ESTRUCTURA EXTREMAL Y FUNCIONALES SOPORTE EN ESPACIOS DE BANACH

JESÚS RODRÍGUEZ CORROCHANO

MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS, FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Trabajo de Fin de Máster

10 de Julio de 2020

Directora:

María del Mar Jiménez Sevilla

Abstract

The aim of this work is to begin an advanced study of a classical topic in Functional Analysis and Banach space theory, specifically the extremal structure, support functionals and support points. To this end, we take as main reference and starting point the book of Fabian, Habala, Hajek, Montesinos Santalucía and Zizler, *Banach Space Theory, The Basis for Linear and Nonlinear Analysis* [4], in special the first chapters (1,2,3) and the chapter 7.

On the one hand, we analyse the concepts of support variety and extreme point of a subset of a locally convex space, along with its main properties and their behaviour with respect to lineal operators between locally convex spaces. In adittion, we study the well-known Krein-Milman theorem together with Milman theorem, which is a sort of converse of the first one. A stronger result is given in Caratheodory's theorem for the case of finite dimensional spaces.

On the other hand, we study the concepts of support functionals and support points of a convex set in a Banach space. In particular we show Bishop-Phelps theorem. This theorem states that the set of support points of a convex and closed set is dense in its boundary and if the set is in adittion bounded, then their support functionals are dense in the dual space.

Finally, in the last chapter we study an interesting topic, the equivalence between the Radon-Nikodým property and the Krein-Milman property in Banach spaces. We follow the research of Huff and Morris [6] and their proof of the equivalence of the above properties in dual Banach spaces.

Keywords

Banach spaces, extreme points, support points, support functionals, James boundary, Radon-Nikodým property, Krein-Milman property.

Índice general

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es introducirse en el estudio de un tema clásico del Análisis Funcional, los espacios de Banach, en concreto su extructura extremal y funcionales y puntos soporte. Para ello, hemos tomado como punto de partida y principal referencia bibliográfica el libro de [4] en especial los primeros capítulos (1,2,3) y el capítulo 7. Cabe destacar que en los primeros capítulos del trabajo hemos desarrollado la teoría en espacios más generales que los espacios de Banach, los llamados espacios localmente convexos.

Para introducirnos en el estudio de este tema clásico, en el primer capítulo se repasan las definiciones básicas de Análisis Funcional, norma, convergencia, espacio de Banach, espacio dual, reflexividad, operadores lineales y continuos y las topologías débiles y la polar de un conjunto así como el teorema Bipolar y Teorema de Goldstine, y algunos resultados básicos de separación tales como los famosos teoremas de Hahn-Banach. Para terminar este primer capítulo repasamos los conceptos más básicos de Teoría de la medida que utilizare durante el trabajo, siguiendo el libro de Cohn [3].

En el segundo capítulo se estudia el concepto de punto extremo de un conjunto viendo sus principales propiedades y el conocido teorema de Krein-Milman que nos dice que todo subconjunto compacto y convexo de un espacio localmente convexo es la adherencia de la envoltura convexa de sus puntos extremos, y una especie de recíproco suyo, el Teorema de Milman, así como algún ejemplo de como es el conjunto de puntos extremos de la bola unidad de algunos de los espacios de Banach más clásicos. Más adelante, en el capítulo tres, vemos una mejora del Teorema de Krein-Milman en el caso de que el espacio sea finito dimensional, es lo que se conoce como el Teorema de Caratheodory que nos dice que en un espacio n-dimensional todo punto de un conjunto compacto y convexo es una combinación convexa de a lo sumo $n+1$ puntos extremo de dicho conjunto.

En el cuarto capítulo se estudian los conceptos de funcional y punto soporte de un conjunto convexo junto con sus principales propiedades viendo el teorema de Bishop-Phelps, que nos dice que el conjunto de los puntos soporte de un conjunto cerrado y convexo es denso en su frontera; y que el conjunto de los funcionales soporte de un conjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío es denso en el espacio dual. Para demostrar este último resultado estudiamos el Principio Variacional de Ekeland.

En el capítulo quinto se estudian algunos resultados más relevantes en espacios de Banach, en la primera sección vemos el Principio de Acotación Uniforme de Banach-Steinhaus y el Teorema de Banach-Steinhaus que relaciona acotación en la topología débil y débil estrella con acotación en norma. Y en la segunda sección se ve algunas caracterizaciones de cuando un espacio de Banach es reflexivo y siguiendo el artículo de Lindenstrauss y Phelps [9] estudiamos como es el conjunto de puntos extremos de los subconjuntos de un espacio de Banach reflexivo.

En el capítulo sexto introducimos el concepto de frontera de James de un conjunto acotado estudiando sus principales propiedades y observando que el conjunto de puntos extremo de un conjunto es una frontera de James de este. También vemos algunos resultados relevantes como la desigualdad y teorema de Simons, el teorema de James, que nos dice que en un espacio de Banach todo subconjunto débil cerrado y acotado suyo es además débil compacto si y solo si todo funcional es un funcional soporte suyo, y el Teorema de Rainwater.

