie.

En primer lugar veamos cómo se plantea el esquema numérico en el GFDM tal y como lo hacen Benito, Gavete, Ureña et al. en [8], [9], [12] y [46]. Consideramos en general el siguiente problema no lineal en el dominio $[0, T] \times \Omega$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_\Omega[U], \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad U(x, y, 0) = g(x, y), \quad (5.1)$$

donde $L_\Omega[U]$ es un operador no lineal que actúa sobre U . Para resolver el problema (5.1) en primer lugar la derivada con respecto al tiempo se calcula utilizando el método clásico de diferencias finitas,

$$\frac{\partial U(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{U_0^{n+1} - U_0^n}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Para las derivadas espaciales consideramos $M = \{z_1 \dots z_m\}$ una discretización del dominio Ω en m puntos. Cada punto de la discretización se denomina *nodo*. Para cada uno de los nodos del dominio donde el valor de U es desconocido definimos una E_s -estrella de nodos, es decir, un conjunto de puntos $E_s = \{z_0 : z_1 \dots z_s\} \subset M$ con un nodo central $z_0 \in M$ y donde $z_i \in M$ para todo $1 \leq i \leq s$ es un conjunto de puntos localizados en un entorno de z_0 . Para seleccionar la distribución de estos puntos es conveniente utilizar el algoritmo de Liszka y Orkisz.

Es importante remarca que a la hora de estudiar el correcto funcionamiento del esquema numérico encontramos que los criterios de convergencia y estabilidad dependen fuertemente de la disposición espacial de los nodos, de modo que este método de Diferencias Finitas Generalizadas se convierte en un método super potente y muy aplicable sobretodo porque siempre podemos encontrar una malla, por irregular que sea, que verifica los criterios de convergencia y estabilidad. Este es el resultado más fuerte relacionado con el GFDM y de ahí su utilidad y que sea tan usado en modelos no lineales en matemática biológica.

Para construir el esquema de control consideramos una E_s -estrella con nodo central z_0 cuyas coordenadas son (x_0, y_0) , (x_i, y_i) son las coordenadas del resto de nodos de la estrella y las distancias entre estos puntos y el nodo central las denominamos $h_i = x_i - x_0$ y $k_i = y_i - y_0$ para todo $1 \leq i \leq s$. Si definimos $U_0 = U(z_0)$ u $U_i = U(z_i)$ para todo i , entonces utilizando la expansión de Taylor podemos escribir

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right) + \dots, \quad \forall 1 \leq i \leq s. \quad (5.2)$$

Definimos a continuación los vectores,

$$c_i^T = \left(h_i \quad k_i \quad \frac{h_i^2}{2} \quad \frac{k_i^2}{2} \quad h_i k_i \right),$$

$$D^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} & \frac{\partial U_0}{\partial y} & \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}.$$

Así pues si en (5.2) ignoramos los términos de orden mayor, obtenemos una aproximación de segundo orden para la función U_i y con esto podemos definir la función $B(U)$ como,

$$B(U) = \sum_{i=1}^s \left[(U_0 - U_i) + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right) \right]^2 w_i^2, \quad (5.3)$$

donde $w_i = w(h_i, k_i)$ son pesos positivos y simétricos con la propiedad de decrecer monótonamente conforme la distancia con respecto al centro aumenta tal y como se definen en [29]. Algunos de los pesos más utilizados son de la forma

$$w(h_i, k_i) = \frac{1}{(h_i + k_i)^{\alpha/2}} \equiv \frac{1}{\|x_i - x_0\|^\alpha},$$

con $\alpha \in \mathbb{N}$ y la norma $\|\cdot\|$ euclídea en \mathbb{R}^2 . Como se puede observar esto equivale al método de mínimos cuadrados con funciones de peso variables, que se denomina *método de mínimos cuadrados móviles*.

$B(U)$ definido en (5.3) es una norma. Ahora si minimizamos esta norma con respecto a todas las derivadas parciales de U_0 obtenemos,

$$\frac{\partial}{\partial(\partial U_0/\partial x)} B(U) = 2 \sum_{i=1}^s (\Phi_i w_i) h_i w_i = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial U_0/\partial y)} B(U) = 2 \sum_{i=1}^s (\Phi_i w_i) k_i w_i = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial^2 U_0/\partial x^2)} B(U) = \sum_{i=1}^s (\Phi_i w_i) h_i^2 w_i = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial^2 U_0/\partial y^2)} B(U) = \sum_{i=1}^s (\Phi_i w_i) k_i^2 w_i = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial^2 U_0/\partial x \partial y)} B(U) = 2 \sum_{i=1}^s (\Phi_i w_i) h_i k_i w_i = 0,$$

donde Φ_i es tal que $B(U) = \sum_i (\Phi_i w_i)^2$, es decir

$$\Phi_i = (U_0 - U_i) + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right).$$

De este modo obtenemos un conjunto de cinco ecuaciones lineales con cinco incógnitas,

$$\left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x} \quad \frac{\partial U_0}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right\},$$

que cuando lo resolvemos nos da ecuaciones explícitas de las incógnitas en términos de h_i , k_i , la función peso w y el valor de la función U en todos los nodos de la estrella. Este sistema se puede expresar de forma matricial como,

$$AD = b, \quad (5.4)$$

donde D es el vector de incógnitas ya definido y la matriz A y el vector b se definen,

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^s h_i^2 w_i^2 & \sum_{i=1}^s h_i k_i w_i^2 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i^3 w_i^2 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i k_i^2 w_i^2 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i^2 k_i w_i^2 \\ \sum_{i=1}^s h_i k_i w_i^2 & \sum_{i=1}^s k_i^2 w_i^2 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i^2 k_i w_i^2 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s k_i^3 w_i^2 & \sum_{i=1}^s h_i k_i^2 w_i^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i^3 w_i^2 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i^2 k_i w_i^2 & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^s h_i^4 w_i^2 & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^s h_i^2 k_i^2 w_i^2 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i^3 k_i w_i^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i k_i^2 w_i^2 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s k_i^3 w_i^2 & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^s h_i^2 k_i^2 w_i^2 & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^s k_i^4 w_i^2 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i k_i^3 w_i^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i^2 k_i w_i^2 & \sum_{i=1}^s h_i k_i^2 w_i^2 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i^3 k_i w_i^2 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s h_i k_i^3 w_i^2 & \sum_{i=1}^s h_i^2 k_i^2 w_i^2 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^s (U_i - U_0) h_i w_i^2 \\ \sum_{i=1}^s (U_i - U_0) k_i w_i^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (U_i - U_0) h_i^2 w_i^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (U_i - U_0) k_i^2 w_i^2 \\ \sum_{i=1}^s (U_i - U_0) h_i k_i w_i^2 \end{pmatrix}.$$

La expresión explícita del vector D depende del número de nodos, su posición en el dominio y los pesos w . La matriz A es simétrica y requiere al menos cinco puntos, es decir, la estrella debe tener al menos cinco puntos para ser resuelta por este método. No obstante con cinco puntos por malla no se obtienen los mejores resultados porque aparecen problemas de mal condicionamiento de las matrices y además con pocos puntos mallas muy irregulares dan problemas. Normalmente es óptimo diseñar mallas con ocho puntos, a veces incluso nueve, y de hecho en las experiencias numéricas que se realizarán con nuestro sistema vamos a utilizar mallas de ocho puntos elegidos por una combinación del método de la distancia con el método de los ocho segmentos.

Así pues tenemos una aproximación de segundo orden $O(h_i^2, k_i^2)$. Estas características de la matriz A se cumplen independientemente de la posición de los nodos en el dominio, es decir, la existencia de matrices mal condicionadas (matrices que den resultados muy diferentes tras pequeños cambios en los coeficientes) por efecto de la malla irregular está controlada y sucede muy difícilmente.

Así pues utilizando el valor de la función U en todos los nodos de las estrellas denotamos las derivadas espaciales del método de Diferencias Finitas Generalizadas como,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x} = -\lambda_{01} U_0 + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1} U_i + O(h_i^2, k_i^2), \\ \frac{\partial U(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y} = -\lambda_{02} U_0 + \sum_{i=1}^s \lambda_{i2} U_i + O(h_i^2, k_i^2), \\ \frac{\partial^2 U(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y^2} = -(\lambda_{03} + \lambda_{04}) U_0 + \sum_{i=1}^s (\lambda_{i3} + \lambda_{i4}) U_i + O(h_i^2, k_i^2). \end{array} \right.$$

Los coeficientes λ_{ij} con $0 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq 5$ del sistema discretizado se pueden calcular a partir

de la matriz A , los pesos w y los vectores c_i .

$$\lambda_{ij} = w_i^2 (A^{-1} c_i)_j, \quad \lambda_{0j} = \sum_{i=1}^s \lambda_{ij},$$

para todo $1 \leq j \leq 5$.

Observación 5.1. Como las únicas derivadas segundas que aparecen en el sistema (1) es el operador laplaciano, lo discretizamos como

$$\Delta^{\text{discrete}} F_0^n = -\lambda_{00} F_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0} F_i^n + \mathcal{O}(h_i^2, k_i^2),$$

donde $\lambda_{00} = \lambda_{03} + \lambda_{04}$ y $\lambda_{i0} = \lambda_{i3} + \lambda_{i4}$.