Por último, en el capítulo séptimo se estudia un problema abierto desde hace tiempo, la equivalencia entre la propiedad de Krein-Milman y la de Radon-Nikodým en los espacios de Banach, un espacio de Banach tiene la primera si todo subconjunto acotado, convexo y cerrado suyo es igual a la adherencia de la envoltura convexa de sus puntos extremos; y tiene la segunda propiedad si todo subconjunto acotado, convexo y cerrado suyo es igual a la adherencia de la envoltura convexa de sus puntos fuertemente expuestos. Por un lado se tiene de forma sencilla que la propiedad de Radon-Nikodým implica a la de Krein-Milman, pero la otra implicación no se sabe en general. Tomando como referencia el artículo de Huff y Morris [6] se demuestra que en los espacios de Banach duales si se tiene esa equivalencia.

Capítulo 1

Definiciones y resultados básicos

En este primer capítulo vamos a introducirnos en el estudio de los espacios de Banach repasando las definiciones y conceptos más básicos en espacios normados, también veremos una introducción a las topologías débiles en estos espacios y el concepto de polar de un conjunto y en la tercera sección veremos los famosos Teoremas de Hahn-Banach junto con la noción de espacios localmente convexos y teoremas de separación en estos espacios. Por último, en la última sección veremos una pequeña introducción a la teoría de la medida junto con los conceptos de este ámbito que utilizaré durante el trabajo.

1.1. Definiciones básicas

En esta primera sección vamos a repasar los principales conceptos para el estudio de espacios normados tales como norma, espacio de Banach, operador, isometría y espacio dual.

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), se dice que una aplicación $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, +\infty)$ es una **norma** si:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $x \in X$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

A la dupla $(X, \|\cdot\|)$ se le llama **espacio normado**.

Definición 1.2. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X y x un punto de X, se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge a** $\boldsymbol{x}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que $\|x - x_n\| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N$, en este caso se dice que la sucesión es **convergente**. De igual modo, se dice que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo $n, m \geq N$ se tiene que $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$.

Definición 1.3. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice que es un **espacio de Banach** si es completo, esto es, si toda sucesión de Cauchy es convergente en $(X, \|\cdot\|)$.

Definición 1.4. Sea X un espacio vectorial y C un subconjunto suyo, se dice que C es **convexo** si para cualesquiera $x, y \in C$ y para todo $\lambda \in [0,1]$ se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y$ pertenece a C.

Definición 1.5. Sea X un espacio vectorial y C un subconjunto suyo, se define la **envoltura convexa** de C, denotada por $conv(C)$, al conjunto:

$$conv(C) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i / x_i \in X, \lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1, ..., n \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Definición 1.6. Sea X un espacio vectorial y C un subconjunto suyo, se dice que C es **acotado** si existe $M > 0$ tal que $\sup_{x \in C} \|x\| \leq M$.

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces denoto por λC al conjunto $\{\lambda x / x \in C\}$.

Definición 1.7. Sean X un espacio vectorial y C un subconjunto suyo, se dice que C es **equilibrado** si $\alpha C \subset C$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq 1$.

Definición 1.8. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, se dice que es **separable** si existe un subconjunto D de X que es numerable y denso.

Ahora vamos a comenzar el repaso de los operadores lineales entre dos espacios normados.

Definición 1.9. Sean X, Y dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \longrightarrow Y$ una función entre estos dos espacios, se dice que T es **lineal** si:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall x, y \in X \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Al espacio vectorial formado por todas las funciones lineales entre X e Y se le denota por $\boldsymbol{\mathcal{L}(X,\ Y)}$.

Una función lineal entre dos espacios normados se dice que es un **operador**.

Un **funcional lineal** en un espacio normado X es un operador entre X y $\mathbb{K}$.

Definición 1.10. Sean X y Y dos espacios normados y T un operador de X a Y se dice que T es **acotada** si $T(B_X)$ es acotado en Y. Y definimos la **norma del operador** T como:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y / \|x\|_X \leq 1\}.$$

Denotamos por $\boldsymbol{\mathcal{B}(X,\ Y)}$ al espacio vectorial de todos los operadores acotados entre X y Y, junto con la norma de operadores.

Proposición 1.1. *Sean X e Y dos espacios normados y T un operador de X a Y. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *T es continuo en X.*

(II) *T es continuo en el 0.*

(III) *T es acotado, esto es $\|T\| < \infty$.*

Definición 1.11. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, denotamos por X^* al espacio vectorial $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ de todos los funcionales lineales y continuos en X junto con la norma de operador, $\|f\| = \sup\{|f(x)|/\|x\| \leq 1\}$ a esta norma se la llama **norma dual canónica**. Al espacio X^* se le llama **espacio dual** de X. Al espacio dual del espacio dual de X, se le llama **espacio bidual** y se denota por X^{**}.

Proposición 1.2. *El espacio dual de todo espacio normado es un espacio de Banach.*

Definición 1.12. Sean X, Y dos espacios normados y $T : X \to Y$ un operador se define el **operador dual de T** como el operador $T^* : Y^* \to X^*$ que a cada $f \in Y^*$ le asigna la un funcional sobre X^*, $T^*(f) : X \to \mathbb{R}$ definido por $T^*(f)(x) = f(T(x))$ para todo $x \in X$.

Definición 1.13. Sean X e Y dos espacios normados. Un operador $T : X \to Y$ lineal y continuo se dice que es un **isomorfismo (lineal)** si es biyectivo y $T^{-1} : Y \to X$ es lineal y continuo. Si existe un isomorfismo (lineal) de X en Y, se dice que estos espacios son **isomorfos**.

Un operador $T : X \to Y$ lineal y continuo se dice que es una **isometría (lineal)** de X en Y si $\|x\|_X = \|T(x)\|_Y$ para todo punto x de X. Si existe una isometría (lineal) sobreyectiva de X en Y, se dice que estos espacios son **isométricamente isomorfo**.

Proposición 1.3. *Dado X un espacio normado existe una isometría canónica i de X en su bidual X^{**} definida por la aplicación $i(x) = i_x$ que a cada x de X le asigna un funcional sobre X^* definido por $i_x(f) = f(x)$ para todo f en X^*.*

Definición 1.14. Un espacio normado X se dice que es **reflexivo** si la aplicación canónica $i : X \to X^{**}$ es sobreyectiva. Por tanto si X es reflexivo es isométricamente isomorfo a su bidual.

1.2. Topologías débiles y polaridad

En esta sección vamos a definir las topologías débiles en espacios normados, así como el concepto de red y de polar de un conjunto. También veremos resultados importantes como el Teorema de Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.9), Teorema Bipolar (Teorema 1.10) y Teorema de Goldstine (Teorema 1.11).

Definición 1.15. Sea X un espacio normado, definimos la topología **débil** de X, denotada por w o $w(X, X^*)$, como la topología generada por una base consistente en los conjuntos de la forma:

$$A = \{x \in X / |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \ \ \forall i = 1, ..., n\}$$

para todo $x_0 \in X,\ f_1, ..., f_n \in X^*$ y $\varepsilon > 0$.

De forma similar, definimos la topología **débil estrella** en X^*, denotada por w^* o $w(X^*, X)$, como la topología generada por una base consistente en los conjuntos de la forma:

$$A^* = \{f \in X^*/|(f - f_0)(x_i)| < \varepsilon \ \ \forall i = 1, ..., n\}$$

para todo $f_0 \in X^*$, $x_1, ..., x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Observación. La intersección finita de semiespacios de X (esto es los conjuntos $\{x \in X/f(x) > \alpha\}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X^* \setminus \{0\}$) forman una base de la topología débil en X.

Para estudiar las propiedades de estas topologías necesitamos introducir un concepto más general que el concepto de sucesión, las llamadas redes.

Definición 1.16. Un **conjunto de índices** I se dice que esta parcialmente ordenado si existe una relación binaria $\leq$ que satisface que para todos α, β, γ de I:

(a) $\alpha \leq \alpha$.

(b) Si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$, entonces $\alpha \leq \gamma$.

(c) Si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$, entonces $\alpha = \beta$.

Definición 1.17. Una **red** en un conjunto no vacío X es una aplicación N de un conjunto de índices I a X. A sus elementos les denoto por x_α en vez de $N(\alpha)$ y a la red la denoto por $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Sea J otro conjunto de índices y $S : J \to I$ con la siguiente propiedad, dado $\alpha_0 \in I$ existe $\beta_0 \in J$ tal que $\alpha_0 \leq S(\beta)$ siempre que $\beta_0 \leq \beta$. Entonces la red $\{x_{S(\beta)}\}_{\beta \in J}$ se dice que es una **subred** de la red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Definición 1.18. Decimos que una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en un espacio topológico X **converge a un punto $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$** si para todo entorno U de x existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha_0 \leq \alpha$.

Proposición 1.4. *Sea X un espacio normado, se tiene que:*

(I) En X la topología en norma es mas fina que la topología débil.

(II) En X^* la topología débil es mas fina que la topología débil estrella. De hecho si X es reflexivo, en X^* ambas topologías coinciden.

Demostración. (I) Sea $A \subset X$ abierto débil, veamos que también es abierto en norma, para ello voy a ver que todo punto de A pertenece al interior de A. Sea $x_0 \in A$, como A es abierto débil existen $f_1, ..., f_n \in X^* \setminus \{0\}$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{x \in X/|f_i(x - x_0)| < \varepsilon \ \ \forall i = 1, ..., n\} \subset A$$

considero $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{\|f_i\|}/i = 1, ..., n\} > 0$, ahora sea $x \in X$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ y sea $i \in \{1, ..., n\}$ entonces

$$|f_i(x - x_0)| \leq \|f_i\|\|x - x_0\| \leq \|f_i\|\delta \leq \|f_i\|\frac{\varepsilon}{\|f_i\|} = \varepsilon$$

por tanto $x \in A$. Entonces la bola de centro x_0 y radio δ esta contenida en A, luego x_0 es un punto interior de A, por tanto A es abierto en norma.

(II) Es consecuencia inmediata del hecho de que $X \subset X^{**}$, y la segunda parte del hecho de que si X es reflexivo, se tiene que $X = X^{**}$.

□

Consecuencia de este resultado se tiene el siguiente relacionado con la convergencia de redes:

Proposición 1.5. *Sea X un espacio normado,*

(I) *Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una red en X, se tiene que si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ converge en norma a $x \in X$, entonces también converge débilmente a x.*

(II) *Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una red en X^*, se tiene que si $(f_n)_n$ converge en norma (de operadores) a $f \in X^*$, entonces también converge débilmente a f y por tanto también converge débilmente estrella a f.*

Por último veamos una caracterización de la convergencia de sucesiones en la topología débil y débil estrella.