5.2. Esquema numérico y convergencia del método

Para escribir el esquema GFD del sistema (1) explícito consideramos el sistema tal y como se muestra en la Introducción, donde las funciones que sin derivadas espaciales ni temporales las agrupamos en las funciones h_1 , h_2 y h_3 como

$$\begin{aligned} h_1(u, v, w) &= c\xi(v)u\Phi(v) + a(v)w - g(u), \\ h_2(u, v) &= f(v) - u\Phi(v), \\ h_3(u, v, w) &= c\eta(v)u\Phi(v) - a(v)w - n(w)w, \end{aligned}$$

de modo que el sistema de ecuaciones resulta

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla(u\chi(w)\nabla w) + h_1(u, v, w), \\ \partial_t v = \Delta v - d\nabla(v\mu(w)\nabla w) + h_2(u, v, w), \\ \partial_t w = h_3(u, v, w), \end{cases} \quad (5.5)$$

donde $d \in \{0, 1\}$ determina si estamos trabajando con el sistema de una quimiotaxis o el sistema con dos quimiotaxis hacia los depredadores inactivos. Así pues utilizando las nociones sobre el método de Diferencias Finitas Generalizadas expuesto en la sección anterior, el esquema numérico explícito para la solución aproximada (U, V, W) viene dado por,

$$\begin{aligned} U_0^{n+1} &= U_0^n + \Delta t \left[-\lambda_{00} U_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0} U_i^n \right] \\ &\quad - \chi(W_0^n) \Delta t \left(-\lambda_{01} U_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1} U_i^n \right) \left(-\lambda_{01} W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1} W_i^n \right) \\ &\quad - \chi(W_0^n) \Delta t \left(-\lambda_{02} U_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i2} U_i^n \right) \left(-\lambda_{02} W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i2} W_i^n \right) \\ &\quad - \chi'(W_0^n) \Delta t U_0^n \left[\left(-\lambda_{01} W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1} W_i^n \right)^2 + \left(-\lambda_{02} W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i2} W_i^n \right)^2 \right] \\ &\quad - \chi(W_0^n) \Delta t U_0^n \left(-\lambda_{00} W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0} W_i^n \right) + \Delta t h_1(U_0^n, V_0^n, W_0^n) \\ &\quad + \mathcal{O}((\Delta t)^2, h_i^2, k_i^2), \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
 V_0^{n+1} &= V_0^n + \Delta t \left[-\lambda_{00} V_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0} V_i^n \right] \\
 &\quad - d\mu(W_0^n) \Delta t \left(-\lambda_{01} V_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1} V_i^n \right) \left(-\lambda_{01} W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1} W_i^n \right) \\
 &\quad - d\mu(W_0^n) \Delta t \left(-\lambda_{02} V_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i2} V_i^n \right) \left(-\lambda_{02} W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i2} W_i^n \right) \\
 &\quad - d\mu'(W_0^n) \Delta t V_0^n \left[\left(-\lambda_{01} W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1} W_i^n \right)^2 + \left(-\lambda_{02} W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i2} W_i^n \right)^2 \right] \\
 &\quad - d\mu(W_0^n) \Delta t V_0^n \left(-\lambda_{00} W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0} W_i^n \right) + \Delta t h_1(U_0^n, V_0^n, W_0^n) \\
 &\quad + \mathcal{O}((\Delta t)^2, h_i^2, k_i^2),
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$W_0^{n+1} = W_0^n + \Delta t h_3(U_0^n, V_0^n, W_0^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^2, h_i^2, k_i^2). \tag{5.8}$$

A continuación veamos el resultado principal de esta sección que nos asegura la convergencia del método numérico. Un método clásico de probar la convergencia de un esquema numérico consiste en demostrar la consistencia y la estabilidad del mismo, ya que sabemos que un esquema consistente y estable siempre es convergente. No obstante en este caso no va a ser necesario hablar sobre esos dos conceptos ya que podemos demostrar directamente la convergencia del método que es el objetivo principal.

Observación 5.2. Recordamos que el esquema numérico (5.6), (5.7), (5.8) es convergente si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq s} (|u(n\Delta t, x_i, y_i) - U_i^n| + |v(n\Delta t, x_i, y_i) - V_i^n| + |w(n\Delta t, x_i, y_i) - W_i^n|) = 0.$$

Así pues de ahora en adelante y para simplificar la notación vamos a escribir $\tilde{u}_i^n = u(n\Delta t, x_i, y_i) - U_i^n$, $\tilde{v}_i^n = v(n\Delta t, x_i, y_i) - V_i^n$ y $\tilde{w}_i^n = w(n\Delta t, x_i, y_i) - W_i^n$, las diferencias entre la solución exacta y la solución aproximada. Además la notación para la solución exacta también se abrevia como $u(n\Delta t, x_i, y_i) = u_i^n$, $v(n\Delta t, x_i, y_i) = v_i^n$ y $w(n\Delta t, x_i, y_i) = w_i^n$.

Antes de proceder con el resultado sobre la convergencia del método vamos a enunciar dos lemas clásicos sobre álgebra lineal que serán de utilidad en la demostración y cuya prueba se puede encontrar en [21].

Lema 5.1. Sea $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Si existe alguna norma matricial tal que $\|\mathcal{N}\| < 1$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}^k = 0.$$

Lema 5.2. Sea $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\mathcal{N}) < 1,$$

donde $\rho(\cdot)$ es el radio espectral de la matriz.

Teorema 5.1. Bajo las hipótesis (h_0) - (h_7) , si $\chi(w)$ y $\mu(w)$ son al menos dos veces diferenciables, entonces el esquema numérico GFD explícito (5.6), (5.7), (5.8) es condicionalmente

convergente para todas las estrellas que verifiquen,

$$\begin{cases} 0 < A_1 - A_2 - |\partial_v h_1| - C, \\ 0 < E_1 - E_2 - |\partial_u h_2| - F, \\ \Delta t < 2 \min \left\{ \frac{1}{A_1 + A_2 + |\partial_v h_1| + C}, \frac{1}{E_1 + E_2 + |\partial_u h_2| + F} \right\}, \end{cases} \quad (5.9)$$

donde los coeficientes A_1 , A_2 , C , E_1 , E_2 y F están definidos explícitamente en (5.18), (5.19) y (5.21) y dependen de la distribución de puntos en la estrella.

Demostración. En primer lugar consideramos la diferencia entre el esquema numérico para U (5.6) y la solución exacta u evaluada en $(n\Delta t, x_1, y_i)$. Para simplificar la notación sólo nos fijamos en los términos que nos interesan en particular. Comenzamos sumando y restando los términos $\pm\chi(w_0^n)(\lambda_{00})^2 u_0^n W_0^n$ y $\pm\chi(W_0^n)(\lambda_{00})^2 u_0^n W_0^n$,

$$\begin{aligned} -\chi(w_0^n)(\lambda_{01})^2 u_0^n w_0^n + \chi(W_0^n)(\lambda_{01})^2 U_0^n W_0^n &= -\chi(w_0^n)(\lambda_{01})^2 u_0^n \tilde{w}_0^n \\ &\quad - \chi(W_0^n)(\lambda_{01})^2 \tilde{u}_0^n W_0^n - \tilde{w}_0^n \chi'(\theta_1)(\lambda_{01})^2 u_0^n W_0^n, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el Teorema del Valor Medio para cierto θ_1 entre w_0^n y W_0^n .

A continuación añadimos los términos,

$$\pm\chi(w_0^n)\lambda_{01}U_0^n \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}w_i^n, \quad \pm\chi(W_0^n)\lambda_{01}U_0^n \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}W_i^n,$$

de modo que obtenemos

$$\begin{aligned} \chi(w_0^n)\lambda_{01}u_0^n \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}w_i^n - \chi(W_0^n)\lambda_{01}U_0^n \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}W_i^n &= \\ \chi(w_0^n)\lambda_{01}\tilde{u}_0^n \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}w_i^n - \tilde{w}_0^n \chi'(\theta_2)\lambda_{01}U_0^n \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}W_i^n & \quad (5.10) \\ + \chi(w_0^n)\lambda_{01}U_0^n \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}\tilde{w}_i^n. \end{aligned}$$

Añadimos además los términos,

$$\pm\chi(w_0^n) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}U_i^n \right) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}w_i^n \right), \quad \pm\chi(W_0^n) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}U_i^n \right) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}W_i^n \right),$$

tal que se obtiene

$$\begin{aligned} -\chi(w_0^n) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}u_i^n \right) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}w_i^n \right) + \chi(W_0^n) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}U_i^n \right) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}W_i^n \right) &= \\ -\chi(w_0^n) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}\tilde{u}_i^n \right) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}w_i^n \right) - \chi(W_0^n) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}U_i^n \right) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}\tilde{w}_i^n \right) & \quad (5.11) \\ -\tilde{w}_0^n \chi'(\theta_4) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}U_i^n \right) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}w_i^n \right). \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento calculamos los términos en λ_{02} y encontramos distintos θ_j entre w_0^n y W_0^n con $j \in \{5, 6, 7, 8\}$.

Para la discretización del término $\chi'(w)u|\nabla w|^2$ veamos en primer lugar el procedimiento para el parámetro λ_{01} . Análogamente a lo realizado anteriormente sumamos y restamos los términos,

$$\pm\chi'(w_0^n)U_0^n \left(-\lambda_{01}w_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}w_i^n \right)^2, \quad \pm\chi'(w_0^n)U_0^n \left(-\lambda_{01}W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}W_i^n \right)^2$$

de modo que,

$$\begin{aligned} & -\chi'(w_0^n)u_0^n \left(-\lambda_{01}w_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}w_i^n \right)^2 + \chi'(W_0^n)U_0^n \left(-\lambda_{01}W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}W_i^n \right)^2 = \\ & -\chi'(w_0^n)\tilde{w}_0^n \left(-\lambda_{01}w_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}w_i^n \right)^2 - \chi''(\theta_9)\tilde{w}_0^n U_0^n \left(-\lambda_{01}W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}W_i^n \right)^2 \\ & -\chi'(w_0^n)U_0^n \left[\left(-\lambda_{01}\tilde{w}_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}\tilde{w}_i^n \right) \left(-\lambda_{01}(w_0^n + W_0^n) + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}(w_i^n + W_i^n) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para el término $\chi(w)u\Delta w$ añadimos y restamos los términos,

$$\pm\chi(w_0^n)U_0^n \left(-\lambda_{00}w_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0}w_i^n \right), \quad \pm\chi(W_0^n)U_0^n \left(-\lambda_{00}W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0}W_i^n \right)$$

y por tanto llegamos a,

$$\begin{aligned} & -\chi(w_0^n)u_0^n \left(-\lambda_{00}w_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0}w_i^n \right) + \chi(W_0^n)U_0^n \left(-\lambda_{00}W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0}W_i^n \right) \\ & = -\chi(w_0^n)\tilde{u}_0^n \left(-\lambda_{00}w_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0}w_i^n \right) \\ & -\chi'(\theta_{11})\tilde{w}_0^n U_0^n \left(-\lambda_{00}w_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0}w_i^n \right) \\ & -\chi(W_0^n)U_0^n \left(-\lambda_{00}\tilde{w}_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0}\tilde{w}_i^n \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para el término restante que no lleva derivadas sumamos y restamos $\pm h_1(U_0^n, v_0^n, W_0^n)$ y $\pm h_1(u_0^n, v_0^n, W_0^n)$, de modo que

$$\begin{aligned} h_1(u_0^n, v_0^n, w_0^n) - h_1(U_0^n, V_0^n, W_0^n) & = \tilde{u}_0^n \frac{\partial h_1}{\partial u}(\theta_{12}, v_0^n, W_0^n) \\ & + \tilde{v}_0^n \frac{\partial h_1}{\partial v}(U_0^n, \theta_{13}, W_0^n) + \tilde{w}_0^n \frac{\partial h_1}{\partial w}(u_0^n, v_0^n, \theta_{14}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ahora vamos a encontrar cotas para las expresiones y en primer lugar para simplificar un poco la notación definimos,

$$\tilde{u}^n = \max_{i=0, \dots, s} \{|\tilde{u}_i^n|\}, \quad \tilde{v}^n = \max_{i=0, \dots, s} \{|\tilde{v}_i^n|\}, \quad \tilde{w}^n = \max_{i=0, \dots, s} \{|\tilde{w}_i^n|\}.$$

Definimos ahora los parámetros A_1 , A_2 , C , E_1 , E_2 y F a los que se hace referencia en el enunciado del Teorema de tal modo que con ellos vamos a poder construir cotas del esquema numérico de tal forma que,

$$\tilde{u}^{n+1} \leq A\tilde{u}^n + \Delta t B\tilde{v}^n + \Delta t C\tilde{w}^n, \quad (5.15)$$

$$\tilde{v}^{n+1} \leq \Delta t D\tilde{u}^n + E\tilde{v}^n + \Delta t F C\tilde{w}^n, \quad (5.16)$$

$$\tilde{w}^{n+1} \leq \Delta t G\tilde{u}^n + \Delta t H\tilde{v}^n + J\tilde{w}^n. \quad (5.17)$$

El objetivo de todo este procedimiento es realizar una suerte de linealización del esquema numérico GFD para poder representarlo matricialmente de forma clásica y utilizar los resultados de los Lemas previos para asegurar que el radio espectral de la matriz que acota el esquema es estrictamente menor que 1. Es tal caso sabemos que el esquema numérico converge. Así pues mostramos a continuación los coeficientes que obtenemos en cada caso, son cálculos largos, bastante mecánicos y tediosos de modo que aquí se muestra directamente el resultado final es pos de un entendimiento más claro y directo de la demostración.

$$\begin{aligned} A_1 = & \left| \lambda_{00} + \chi(W_0^n)(\lambda_{01})^2 W_0^n - \chi(w_0^n)\lambda_{01} \sum_{i=1}^s \lambda_{i1} w_i^n \right. \\ & + \chi(W_0^n)(\lambda_{01})^2 W_0^n - \chi(w_0^n)\lambda_{02} \sum_{i=1}^s \lambda_{i2} w_i^n \\ & + \chi'(w_0^n) \left(-\lambda_{01} w_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1} w_i^n \right)^2 \\ & + \chi'(w_0^n) \left(-\lambda_{02} w_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i2} w_i^n \right)^2 \\ & \left. - \chi(w_0^n) \left(-\lambda_{00} w_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0} w_i^n \right) + \frac{\partial h_1}{\partial u} \right|, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & d \sum_{i=1}^s |\lambda_{i0}| + |\chi(w_0^n)\lambda_{01} W_0^n| \sum_{i=1}^s |\lambda_{i1}| + \left| \chi(w_0^n) \sum_{i=1}^s \lambda_{i1} w_i^n \right| \sum_{i=1}^s |\lambda_{i1}| \\ & + |\chi(w_0^n)\lambda_{02} W_0^n| \sum_{i=1}^s |\lambda_{i2}| + \left| \chi(w_0^n) \sum_{i=1}^s \lambda_{i2} w_i^n \right| \sum_{i=1}^s |\lambda_{i2}|, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$B = \left| \frac{\partial h_1}{\partial v} \right|, \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
 C = & \left| -\chi(w_0^n)(\lambda_{01})^2 u_0^n - \chi'(\theta_1)(\lambda_{01})^2 u_0^n W_0^n \right. \\
 & - \chi'(\theta_2)\lambda_{01}U_0^n \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}W_i^n - \chi'(\theta_3)\lambda_{01}W_0^n \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}U_i^n \\
 & - \chi'(\theta_4) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}U_i^n \right) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i1}w_i^n \right) - \chi'(\theta_5)(\lambda_{02})^2 u_0^n W_0^n \\
 & - \chi'(\theta_6)\lambda_{02}U_0^n \sum_{i=1}^s \lambda_{i2}W_i^n - \chi'(\theta_7)\lambda_{02}W_0^n \sum_{i=1}^s \lambda_{i2}U_i^n \\
 & - \chi'(\theta_8) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i2}U_i^n \right) \left(\sum_{i=1}^s \lambda_{i2}w_i^n \right) + \chi(W_0^n)U_0^n \lambda_{00} + \frac{\partial h_1}{\partial w} \\
 & - \chi''(\theta_9)U_0^n \left(-\lambda_{01}W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}W_1^n \right)^2 \\
 & + \chi'(w_0^n)U_0^n \lambda_{01} \left(-\lambda_{01}(w_0^n + W_0^n) + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}(w_i^n + W_i^n) \right) \\
 & - \chi''(\theta_{10})U_0^n \left(-\lambda_{02}W_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i2}W_1^n \right)^2 \\
 & + \chi'(w_0^n)U_0^n \lambda_{02} \left(-\lambda_{02}(w_0^n + W_0^n) + \sum_{i=1}^s \lambda_{i2}(w_i^n + W_i^n) \right) \\
 & - u_0^n \chi'(\theta_{11}) \left(-\lambda_{00}w_0^n + \sum_{i=1}^s \lambda_{i0}w_i^n \right) \left| + |U_0^n \chi(W_0^n)| \sum_{i=1}^s |\lambda_{i0}| \right. \\
 & + |\chi(w_0^n)\lambda_{01}U_0^n| \sum_{i=1}^s |\lambda_{i1}| + \left| \chi(W_0^n) \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}U_i^n \right| \sum_{i=1}^s |\lambda_{i1}| \\
 & + |\chi(w_0^n)\lambda_{02}U_0^n| \sum_{i=1}^s |\lambda_{i2}| + \left| \chi(W_0^n) \sum_{i=1}^s \lambda_{i2}U_i^n \right| \sum_{i=1}^s |\lambda_{i2}| \\
 & + |\chi(w_0^n)U_0^n| \sum_{i=1}^s |\lambda_{i0}| \left| -\lambda_{01}(w_0^n + W_0^n) + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}(w_i^n + W_i^n) \right| \\
 & + |\chi(w_0^n)U_0^n| \sum_{i=1}^s |\lambda_{i0}| \left| -\lambda_{01}(w_0^n + W_0^n) + \sum_{i=1}^s \lambda_{i1}(w_i^n + W_i^n) \right|.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

de modo que el coeficiente que multiplica a \tilde{u}^n vendrá dado por un $A = (1 - \Delta t)A_1 + \Delta tA_2$.

Con estos parámetros podemos escribir entonces la ecuación de u como,

$$\tilde{u}^{n+1} \leq ((1 - \Delta t)A_1 + \Delta tA_2)\tilde{u}^n + \Delta tB\tilde{v}^n + \Delta tC\tilde{w}^n. \tag{5.22}$$

De manera similar trabajamos con la segunda ecuación del modelo discreto. Los parámetros que aparecen son totalmente análogos a los que obtenemos en la ecuación de u ya que las derivadas son las mismas. No lo mostramos explícitamente para no recargar innecesariamente la demostración. El único cambio importante que tenemos ahora es que $\chi(w)$ hay que reemplazarlo por $d\mu(w)$. Así pues encontramos constantes D , E_1 , E_2 y F tales que,

$$\tilde{v}^{n+1} \leq \Delta tD\tilde{u}^n + ((1 - \Delta t)E_1 + \Delta tE_2)\tilde{v}^n + \Delta tF\tilde{w}^n. \tag{5.23}$$

Finalmente para la tercera ecuación, el análisis numérico es mucho más sencillo debido a la ausencia de derivadas espaciales.

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{n+1} \leq & \Delta t \left| \frac{\partial h_3}{\partial u}(\theta_{17}, v_0^n, W_0^n) \right| \tilde{u}^n + \Delta t \left| \frac{\partial h_3}{\partial v}(U_0^n, \theta_{18}, W_0^n) \right| \tilde{u}^n \\ & + \left| 1 + \Delta t \frac{\partial h_3}{\partial w}(u_0^n, v_0^n, \theta_{19}) \right| \tilde{w}^n \end{aligned} \quad (5.24)$$

A continuación podemos reescribir las ecuaciones (5.22), (5.23) y (5.24) en forma matricial como,

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^{n+1} \\ \tilde{v}^{n+1} \\ \tilde{w}^{n+1} \end{pmatrix} \leq M \begin{pmatrix} \tilde{u}^n \\ \tilde{v}^n \\ \tilde{w}^n \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

donde la matriz M está definida por

$$M = \begin{pmatrix} |1 - \Delta t A_1| + \Delta t |A_2| & \Delta t |\partial_v h_1| & \Delta t C \\ \Delta t |\partial_u h_2| & |1 - \Delta t E_1| + \Delta t E_2 & \Delta t F \\ \Delta t |\partial_u h_3| & \Delta t |\partial_v h_3| & |1 + \Delta t \partial_w h_3| \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Como consecuencia directa de los Lemas 5.1 y 5.2 simplemente necesitamos que todos los autovalores de la matriz M sean estrictamente menores que 1 para obtener la convergencia del esquema GFD. Podemos llegar a dicha condición imponiendo que la norma matricial dada por la suma por filas sea menor que 1, es decir, si llamamos a las entradas de M como $M = (m_{ij})_{i,j=1}^3$ entonces buscamos que

$$\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} \left(\sum_{j=1}^3 |m_{ij}| \right) < 1.$$

Así pues, para la primera fila,

$$|1 - \Delta t A_1| < 1 - \Delta t |A_2| - \Delta t |\partial_v h_1| - \Delta t C. \quad (5.27)$$

Obtenemos dos condiciones,

$$\begin{cases} 1 - \Delta t A_1 < 1 - \Delta t |A_2| - \Delta t |\partial_v h_1| - \Delta t C, \\ -1 + \Delta t |A_2| + \Delta t |\partial_v h_1| + \Delta t C < 1 - \Delta t A_1 \end{cases}$$

La primera condición se verifica si asumimos $0 < A_1 - A_2 - |\partial_v h_1| - C$ mientras que para la segunda,

$$\Delta t < \frac{2}{A_1 + A_2 + |\partial_v h_1| + C}.$$

Del mismo modo para la segunda fila las condiciones que necesitamos imponer son $0 < E_1 - E_2 - |\partial_u h_2| - F$ y

$$\Delta t < \frac{2}{E_1 + E_2 + |\partial_u h_2| + F}. \quad (5.28)$$

Por último vemos que por hipótesis, como $\partial_w h_3 < 0$, si $\Delta t \ll 1$ entonces obtenemos directamente que la suma de los elementos de la tercera columna es directamente estrictamente menor a 1 y así hemos probado que bajo estas condiciones el esquema GFD es convergente. \square

De este modo obtenemos que el esquema numérico GFD es convergente y por tanto podemos esperar que al desarrollar un programa que resuelva el sistema computacionalmente con este método los resultados sean satisfactorios.