Proposición 1.6. *Sea X un espacio normado:*

(I) *Sean $f, f_1, ..., f_n, ... \in X^*$, entonces $(f_n)_n$ converge débil estrella a f si y solo si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.*

(II) *Sean $x, x_1, ..., x_n, .. \in X$, entonces $(x_n)_n$ converge débilmente a x si y solo si $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ para todo $f \in X^*$.*

Definición 1.19. Sean X un espacio de Banach y A un subconjunto suyo, se define la **polar de** A en X^*, denotada por A°, como:

$$A^\circ = \{f \in X^*/Re(f(x)) \leq 1 \ \forall x \in A\}.$$

En el caso de que A sea un subconjunto de X^*, denotamos por $A_\circ$ a la polar de A con respecto a X, esto es $\{x \in X/Re(f(x)) \leq 1 \ \forall f \in A\}$.

Y se define la **polar absoluta de** A como el conjunto:

$$\{f \in X^*/|f(x)| \leq 1 \ \forall x \in A\}.$$

Proposición 1.7. *Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto suyo entonces:*

(a) A° es un conjunto que contiene el 0, convexo y w^*-cerrado en X^*.

(b) Si A es equilibrado, entonces A° también lo es y además coincide con la polar absoluta de A.

Demostración. (a) Primero veamos que es convexo, sean $f_1, f_2 \in A^\circ$, $\lambda \in [0,1]$ y $x \in A$, entonces:

$$\begin{aligned} Re((\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2)(x)) &= Re(\lambda f_1(x) + (1-\lambda)f_2(x)) = \\ &= \lambda Re(f_1(x)) + (1-\lambda)Re(f_2(x)) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto A° es convexo. El hecho de que $0 \in A^\circ$ es trivial ya que $Re(0(x)) = 0$. Por lo tanto solo queda por ver que A° es w^*-cerrado. Sea $(f_n)_n$ una sucesión en A° tal que w^*-converge a $f \in X^*$, veamos que $f \in A^\circ$, sea $x \in A$ tenemos:

$$Re(f(x)) = Re(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} Re(f_n(x)) \leq 1$$

donde hemos utilizado la caracterización de la convergencia débil estrella (Proposición 1.6) y el hecho de que los $f_n \in A^\circ$, por tanto, $Re(f_n(x)) \leq 1$. Por tanto, $f \in A^\circ$, entonces A° es w^*-cerrado.

(b) Sea A equilibrado, veamos que A° es también equilibrado. Sea $f \in A^\circ$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leq 1$, veamos que $\alpha f \in A^\circ$. Sea $x \in A$, entonces

$$Re((\alpha f)(x)) = Re(\alpha f(x)) = Re(f(\alpha x)) \leq 1$$

donde hemos usado que A es equilibrado, por tanto $\alpha x \in A$. Por tanto $\alpha f \in A^\circ$, entonces A° es equilibrado. Veamos por último que A° coincide con la polar absoluta, por definición se tiene que la polar absoluta esta contenida en A°, por tanto solo hay que ver la otra inclusión. Sean $f \in A^\circ$ y $x \in A$, denoto $f(x) = a + bi$, como A° es equilibrado se tiene que $Re(\alpha f(x)) \leq 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq 1$, entonces $|f(x)| \leq 1$. Por tanto f pertenece a la polar absoluta de A. Entonces A° coincide con la polar absoluta de A.

□

Una consecuencia inmediata de la segunda parte de esta Proposición (Proposición 1.7) y la definición de polar absoluta es el siguiente resultado.

Proposición 1.8. *Sea X un espacio de Banach, se tiene que $(B_X)^\circ$ es B_{X^*} y $(B_{X^*})_\circ$ es B_X.*

Teorema 1.9 (Teorema de Alaoglu-Bourbaki)**.** *Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto suyo. Si A es un entorno del 0 entonces A° es w^*-compacto.*

Teorema 1.10 (Bipolar)**.** *Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto suyo, entonces $A^{\circ\circ}(:= (A^\circ)^\circ) = \overline{conv(A \cup \{0\})}^{w(X^{**},X^*)}$. En particular, si A es $w(X^{**}, X^*)$-cerrado, convexo y contiene al 0, entonces $A = (A^\circ)_\circ$. Análogamente, si $B \subset X^*$ es $w(X^*, X)$-cerrado, convexo y contiene al 0, entonces $B = (B_\circ)^\circ$.*

Demostración. Defino $C := \overline{conv(A \cup \{0\})}^{w}$, hay que ver que $A^{\circ\circ} = C$.

($\supset$) Es claro que $0 \in A^{\circ\circ}$, ahora veamos que $A \subset A^{\circ\circ}$, por definición se tiene que $A^{\circ\circ} = \{x \in X^{**} / Re(f(x)) \leq 1 \ \forall x \in A^\circ\}$, sea $x \in A$ y $f \in A^\circ$, entonces $Re(f(x)) \leq 1$, por tanto $x \in A^{\circ\circ}$, entonces $A \subset A^{\circ\circ}$. En consecuencia, se tiene que $0 \in A^{\circ\circ}$ y $A \subset A^{\circ\circ}$, y como $A^{\circ\circ}$ es convexo y w-cerrado, se tiene que $C = \overline{conv(A \cup \{0\})}^{w} \subset A^{\circ\circ}$.