Observación 5.3. Nótese como en realidad el punto fuerte del método de Diferencias Finitas Generalizadas es que, aunque los cálculos sean largos y tediosos, una vez demostrada la convergencia condicional, siempre podremos encontrar una distribución de forma que se cumpla la condición para el paso temporal. Además las entradas de la matriz M únicamente dependen de las funciones que componen h_1 , h_2 y h_3 y de los coeficientes A_1 , A_2 , C , E_1 , E_2 y F , que dependen de la distribución espacial de los puntos de la estrella.

5.3. Aplicaciones: el modelo de Rosenzweig-MacArthur

A continuación vamos a ilustrar la aplicabilidad del método de Diferencias Finitas Generalizadas para resolver numéricamente el sistema (1). Para ello vamos a utilizar el modelo depredador-presa canónico propuesto por Rosenzweig y MacArthur en [42] con algunas consideraciones extra que pertenecen al modelo de Bazykin [6] así como teniendo en cuenta que tenemos un término de depredadores inactivos y por tanto unas funciones de switching $\xi(v)$, $\eta(v)$, cuya forma explícita definen Kuwamura y Nakazawa en [28] y [35].

El modelo clásico de Rosenzweig-McArthur o el modelo de Bazykin se consideraron inicialmente como sistemas dinámicos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. No obstante se han desarrollado generalizaciones a modelos de reacción-difusión incluso con quimiotaxis y para varias formas distintas de las funciones involucradas. En primer lugar vamos a considerar el sistema (4.1), que recordamos a continuación,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) + c\xi(v)u\Phi(v) + a(v)w - g(u), \\ v_t = \Delta v - d\nabla \cdot (v\mu(w)\nabla w) + f(v) - u\Phi(v), \\ w_t = c\eta(v)u\Phi(v) - a(v)w - n(w)w, \end{cases} \quad (5.29)$$

con condiciones de contorno de Neumann homogéneas. Las formas admisibles en los modelos clásicos para las funciones involucradas son las siguientes.

- Tasa de depredación $\Phi(v)$,

$$\Phi(v) = v \quad \text{tipo Lotka-Volterra o tipo Holling I,}$$

$$\Phi(v) = \frac{Bv}{h + v} \quad \text{tipo Holling II,}$$

$$\Phi(v) = \frac{Bv^m}{h^m + v^m} \quad \text{tipo Holling III,}$$

donde $B, h, m > 0$.

- Tasa de mortalidad de los depredadores $g(u)$,

$$g(u) = ku \quad \text{muerte natural,}$$

$$g(u) = ku + mu^2 \quad \text{muerte natural y por competición intraespecífica,}$$

donde $k, m > 0$.

- Tasa de natalidad de las presas $f(v)$,

$$f(v) = \mu v \left(1 - \frac{v}{K}\right) \quad \text{tipo logístico,}$$

$$f(v) = \mu v \left(1 - \frac{v}{K}\right) \left(\frac{v}{Q} - 1\right) \quad \text{biestable o efecto Allee,}$$

donde $\mu, K, Q > 0$.

El modelo clásico de Rosenzweig-MacArthur [42] considera un funcional de depredación de tipo Holling II, un término logístico con capacidad de carga K para la tasa de natalidad de las presas y un término lineal en la tasa de mortalidad de los depredadores, que se corresponde con un modelo en el que la principal causa de muerte de los depredadores es la muerte natural. No todos los términos aquí expuestos son admisibles por las hipótesis (h₀)-(h₇) de nuestro modelo, no obstante las consideradas en el modelo de Rosenzweig-MacArthur sí que son admisible, de modo que trabajaremos con ellas.

Por otro lado la tasa de mortalidad de los depredadores inactivos $n(w)w$ vamos a considerar que es de tipo lineal, es decir $n(w) = n > 0$, ya que las especies inactivas no sufren difusión ni tienen relaciones de competición y la causa biológica principal de muerte en todo caso va a ser la muerte natural.

Observación 5.4. Las simulaciones numéricas realizadas por Jin y Wang [23], Wu, Wang y Shi [49] y Wu, Shi y Wu [48] consideran también las funciones típicas del modelo de Rosenzweig-MacArthur, de modo que es consistente que consideremos el mismo tipo de funciones en nuestro modelo.

Por otro lado las funciones de respuesta quimiotáctica típicamente consideradas en los modelos con quimiotaxis son las siguientes.

- Sensibilidad quimiotáctica $\chi(w)$,

$$\chi(w) = w \quad \text{lineal,}$$

$$\chi(w) = \frac{w}{1 + \varepsilon w^m} \quad \text{saturada,}$$

$$\chi(w) = w e^{-\lambda w} \quad \text{tipo Ricker,}$$

donde $\varepsilon, m, \lambda > 0$.

Obsérvese que no todos los tipos de función de respuesta quimiotáctica son admisibles ya que en nuestro modelo necesitamos que $\chi \in L^1(0, \infty)$, de modo que el lineal no es admisible, la función saturada lo es para $m > 2$ y el tipo Ricker siempre es admisible.

Por último en relación con el término de depredadores inactivos vamos a utilizar la funciones de switching de Kuwamura y Nakazawa [28], [35], es decir,

$$\xi(v) = \frac{1 + \tanh(p(v - q))}{2}, \quad \eta(v) = \frac{1 - \tanh(p(v - q))}{2},$$

donde $p, q > 0$ tales que verifican las propiedades de las hipótesis: $\xi(v) + \eta(v) = 1$ y $0 \leq \xi(v), \eta(v) \leq 1$ para todo $v \geq 0$. Además la función $a(v)$ es no decreciente y no negativa de modo que, como Kuwamura en [28], vamos a considerar que es una constante $a(v) = a > 0$ que verifique las hipótesis necesarias.

El problema numérico se plantea para el dominio $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, porque como hemos explicado en la sección anterior, típicamente en biología y ecología las densidades de especies se consideran por unidad de superficie. La tridimensionalidad de los ecosistemas es despreciable muchas veces con respecto al tamaño de las otras dos superficies, por ejemplo en el caso del tamaño del selvas como el Amazonas o incluso en el caso de una placa de Petri, la tercera dimensión espacial se puede despreciar. Además esto nos permite visualizar adecuadamente las soluciones ya que podemos representar en un eje de una gráfica tridimensional el valor de las funciones solución, obteniendo así de un vistazo mucha más información que si

consideráramos un dominio tridimensional, en el que para representar las soluciones tendríamos que hacer cortes o proyecciones a subespacios bidimensionales.

Así pues vamos a resolver numéricamente el modelo de Rosenzweig-MacArthur utilizando el GFDM en dos nubes de puntos: una malla regular y otra irregular tal y como se muestran en la Figura 5.1. Ambas mallas contienen $m = 437$ nodos. De aquí en adelante vamos a utilizar estrellas de $s = 8$ puntos distribuidas de modo que se verifiquen las condiciones del Teorema de convergencia. Elegimos una discretización del tiempo de tamaño $\Delta t = 0.001$ tal que verifica las hipótesis del Teorema 5.1. En este contexto vamos a presentar ejemplos de la convergencia asintótica al que hemos demostrado analíticamente que es el único punto estacionario constante no negativo globalmente asintóticamente estable: $(0, N, 0)$.

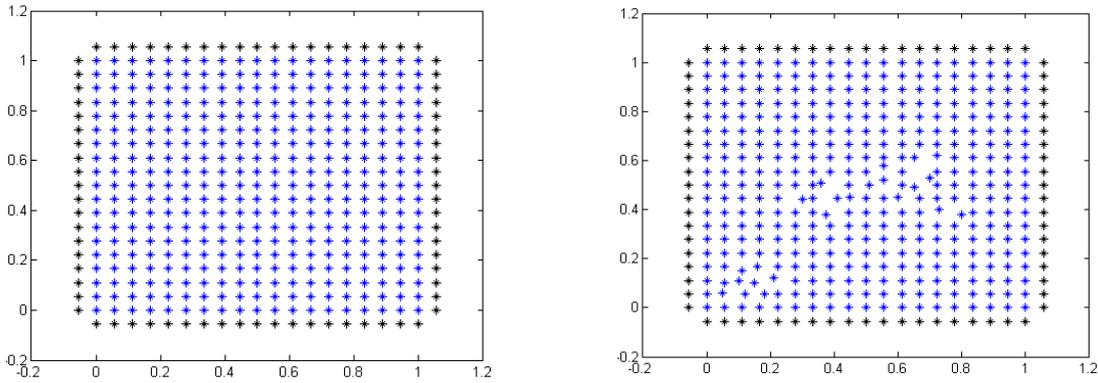


Figura 5.1: Nubes de puntos.

En todos los ejemplos vamos a calcular la diferencia entre la solución numérica y el estado estacionario constante utilizando la norma l^∞ , es decir,

$$\|F\|_\infty = \max\{|F_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

A continuación vamos a mostrar tres ejemplos del modelo de Rosenzweig-MacArthur en los que hemos resuelto (4.1) numéricamente utilizando el GFDM. Se incluyen dos ejemplos en los que se considera una única quimiotaxis en el término de los depredadores activos, $d = 0$, y un ejemplo final con dos quimiotaxis, es decir, con $d = 1$.

5.3.1. Ejemplo 1

En este primer ejemplo consideramos un modelo de Rosenzweig-MacArthur para el sistema con una quimiotaxis, i.e. $d = 0$, con tasa de depredación de tipo Holling II, con término logístico en las presas y tasa de mortalidad lineal en depredadores activos. En particular, consideramos las siguientes funciones con los coeficientes determinados de forma que satisfagan las hipótesis (h_0) - (h_7) .

$$\xi(v) = \frac{1 + \tanh(0.5(v - 0.5))}{2}, \quad \eta(v) = \frac{1 - \tanh(0.5(v - 0.5))}{2},$$

$$\Phi(v) = \frac{v}{1 + v}, \quad f(v) = v \left(1 - \frac{v}{5}\right), \quad g(u) = u, \quad a(v) = 0.1v, \quad n(w) = 1.1$$

Además consideramos $c = 1$ y por tanto las constantes de las hipótesis que definimos son: $B = 1$, $D = 1$, $E = 1$, $F = 1/5$, $N = 5$, $M = 2$. Consideramos una respuesta quimiotáctica de tipo Ricker,

$$\chi(w) = we^{-2.4w}.$$

En este primer ejemplo consideramos condiciones iniciales dadas por funciones gaussianas centradas en distintos puntos del interior de $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Inicialmente los depredadores activos están centrados en el $(0.3, 0.3)$, las presas en el $(0.4, 0.4)$ y los depredadores inactivos en $(0.2, 0.5)$. Además consideramos que la densidad máxima de las tres especies es de 0.01, relativamente pequeña. Es decir, las funciones iniciales son,

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= 0.01e^{-10[(x-0.3)^2+(y-0.3)^2]}, \\ v_0(x, y) &= 0.01e^{-10[(x-0.4)^2+(y-0.4)^2]}, \\ w_0(x, y) &= 0.01e^{-10[(x-0.2)^2+(y-0.5)^2]}. \end{aligned}$$

La representación gráfica de las soluciones numéricas para los tiempos $t = 1$, $t = 5$ y $t = 10$ se muestran en las Figuras 5.2, 5.3 y 5.4. Además, en la Tabla 5.1 se muestra la diferencia en norma infinito entre la solución numérica y el estado estacionario calculado analíticamente $(0, N, 0)$, donde en este caso $N = 5$, en los tiempos $t = 1$, $t = 5$, $t = 10$ y $t = 15$ segundos.

tiempo (s)	1	5	10	15
$\ u - 0\ _\infty$	0.0016	$2.0538 \cdot 10^{-5}$	$3.3314 \cdot 10^{-6}$	$1.6241 \cdot 10^{-7}$
$\ v - 5\ _\infty$	4.9922	0.0532	$3.6175 \cdot 10^{-4}$	$1.8044 \cdot 10^{-5}$
$\ w - 0\ _\infty$	0.0033	$4.1600 \cdot 10^{-5}$	$1.3086 \cdot 10^{-6}$	$8.3404 \cdot 10^{-8}$

Tabla 5.1: Valores del error en norma l^∞ en el Ejemplo 1.

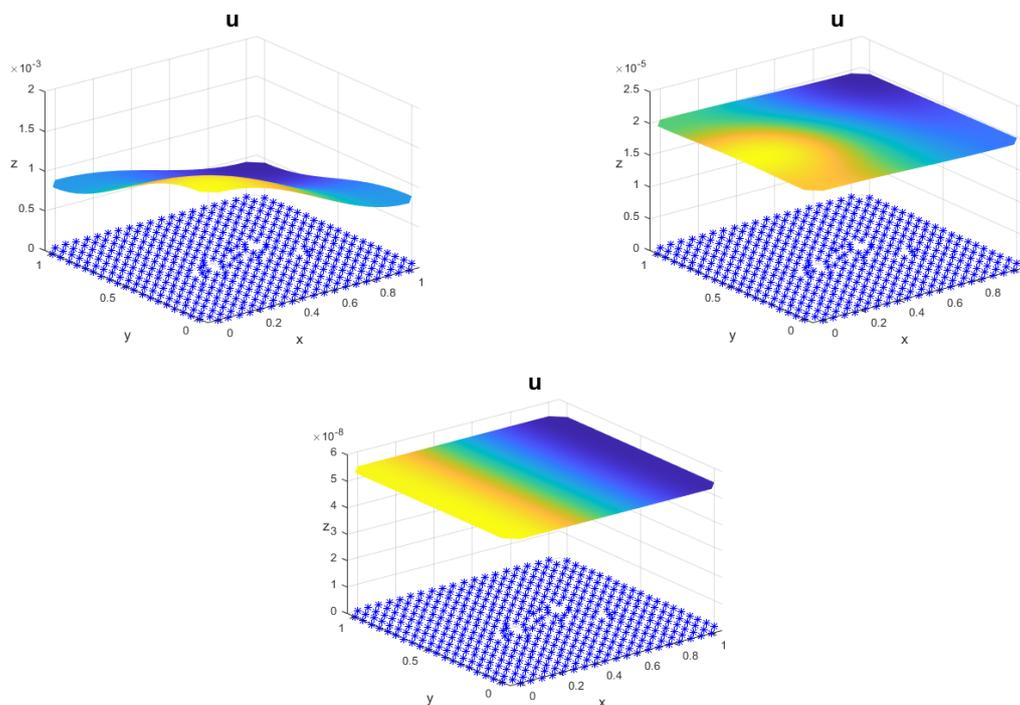


Figura 5.2: Solución numérica de u en los tiempos 1, 5 y 10 (s) para el Ejemplo 1.

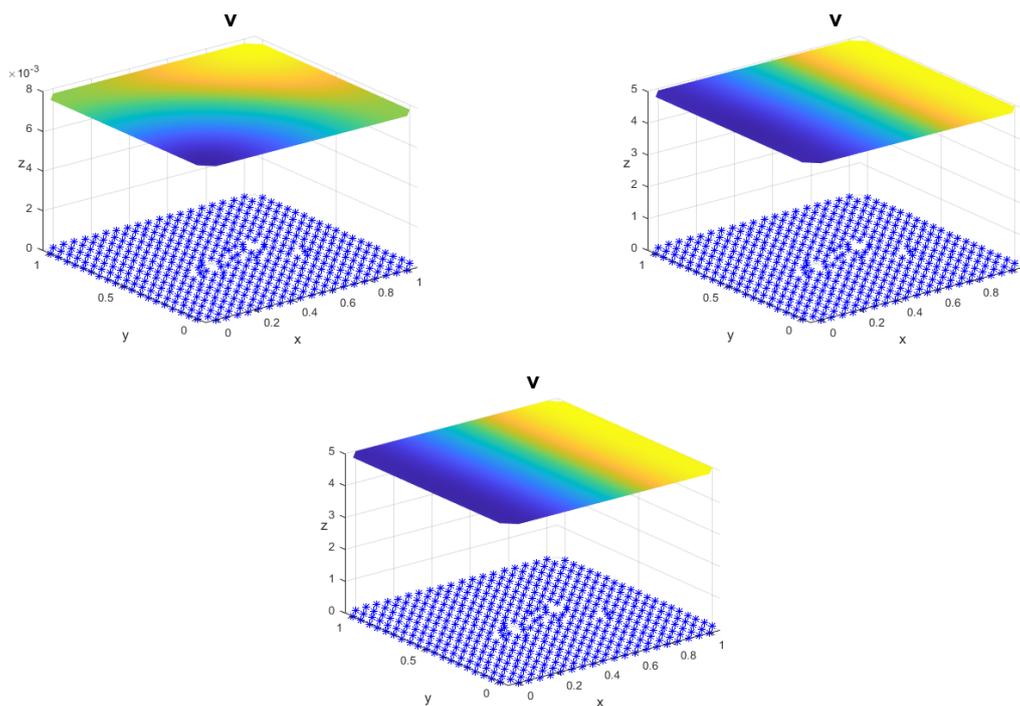


Figura 5.3: Solución numérica de v en los tiempos 1, 5 y 10 (s) para el Ejemplo 1.

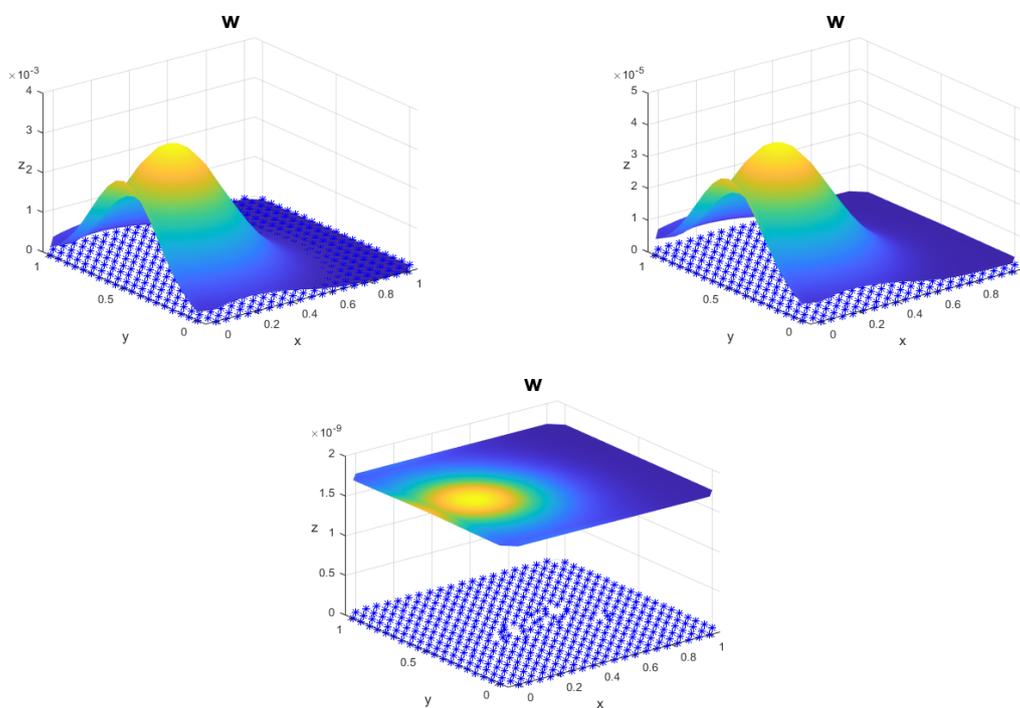


Figura 5.4: Solución numérica de w en los tiempos 1, 5 y 10 (s) para el Ejemplo 1.

Si bien se aprecia que las soluciones numéricas en efecto tienden asintóticamente al estado estacionario globalmente estable $(0, 5, 0)$, lo que es consistente con nuestros resultados analíticos.

5.3.2. Ejemplo 2

Para el segundo ejemplo vamos consideramos el modelo de Rosenzweig-MacArthur para el sistema (4.1) con $d = 0$ pero esta vez con una nube de puntos regular, i.e. la primera de la Figura 5.1. Los siguientes coeficientes que satisfacen las hipótesis (h₀)-(h₇).

$$\xi(v) = \frac{1 + \tanh(1.5(v - 0.5))}{2}, \quad \eta(v) = \frac{1 - \tanh(1.5(v - 0.5))}{2},$$

$$\Phi(v) = 0.5 \frac{v}{4 + v}, \quad f(v) = v \left(1 - \frac{v}{5}\right), \quad g(u) = 1.5u, \quad a(v) = 3v, \quad n(w) = 1.8,$$

además de $c = 1$. Así pues con estos coeficientes las constantes a las que se hace referencia durante todo el trabajo resultan $B = 0.5$, $D = 1.5$, $E = 1$, $F = 1/5$, $N = 5$, $M = 1/2$, de modo que el punto de equilibrio globalmente asintóticamente es de nuevo $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 5, 0)$. La función de respuesta quimiotáctica que consideramos a continuación es del tipo saturado,

$$\chi(w) = \frac{w}{1 + 5w^3}.$$

Para este segundo ejemplo se han considerado las siguientes funciones como datos iniciales,

$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = w_0(x, y) = \cos((2x + 1)\pi) + 1.$$

En las Figuras 5.5, 5.6 y 5.7 se muestra la solución numérica en tiempos $t = 1$, $t = 5$ y $t = 10$ (s) y la Tabla 5.2 muestra los errores en norma l^∞ de la diferencia entre la solución numérica y el punto globalmente asintóticamente estable $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 5, 0)$ para los tiempos $t = 1, 5, 10$ y 15 segundos.