($\subset$) Supongamos que no se da, esto es $A^{\circ\circ} \setminus C \neq \emptyset$, por tanto existe $x \in A^{\circ\circ} \setminus C$. Por el Teorema 1.20, existe $f \in X^*$ tal que $Re(f(x)) > \sup\limits_{c \in C} Re(f(c))$. Como $0 \in C$, se tiene que $\sup\limits_{c\in C} Re(f(c)) \geq Re(f(0)) = 0$, por tanto $0 \leq \sup\limits_{c\in C} Re(f(c)) < Re(f(x))$ y podemos encontrar un número positivo ε tal que $\varepsilon < Re(f(x)) - \sup\limits_{c\in C} Re(f(c))$, entonces consideramos $g := \dfrac{f}{Re(f(x)) - \varepsilon}$ se tiene que

$$0 \leq \sup_{c\in C} Re(g(c)) = \frac{\sup\limits_{c\in C} Re(f(c))}{Re(f(x)) - \varepsilon} < \frac{\sup\limits_{c\in C} Re(f(c))}{\sup\limits_{c\in C} Re(f(c))} = 1$$

y $Re(g(x)) = \dfrac{Re(f(x))}{Re(f(x)) - \varepsilon} > 1$. Por definición $A \subset C$, por tanto $\sup\limits_{a\in A} Re(g(a)) \leq \sup\limits_{c\in C} Re(g(c)) \leq 1$, entonces $g \in A^{\circ}$ y como $x \in A^{\circ\circ}$ se tiene que $Re(g(x)) \leq 1$ (contradicción, ya que acabamos de ver que $Re(g(x)) > 1$). Por tanto $A^{\circ\circ} \subset C$.

□

Utilizando este resultado, vamos a demostrar un importante resultado relacionado con el espacio bidual, el conocido Teorema de Goldstine.

Teorema 1.11 (Teorema de Goldstine)**.** *Sea X un espacio de Banach, entonces la w^*-clausura de B_X en X^{**} es $B_{X^{**}}$.*

Demostración. Aplicamos el Teorema Bipolar (Teorema 1.10) a B_X que es convexo y contiene al 0, por tanto se tiene que $(B_X)^{\circ\circ} = \overline{conv(B_X \cup \{0\})}^{w(X^{**},X^*)} = \overline{B_X}^{w(X^{**},X^*)}$ y la topología $w(X^{**}, X^*)$ es exactamente la topología w^* en X^{**}. Por otro lado, por la Proposición 1.8 se tiene que $(B_X)^{\circ} = B_{X^*}$ y $(B_{X^*})^{\circ} = B_{X^{**}}$, por tanto se tiene que:

$$\overline{B_X}^{w(X^{**},X^*)} = (B_X)^{\circ\circ} = ((B_X)^{\circ})^{\circ} = (B_{X^*})^{\circ} = B_{X^{**}}.$$

Por tanto, efectivamente, la w^*-clausura de B_X en X^{**} es $B_{X^{**}}$.

□

1.3. Teorema de Hahn-Banach y teoremas de separación

Como su propio nombre indica en esta sección vamos a ver los Teoremas de Hahn-Banach, así como el llamado funcional de Minkowski y el concepto de espacios localmente convexos y resultados análogos (o extensiones) a los Teoremas de Hahn-Banach en estos espacios.

Definición 1.20. Sea X un espacio vectorial y ρ una función de X en $\mathbb{R}$. Se dice que ρ es **subaditiva** si:

$$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y) \qquad \forall x, y \in X$$

y se dice que es **positivamente homogénea** si:

$$\rho(\alpha x) = \alpha \rho(x) \qquad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \forall \alpha > 0.$$

Teorema 1.12 (Teorema de Hahn-Banach (caso real))**.** *Sea Y un subespacio de un espacio lineal y real X y sea ρ un funcional en X positivamente homogéneo y subaditivo. Si f es un funcional lineal en Y tal que $f(y) \leq \rho(y)$ para todo punto y de Y, entonces existe un funcional lineal F en X tal que $F = f$ en Y y $F(x) \leq \rho(x)$ para todo punto x de X.*

Teorema 1.13 (Teorema de Hahn-Banach (espacios normados))**.** *Sea Y un subespacio de un espacio normado X. Si f es un elemento del dual de Y, entonces existe F en el dual de X tal que $F = f$ en Y y $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$.*

Corolario 1.14. *Sea X un espacio normado, entonces para todo punto x de X existe un funcional f en X^* de norma 1 tal que $f(x) = \|x\|$.*
En particular, $\|x\| = \text{máx}\{|f(x)|/f \in B_{X^*}\}$ para todo $x \in X$.

Ahora, vamos a ver dos resultados de separación en espacios normados, para después ampliarlos a un caso más general, en espacios localmente convexos. Para ello primero voy introducir el concepto de funcional de Minkowski:

Definición 1.21. Sea C un conjunto en un espacio normado X se define el **funcional de Minkowski** de C como la aplicación $\mu_C : X \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por:

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \text{ínf}\{\lambda > 0/x \in \lambda C\} & \text{si } \{\lambda > 0/x \in \lambda C\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si } \{\lambda > 0/x \in \lambda C\} = \emptyset \end{cases}$$

Proposición 1.15 (Propiedades del funcional de Minkowski)**.** *Sea C un entorno convexo del 0 en un espacio vectorial topológico E, y sea μ_C el funcional de Minkowski de C. Entonces:*

(i) *μ_C es un funcional continuo en E no negativo, positivamente homogéneo y subaditivo.*

(ii) *Si C es abierto, entonces $C = \{x \in E/\mu_C(x) < 1\}$.*

Lema 1.16. *Sea E un espacio vectorial topológico y sean $f : E \to \mathbb{R}$ un funcional y $\rho : E \to \mathbb{R}$ una función continua en el 0 y tales que $f \leq \rho$. Entonces f es continua.*