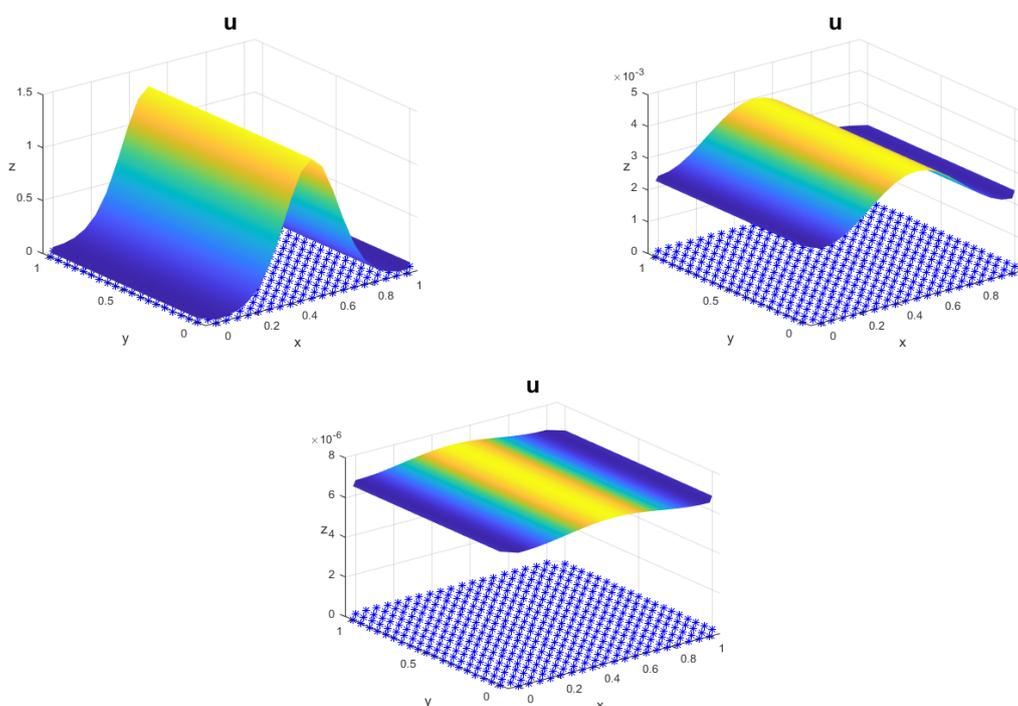


Figura 5.5: Solución numérica de u en los tiempos 1, 5 y 10 (s) para el Ejemplo 2.

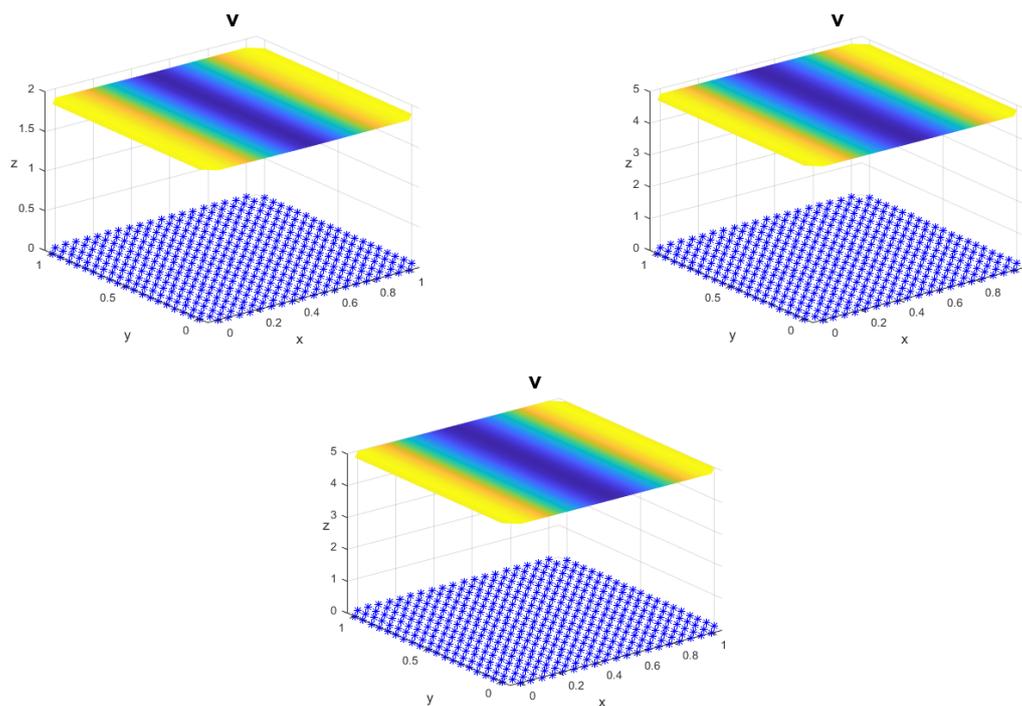


Figura 5.6: Solución numérica de v en los tiempos 1, 5 y 10 (s) para el Ejemplo 2.

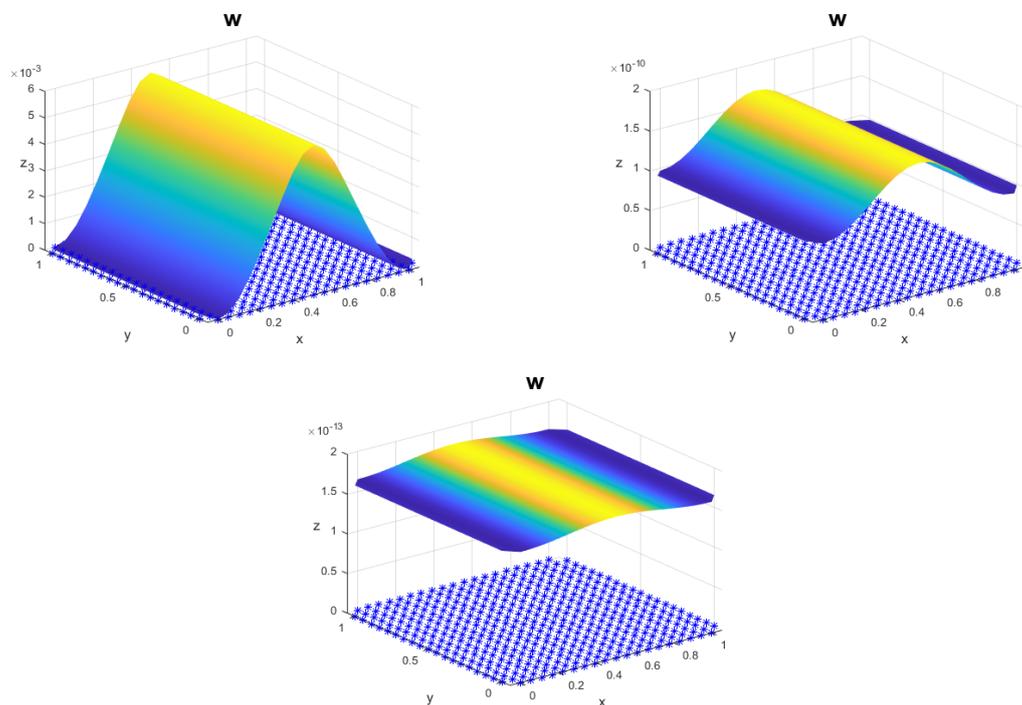


Figura 5.7: Solución numérica de w en los tiempos 1, 5 y 10 (s) para el Ejemplo 3.

tiempo (s)	1	5	10	15
$\ u - 0\ _\infty$	1.3183	0.0040	$7.2455 \cdot 10^{-6}$	$1.5525 \cdot 10^{-8}$
$\ v - 5\ _\infty$	3.1172	0.1577	$1.217 \cdot 10^{-4}$	$7.5151 \cdot 10^{-6}$
$\ w - 0\ _\infty$	0.0057	$1.6612 \cdot 10^{-10}$	$1.7794 \cdot 10^{-13}$	$3.7958 \cdot 10^{-16}$

Tabla 5.2: Valores del error en norma l^∞ en el Ejemplo 2.

Así pues vemos que efecto las soluciones tienden rápidamente al punto estacionario que en el capítulo anterior hemos demostrado que es globalmente asintóticamente estable, es decir, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 5, 0)$. Vemos de este modo una consistencia entre el los resultados analíticos y la nvestigación numérica.

5.3.3. Ejemplo 3

En este último ejemplo vamos a estudiar con el GFDM el modelo con dos quimiotaxis, es decir, con $d = 1$. Así podremos apreciar cómo afecta al movimiento de las presas el hecho de sentirse atraídas por los huevos de depredador. Esa mecánica biológica se puede entender en el contexto de una trampa que los depredadores activos les tienden a las presas para hacer que acudan a cierta región del dominio a la que ellos también se sientes atraídos.

El modelo de Rosezweig-MacArthur que vamos a representar es similar a los anteriores para que verifique todas las hipótesis del análisis teórico pero esta vez con los coeficientes que siguen.

$$\xi(v) = \frac{1 + \tanh(1.5(v - 0.5))}{2}, \quad \eta(v) = \frac{1 - \tanh(1.5(v - 0.5))}{2},$$

$$\Phi(v) = 0.5 \frac{v}{4 + v}, \quad f(v) = v \left(1 - \frac{v}{3}\right), \quad g(u) = 1.5u, \quad a(v) = 3v, \quad n(w) = 18,$$

con $c = 1$. Así pues las constantes de las hipótesis (h₀)-(h₇) son $B = 0.5$, $D = 1.5$, $E = 1$, $F = 1/3$, $N = 3$ y $M = -1/2$. Con esta elección de coeficientes observamos que el punto globalmente asintóticamente estable es el $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 3, 0)$. Además el hecho de que $M < 0$ no supone ningún inconveniente mayor ya que todos los $v_0(x) \geq 0$ ($v_0 \neq 0$) son datos iniciales admisibles.

En este modelo, como $d = 1$, tenemos dos funciones de respuesta quimiotáctica, una para las presas y otra para los depredadores, así pues consideramos que u sufre una respuesta quimiotáctica de tipo Ricker mientras que las presas v de tipo saturada,

$$\chi(w) = we^{-2.4w}, \quad \mu(w) = \frac{w}{1 + 5w^3},$$

tales que verifican las hipótesis de los teoremas de estabilidad.

Los datos iniciales considerados para este Ejemplo 3 son de un tercer tipo diferente a los anteriores,

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= 2((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2), \\ v_0(x, y) &= 2(2 - (x - 0.5)^2)(y - 0.5)^2), \\ w_0(x, y) &= 2((x - 0.9)^2 + (y - 0.9)^2). \end{aligned}$$

Para este último ejemplo también utilizamos la malla irregular de 5.1, ya es una de las características principales de este método *meshless* de Diferencias Finitas Generalizadas.

tiempo (s)	1	5	10	15
$\ u - 0\ _\infty$	0.9833	0.0037	$4.7232 \cdot 10^{-6}$	$6.6918 \cdot 10^{-9}$
$\ v - 3\ _\infty$	0.1363	0.0011	$1.4944 \cdot 10^{-5}$	$1.1311 \cdot 10^{-7}$
$\ w - 0\ _\infty$	$2.7332 \cdot 10^{-5}$	$4.6221 \cdot 10^{-8}$	$5.9008 \cdot 10^{-11}$	$8.3489 \cdot 10^{-14}$

Tabla 5.3: Valores del error en norma l^∞ en el Ejemplo 3.

En las Figuras 5.8, 5.9 y 5.10 se muestra la solución numérica en tiempos $t = 1$, $t = 5$ y $t = 10$ (s) y la Tabla 5.3 muestra los errores en norma l^∞ de la diferencia entre la solución numérica y el punto globalmente asintóticamente estable $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 3, 0)$ para los tiempos

$t = 1, 5, 10$ y 15 segundos. Observamos como en efecto el error entre las soluciones numéricas y el punto estacionario constante $(0, 3, 0)$ decrece muy rápidamente con el tiempo en norma l^∞ .

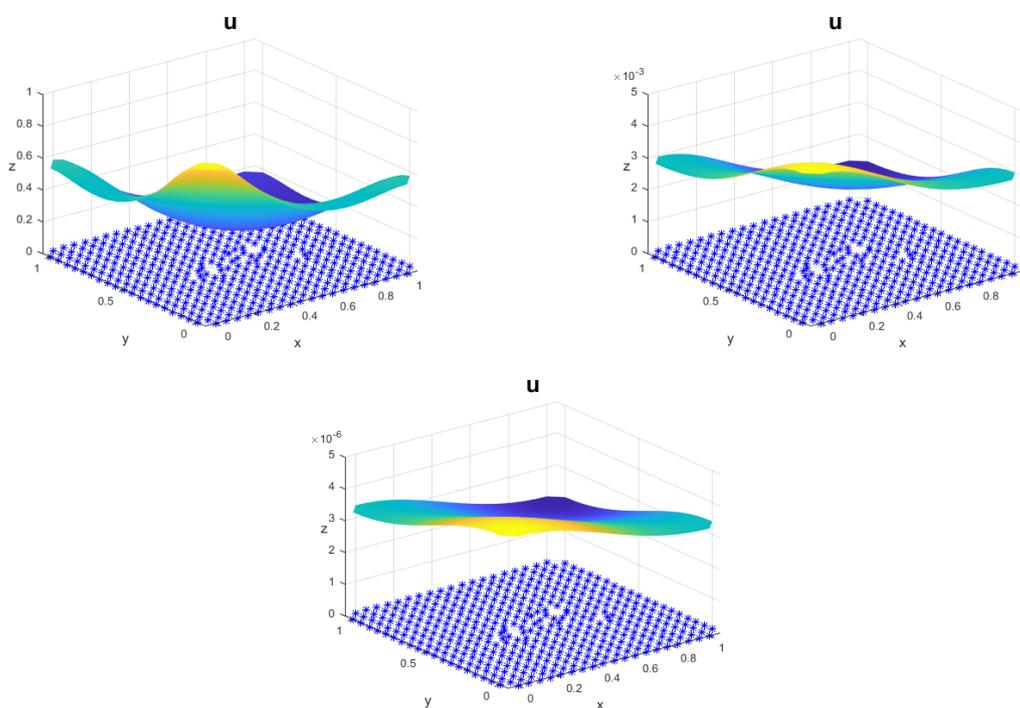


Figura 5.8: Solución numérica de u en los tiempos 1, 5 y 10 (s) para el Ejemplo 3.

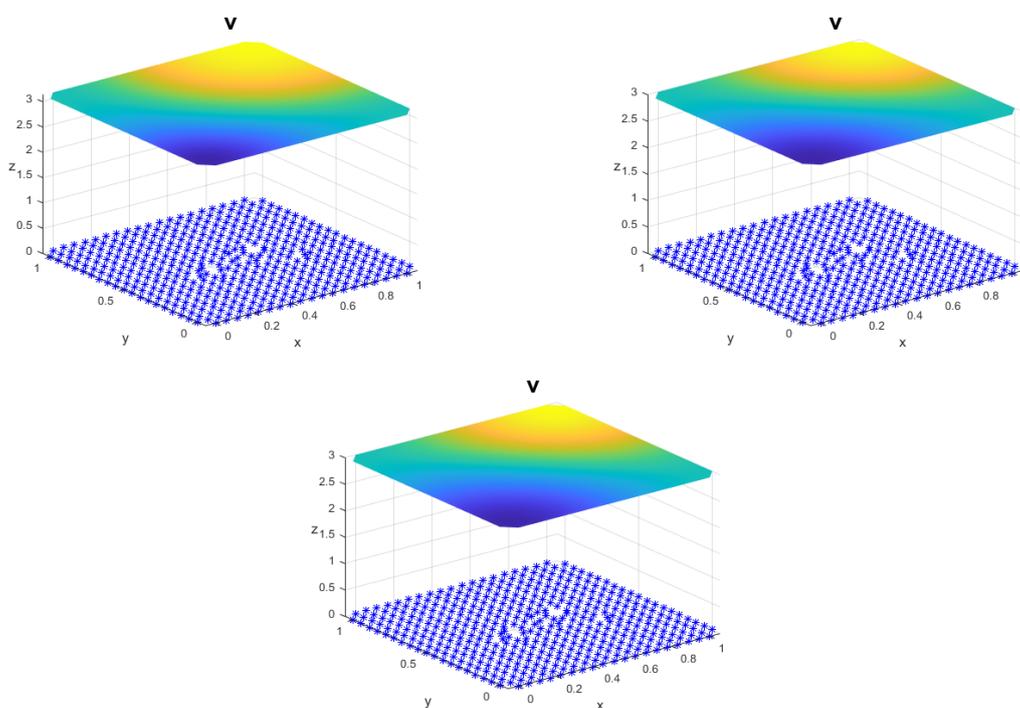


Figura 5.9: Solución numérica de v en los tiempos 1, 5 y 10 (s) para el Ejemplo 3.

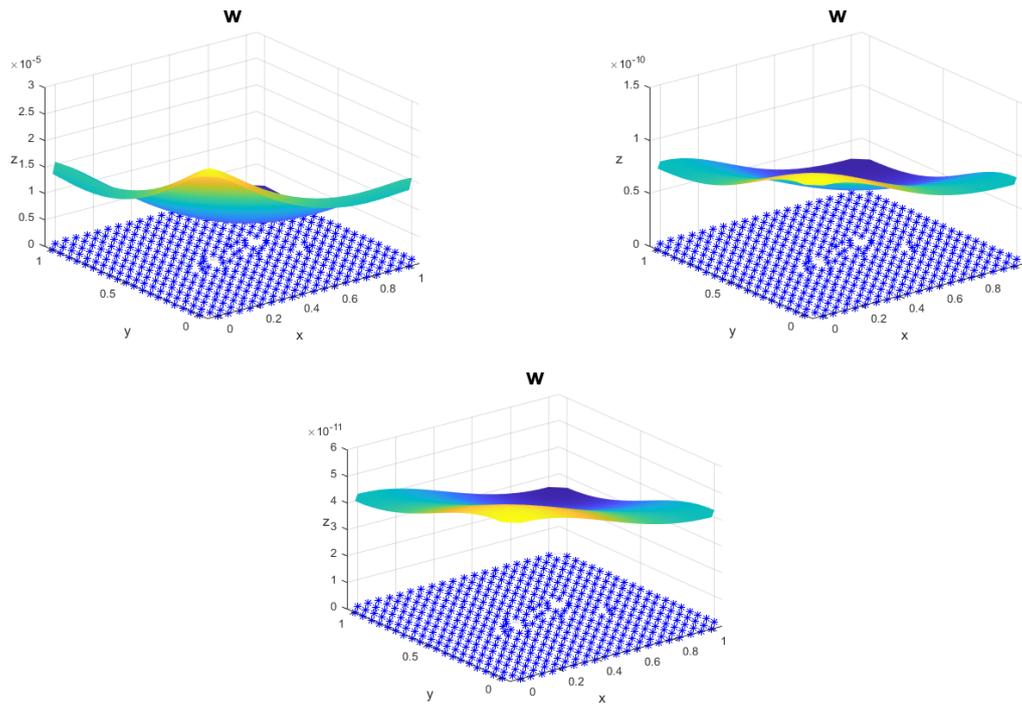


Figura 5.10: Solución numérica de w en los tiempos 1, 5 y 10 (s) para el Ejemplo 3.

Conclusiones

Durante este trabajo hemos introducido un sistema nuevo de ecuaciones en derivadas parciales del tipo parabólico-parabólico-ordinario que modelan las interacciones depredador-presa en un ecosistema en el que se tienen en cuenta los depredadores inactivos: huevos o depredadores en estado de hibernación. Además el sistema que hemos introducido presenta el fenómeno de la quimiotaxis, por el cual las especies son capaces de dirigir su movimiento hacia las zonas en las que hay una mayor concentración de otras especies. En particular hemos introducido dos modelos que se pueden escribir de la misma forma: uno con una única quimiotaxis, $d = 0$, y otro con dos quimiotaxis $d = 1$. El proceso de la quimiotaxis es muy complicado de tratar matemáticamente ya que es altamente no lineal y la teoría clásica de ecuaciones en derivadas parciales lineales no basta para su análisis. Son innumerables los casos de ecuaciones no lineales o quasi-lineales que sufren el fenómeno de blow-up o explosión en tiempo finito y para las que no existe solución global. Del mismo modo asegurar que un esquema numérico converge cuando se trata de sistemas no lineales es delicado y de ahí que el método de Diferencias Finitas Generalizadas sea muy recomendable para estudiar sistemas depredador-presa con quimiotaxis.