Teorema 1.17 (Teorema de separación de Hahn-Banach)**.** *Sea C un conjunto convexo y cerrado en un espacio normado X. Si x_0 es un punto de X que no pertenece a C entonces existe un funcional f en X^* tal que $Re\,(f(x_0)) > \sup\{Re\,(f(x))\,/x \in C\}$.*

Proposición 1.18. *Sea X un espacio normado.*

(I) *Sea C un conjunto abierto convexo en X. Si x_0 es un punto de X que no esta en C, entonces existe un funcional f en X^* tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$.*

(II) *Sean A, B dos conjuntos convexos distintos en X. Si A es abierto entonces existe un funcional f en X^* tal que $f(a) < \inf_{b \in B} f(b)$ para todo punto a de A.*

Definición 1.22. Sean E un espacio vectorial y τ una topología Hausdorff en E tales que las operaciones $+ : E \times E \to E$, definida como $+(x, y) = x + y$, y $\cdot : E \times \mathbb{K} \to E$, definida como $\cdot(x, \lambda) = \lambda x$, son continuas en $E \times E$ y $E \times \mathbb{K}$ respectivamente. Entonces el par (E, τ) se dice que es un **espacio vectorial topológico**.

Definición 1.23. Un espacio vectorial topológico (E, τ) se dice que es **localmente convexo** si (E, τ) tiene una base local consistente en conjuntos convexos.

Observación. De forma inmediata se ve que todo espacio normado es localmente convexo, ya que para cada punto basta con considerar una base de entornos formada por todas las bolas abiertas centradas en él. En cambio, no todo espacio localmente convexo es un espacio normado, para comprobarlo usamos el siguiente resultado.

Proposición 1.19. *Un espacio X localmente convexo es normable si y solo si tiene un entorno acotado del 0.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Claro.
($\Leftarrow$) Sea U un entorno acotado, equilibrado y convexo del 0 entonces el funcional de Minkowski de U es un norma continua en X que induce la topología de X.

□

Usando este resultado se tiene que todo espacio de Banach infinito dimensional con la topología débil es un espacio localmente convexo pero no es normable (ya que no tiene un entorno acotado del 0).

Veamos ahora una extensión a estos espacios del Teorema de separación de Hahn-Banach (Teorema 1.17).

Teorema 1.20. *Sea E un espacio vectorial topológico.*

(I) *Si A es un conjunto convexo, abierto y no vacío de E y x_0 es un punto de E que no esta en A. Entonces existe un funcional continuo f en E tal que $Re(f(a)) < Re(f(x_0))$ para todo punto a de A.*

(II) *Si E es un espacio localmente convexo, C es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo suyo y x_0 es un punto de E que no esta en C. Entonces existe un funcional continuo f en E tal que $\sup_{c \in C} Re(f(c)) < Re(f(x_0))$.*

Demostración. Asumimos sin pérdida de generalidad que E es real.

(I) Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el 0 pertenece a A. Entonces, por la Proposición 1.15, tenemos que el funcional de Minkowski de A, μ_A es un funcional no negativo, continuo, positivamente homogéneo y subaditivo en E y $A = \{x \in E/\mu_A(x) < 1\}$. Defino f en $span\{x_0\}$ como $f(\alpha x_0) = \alpha\mu_A(x_0)$, vamos a ver que $f(\alpha x_0) \leq \mu_A(\alpha x_0)$ para todo α real.
Si $\alpha > 0$, basta con aplicar que μ_A es positivamente homogéneo y se tiene que $f(\alpha x_0) = \alpha\mu_A(x_0) = \mu_A(\alpha x_0)$.
Si $\alpha \leq 0$, como μ_A es no negativo se tiene que $f(\alpha x_0) = \alpha\mu_A(x_0) \leq 0 \leq \mu_A(\alpha x_0)$.
Aplicando el Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.12) obtenemos un funcional lineal en E, que coincide con f en $span\{x_0\}$, y que denoto también por f, y cumple que $f \leq \mu_A$. Entonces, como μ_A es continuo por el Lema 1.16, se tiene que f es continua, por tanto pertenece a E^* y tenemos que:

$$f(a) \leq \mu_A(a) < 1 \leq \mu_A(x_0) = f(x_0) \qquad \forall a \in A.$$

(II) Supongamos ahora que E es localmente convexo. Sea U un abierto convexo, centrado en el 0 tal que $(x_0 + U) \cap C \neq \emptyset$, este abierto lo puedo tomar ya que C es cerrado y x_0 no esta en C, además lo puedo tomar convexo ya que E es localmente convexo. Entonces se tiene que x_0 no pertenece a $C + U$ que es un abierto, convexo y no vacío, luego por (I) existe $f \in E^*$ tal que $f(c+u) < f(x_0)$ para todo c en C y u en U. Entonces, como f es lineal ($f(c+u) = f(c) + f(u)$), se tiene:

$$\sup_{c\in C} f(c) \leq f(x_0) - f(u) \qquad \forall u \in U.$$

Por lo que, basta tomar un elemento u_0 de U tal que $f(u_0) > 0$ (que se puede tomar ya que f es un funcional lineal no constante y U es un abierto convexo centrado en el 0) y se tiene:

$$\sup_{c\in C} f(c) \leq f(x_0) - f(u_0) < f(x_0) \quad \Rightarrow \quad \sup_{c\in C} f(c) < f(x_0).$$

□

Corolario 1.21. *Sean E un espacio localmente convexo, x e y dos puntos suyos, si $x \neq y$ entonces existe un funcional f en E tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Demostración. Como $x \neq y$ y E es un espacio localmente convexo, puedo encontrar un cerrado C convexo tal que $x \in C$ e $y \notin C$. Por tanto, por el Teorema 1.20 (apartado (II)), existe un funcional $f \in E^*$ tal que: $\sup_{c\in C} f(c) < f(y)$, en particular $f(x) < f(y)$, por tanto $f(x) \neq f(y)$.

□

Ahora veamos la extensión a estos espacios de la Proposición 1.18.

Teorema 1.22. *Sean E un espacio vectorial topológico y A y B dos subconjuntos convexos y disjuntos suyos. Entonces:*

(I) *Si A es abierto, entonces existe un funcional f en E tal que $Re(f(a)) < \inf_{b\in B} Re(f(b))$ para todo punto a de A.*

(II) *Si E es localmente convexo y A es cerrado y B compacto. Entonces existe un funcional f en E y un número real λ tal que $Re(f(a)) < \lambda < \inf_{b\in B} Re(f(b))$ para todo punto a de A.*

Demostración. Al igual que el resultado anterior, Teorema 1.20, podemos asumir sin pérdida de generalidad que el espacio E es real.

(I) Se tiene que $A - B$ es un conjunto abierto y convexo de E, tal que el 0 no está en el (ya que $A \cap B = \emptyset$). Usando el apartado (I) del Teorema 1.20, existe un funcional f en E^* tal que $f(a-b) < f(0)(= 0)$ para todo punto a de A y b de B. Entonces, como f es lineal, se tiene que, $f(a) < f(b)$ para todo punto a de A y b de B. Por tanto

$$f(a) \leq \lambda := \inf_{b\in B} f(b) \qquad \forall a \in A.$$

Por último, supongamos que existe un punto a_0 de A tal que $f(a_0) = \lambda$, como A es abierto y f lineal y continua, podríamos encontrar un punto a de A tal que $f(a) > \lambda$ (contradicción). Por tanto:

$$f(a) < \lambda = \inf_{b\in B} f(b) \quad \forall a \in A \qquad \Rightarrow \qquad f(a) < \inf_{b\in B} f(b) \quad \forall a \in A.$$

(II) Como A es cerrado y B es compacto, dado un punto b de B existe un entorno U_b abierto, convexo y centrado en el 0 tal que $(b+U_b)\cap A = \emptyset$. Además se tiene $\{U_b : b \in B\}$ es un recubrimiento abierto de B que es compacto, luego existe un subconjunto B_0 de B finito tal que $B \subset \bigcup_{b\in B_0} b + U_b$. Tomo $U = \bigcap_{b\in B_0} U_b$ este conjunto es abierto, convexo y es un entorno centrado del 0 (por ser una intersección finita de entornos centrados del 0, abiertos y convexos) y se tiene que $(A+U)\cap B = \emptyset$. Entonces, aplicando el apartado anterior a los conjuntos $A + U$ abierto y B, se tiene que existe un funcional f en E^* tal que

$$f(a+u) < \inf_{b\in B} f(b) \quad \forall a \in A,\ u \in U \qquad \Rightarrow \qquad f(a) < \inf_{b\in B} f(b) - f(u) \quad \forall a \in A,\ u \in U.$$

Basta tomar un punto u_0 de U tal que $f(u_0) > 0$ (que se puede tomar ya que f es un funcional lineal no constante y U es un abierto convexo centrado en el 0), entonces

$$f(a) < \inf_{b\in B} f(b) - f(u_0) < \inf_{b\in B} f(b) \qquad \forall a \in A.$$

□

1.4. Definiciones y resultados básicos de Teoría de la Medida

En este sección voy a dar una pequeña introducción a las nociones más básicas de la teoría de la medida así como las definiciones de los términos que voy a utilizar durante el trabajo, para una mayor profundización tanto de estos términos como en la teoría de la medida general se puede consultar el libro de Cohn [3].

Definición 1.24. Sea X un conjunto no vacío, una familia $\mathfrak{G}$ no vacía de subconjuntos de X se dice que es una **σ-álgebra** en X si cumple que:

(I) El total y el vacío están en $\mathfrak{G}$.

(II) Si A está en $\mathfrak{G}$ entonces $X \setminus A$ también está en $\mathfrak{G}$.

(III) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathfrak{G}$ entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ está en $\mathfrak{G}$.

En el caso que X sea un espacio topológico se denomina **σ-álgebra de Borel de $\boldsymbol{X}$** a la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos abiertos de X. A los elementos de esta σ-álgebra se les llaman conjuntos **borelianos** de X.

Definición 1.25. Sean X un conjunto y $\mathfrak{G}$ una σ-álgebra en X. Una **medida** es una aplicación $\mu : \mathfrak{G} \longrightarrow [0, +\infty]$ que verifica:

(I) $\mu(\emptyset) = 0$.

(II) Si (A_n) es una sucesión de elementos de $\mathfrak{G}$ disjuntos dos a dos, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Además, se dice que la medida es de **probabilidad** si cumple que $\mu(X) = 1$.