Así pues bajo unas hipótesis razonables y consistentes con las de los modelos en lo que nos hemos basado, es decir [23], [28], [48] y [49], hemos demostrado la existencia global de soluciones para el sistema con una y con dos quimiotaxis, hemos estudiado el comportamiento asintótico y hemos demostrado que solo hay un estado estacionario constante no negativo globalmente asintóticamente estable, también en consonancia con los trabajos de Kuwamura, Jin, Wu, Shi y Wang. Finalmente hemos diseñado un esquema numérico utilizando el método de Diferencias Finitas Generalizadas que hemos demostrado ser convergente bajo unas restricciones muy débiles, como se ve en la variedad de ejemplos expuestos para el modelo de Rosezweig-MacArthur.

El resultado de existencia de soluciones en el caso de $d = 0$ ya ha sido publicado:

- R. Dáger, V. Navarro, M. Negreanu. *Uniform boundedness of solutions for a predator-prey system with diffusion and chemotaxis*. Comptes Rendus Mathématique 358, no. 1 **2020** 103–108.

Los resultados de existencia global en el caso de dos quimiotaxis, $d = 1$, así como los resultados sobre el comportamiento asintótico de las soluciones han sido redactados y recientemente enviados como manuscrito:

- R. Dáger, V. Navarro, M. Negreanu, A.M. Vargas. *Uniform asymptotic behavior of solutions for a predator-prey system with diffusion and chemotaxis*. Preprint.

Por último toda la investigación numérica del método de Diferencias Finitas Generalizadas, la demostración de la convergencia del esquema numérico y los ejemplos expuestos han sido redactados y recientemente enviados como manuscrito:

- R. Dáger, V. Navarro, M. Negreanu, A.M. Vargas. *Uniform asymptotic behavior of numerical solutions for a predator-prey system with diffusion and chemotaxis*. Preprint.

Bibliografía

- [1] N. ALIKAKOS. *L^p bounds of solutions of reaction-diffusion equations*. Communications in Partial Differential Equations 4, no. 8 (1979) 827–868.
- [2] N. ALIKAKOS. *An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations*. Journal of Differential Equations 33 (1979) 201–225.
- [3] H. AMANN. *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations. II. Reaction–diffusion systems*. Differential and Integral Equations 3, no. 1 (1990) 13–75.
- [4] H. AMANN. *Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems*. Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Teubner-Texte zur Mathematik, Springer Fachmedien Wiesbaden, 9–126, 1993.
- [5] X. BAI Y M. WINKLER. *Equilibration in a fully parabolic two–species chemotaxis system with competitive kinetics*. Indiana University Mathematical Journal 65, no. 2 (2016) 553–583.
- [6] A.D. BAZYKIN. *Nonlinear dynamics of interacting populations*. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, Vol. 11, 1998.
- [7] N. BELLOMO, A. BELLOUQUID, Y. TAO Y M. WINKLER. *Toward a mathematical theory of Keller–Segel models of pattern formation in biological tissues*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 25, no. 9 (2015) 1663–1763.
- [8] J.J. BENITO, F. UREÑA Y L. GAVETE. *Influence of several factors in the generalized finite difference method*. Applied Mathematical Modelling 25 (2001) 1093–1053.
- [9] J.J. BENITO, A. GARCÍA, L. GAVETE, M. NEGREANU, F. UREÑA Y A.M. VARGAS. *On the numerical solution to a parabolic–elliptic system with chemotactic and periodic terms using Generalized Finite Differences*. Engineering Analysis with Boundary Elements 113 (2020) 181–190.
- [10] M. BRAUN. *Differential equations and their applications*. Springer Texts in Applied Mathematics, 1975.
- [11] H. BREZIS. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Universitext, 2002.
- [12] J.L. CUESTA MOLINA (DIR. L. GAVETE). *Estudio de dos métodos sin malla para la resolución de ecuaciones elípticas. Estimación del error*. Tesis doctoral. E.T.S.I. Minas. Universidad Politécnica de Madrid. Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales, 2003.
- [13] R. DÁGER, V. NAVARRO Y M. NEGREANU. *Uniform boundedness of solutions for a predator–prey system with diffusion and chemotaxis*. Comptes Rendus Mathématique 358, no. 1 (2020) 103–108.
- [14] R. DÁGER, V. NAVARRO, M. NEGREANU Y A.M. VARGAS. *Uniform asymptotic behavior of numerical solutions for a predator–prey system with diffusion and chemotaxis*, preprint.
- [15] R. DÁGER, V. NAVARRO, M. NEGREANU Y A.M. VARGAS. *Uniform asymptotic behavior of solutions for a predator–prey system with diffusion and chemotaxis*, preprint.
- [16] L.C. EVANS. *Partial differential equations*. American Mathematical Society. Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, 2010.

- [17] W.H. FREY. *Flexible finite-differences stencils from isoparameric finite elements*. IJNME 12 (1978) 229–235.
- [18] M. GYLLSTRÖM Y L.A. HANSSON. *Dormancy in freshwater zooplankton: Induction, termination and the importance of benthic-pelagic coupling*. Aquatic Sciences 66 (2004) 274–295.
- [19] D. HORSTMANN. *From 1970 until present: the Keller–Segel model in chemotaxis and its consequences*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung 105, no. 3 (2003) 103–165.
- [20] D. HORSTMANN Y M. WINKLER. *Boundedness vs. blow-up in a chemotaxis system*. Journal of Differential Equations 215, no. 1 (2005) 52–107.
- [21] E. ISAACSON Y H.B. KELLER. *Analysis of numerical methods*. John Wiley & Sons Inc, 1966.
- [22] P.S. JENSEN. *Finite difference technique for variable grids*. Computers and Structures 2 (1972) 17–29.
- [23] H.Y. JIN Y Z.A. WANG. *Global stability of prey–taxis*. Journal of Differential Equations 262 (2017) 1257–1290.
- [24] A. JÜNGEL. *Diffusive and nondiffusive population models*. Mathematical Modelling of Collective Behavior in Socio–Economic and Life Sciences, Birkhäuser, 2010.
- [25] H.K. KHALIL. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 1996.
- [26] E.F. KELLER Y L.A. SEGEL. *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*. Journal of Theoretical Biology 26 (1970) 399–415.
- [27] E.F. KELLER Y L.A. SEGEL. *A model for chemotaxis*. Journal of Theoretical Biology 30 (1971) 225–234.
- [28] M. KUWAMURA. *Turing instabilities in prey–predator systems with dormancy of predators*. Journal of Mathematical Biology 71 (2015) 125–149.
- [29] P. LANCASTER Y K. SALKAUSKAS. *Curve and surface fitting*. Academic Press, 1986.
- [30] J.P. LASALLE. *Some extensions of Liapunov’s second method*. IRE Trans. Circuit Theory CT–7 (1960) 520–527.
- [31] T. LISZKA Y J. ORKISZ. *The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics*. Computers and Structures 11 (1980) 83–95.
- [32] P. LIU, J. SHI Y Z. WANG. *Pattern formation of the attraction–repulsion Keller–Segel system*. Discrete and Continuous Dynamical System Series B, 18, no. 10 (2013) 2597–2625.
- [33] M. MIZUKAMI Y T. YOKOTA. *Global existence and asymptotic stability of solutions to a two–species chemotaxis system with any chemical diffusion*. Journal of Differential Equations 261 (2016) 2650–2669.
- [34] J.D. MURRAY. *Mathematical biology*. Springer Interdisciplinary Applied Mathematics, 2002.
- [35] T. NAKAZAWA, M. KUWAMURA Y N. YAMAMURA. *Implications of resting eggs of zooplankton for the paradox of enrichment*. Population Ecology 53 (2011) 341–350.
- [36] M. NEGREANU Y J.I. TELLO. *On a two species chemotaxis with slow chemical diffusion*. SIAM Journal on Mathematical Analysis 46, no. 6 (2014) 3761–3781.
- [37] M. NEGREANU Y J.I. TELLO. *Asymptotic stability of a two species chemotaxis system with non-diffusive chemoattractant*. Journal of Differential Equations 258 (2015) 1592–1617.
- [38] M. NEGREANU Y J.I. TELLO. *Global existence and asymptotic behavior of solutions to a Predator–Prey chemotaxis system with two chemicals*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 474, no. 2 (2019) 1116–1131.

- [39] M. NEGREANU, J.I. TELLO Y A.M. VARGAS. *On a Parabolic–ODE chemotaxis system with periodic asymptotic behavior*, preprint.
- [40] N. PERRONE Y R. KAO. *A general finite difference method for arbitrary meshes*. Computers and Structures 5 (1975) 45–58.
- [41] M.H. PROTTER Y H.F. WEINBERGER. *Maximum principles in differential equations*. Springer-Verlag, 1984.
- [42] M.L. ROSENZWEIG Y R.H. MACARTHUR. *Graphical representation and stability conditions of predator–prey interaction*. The American Naturalist 97, no. 895 (1963) 209–223.
- [43] S. SASTRY. *Nonlinear System – Analysis, Stability and Control*. Springer Interdisciplinary Applied Mathematics. Systems and Control, 1999.
- [44] Y. TAO Y Z. WANG. *Competing effects of attraction vs. repulsion in chemotaxis*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 23 (1) 1-36, 2013.
- [45] Y. TAO Y M. WINKLER. *Large time behavior in a multidimensional chemotaxis–haptotaxis model with slow signal diffusion*. SIAM Journal of Mathematical Analysis 47, no. 6 (2015) 4229–4250.
- [46] F. UREÑA, L. GAVETE, A. GARCÍA, J.J BENITO Y A.M. VARGAS. *Solving second order non-linear parabolic PDEs using generalized finite difference method (GFDM)*. Journal of Computational and Applied Mathematics 354 (2019) 221–241.
- [47] M. WINKLER. *Boundedness in the higher-dimensional parabolic–parabolic chemotaxis system with logistic source*. Communications in Partial Differential Equations 35, no. 8 (2010) 1516–1537.
- [48] S. WU, J. SHI Y B. WU. *Global existence of solutions and uniform persistence of a diffusive predator–prey model with prey–axis*. Journal of Differential Equations 260 (2016) 5847–5874.
- [49] S. WU, J. WANG Y J. SHI. *Dynamics and pattern formation of a diffusive predator–prey model with predator–axis*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 28, no. 11 (2018) 2275–2312.