Definición 1.26. Sean X un conjunto, $\mathfrak{G}$ una σ-álgebra en X que contiene a la σ-álgebra de Borel y μ una medida definida en $\mathfrak{G}$. Se dice que μ es una **medida regular** si:

1. Todo subconjunto compacto K de X satisface que $\mu(K) < \infty$.

2. Todo conjunto G de $\mathfrak{G}$ satisface que

$$\mu(G) = \text{ínf}\{\mu(A) : G \subset A \text{ y } A \text{ es abierto}\}.$$

3. Todo subconjunto abierto A de X cumple que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ y } K \text{ es compacto}\}.$$

Se dice que μ es un **medida de Borel regular** si es una medida regular y está definida en la σ-álgebra de Borel.

Teorema 1.23 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Sean X un espacio compacto y Ψ un funcional positivo lineal en $C(X)$. Entonces existe una única medida de Borel regular μ en X tal que*

$$\Psi(f) = \int_X f \; d\mu \qquad \forall f \in C(X).$$

Capítulo 2

Puntos extremos y Teorema de Krein-Milman

En este capítulo, primero vamos a ver los conceptos de puntos extremo y variedad soporte de un conjunto así como sus principales propiedades para poder demostrar el conocido Teorema de Krein-Milman (Teorema 2.5), que nos dirá que todo subconjunto compacto y convexo de un espacio localmente convexo es la adherencia de la envoltura convexa de sus puntos extremos, y una especie de recíproco suyo, el Teorema de Milman (Teorema 2.6). Después veremos como se relaciona el concepto de punto extremo con los operadores y algún ejemplo de como son los puntos extremos de la bola unidad de algún espacio de Banach conocido. Por último para terminar el capítulo veremos el concepto de *rebanada* de un conjunto y el Lema de Choquet (Lema 2.13).

2.1. Teorema de Krein-Milman

Definición 2.1. Sean E un espacio topológico vectorial y C un subconjunto convexo no vacío suyo. Decimos que un punto x_0 de C es un **punto extremo de C** si para todo par de puntos x_1 y x_2 de C tales que $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ se tiene que $x_1 = x_0 = x_2$.

Y denotamos por $\text{Ext}(C) = \{x \in C \ / \ x \text{ es punto extremo de } C\}$.

Definición 2.2. Sean E un espacio localmente convexo y S un subconjunto no vacío suyo. Una variedad lineal real H de E se dice que es una **variedad soporte de S** si $H \cap S \neq \emptyset$ y para todo intervalo abierto contenido en S que tiene un punto de H, satisface que todo el intervalo esta contenido en H.

Un **punto extremo de S** es una variedad soporte de dimensión 0 de S.

Un primer ejemplo de variedad soporte lo vemos en el siguiente lema.

Lema 2.1. *Sean S un subconjunto no vacío de un espacio E localmente convexo y f una función lineal, $f : E \to \mathbb{R}$ que alcanza su supremo en S. Entonces el conjunto $H := \{y \in E / f(y) = s\}$, donde $s = \sup_{x \in S} f(x)$, es una variedad soporte de S.*

En particular, si $H \cap S$ es un solo punto, este punto es un punto extremo de S.

Demostración. Por definición para ver que H es una variedad soporte de S tenemos que comprobar:

(1) $H \cap S \neq \emptyset$.

(2) Para todo (x, y) intervalo abierto de S tal que $(x, y) \cap H \neq \emptyset$, entonces $(x, y) \subset H$.

(1) Se tiene del hecho de que f alcanza su supremo en S, por lo tanto al menos hay un punto de S que está en H, esto es $H \cap S \neq \emptyset$.

(2) Sea (x, y) un intervalo abierto de S tal que $(x, y) \cap H \neq \emptyset$. Sean $x_0, y_0 \in (x, y)$ tales que $x_0 \neq y_0$ y $[x_0, y_0] \cap H \neq \emptyset$ voy a ver que $[x_0, y_0] \subset H$. Supongamos que $[x_0, y_0] \nsubseteq H$ entonces $f(x_0) < s$ ó $f(y_0) < s$. Ahora, sea $c \in [x_0, y_0] \cap H$ entonces existe λ entre 0 y 1 tal que $c = \lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0$, entonces usando que f es lineal se tiene:

$$s = f(c) = f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0) = \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(y_0) < \lambda s + (1 - \lambda)s = s \;\; !!$$

Tendría que $s < s$ lo cual es absurdo. Por tanto $[x_0, y_0] \subset H$ para todo $x_0, y_0 \in (x, y)$ tal que $[x_0, y_0] \cap H \neq \emptyset$. Entonces $(x, y) \subset H$.

Por tanto, H es una variedad soporte de S.

□

Las variedades soporte de un conjunto S tienen la siguiente propiedad transitiva:

Lema 2.2. *Sea H una variedad soporte de un conjunto S no vacío en un espacio localmente convexo E. Una variedad real lineal $H_1 \subset H$ es una variedad soporte de S si, y solo si H_1 es una variedad soporte de $H \cap S$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Vamos a ver que H_1 es una variedad soporte de $H \cap S$.

Primero tenemos que $H_1 \cap (H \cap S) = H \cap S \neq \emptyset$ ya que H es variedad soporte de S. Ahora, sea $(x, y) \subset H \cap S$ un intervalo abierto tal que $(x, y) \cap H_1 \neq \emptyset$. En particular, se tiene que $(x, y) \subset S$ y $(x, y) \cap H_1 \neq \emptyset$ y, como por hipótesis, H_1 es una variedad soporte de S entonces $(x, y) \subset H_1$. Por tanto, H_1 es una variedad soporte de $H \cap S$.

($\Leftarrow$) Vamos a ver que H_1 es una variedad soporte de S.

Primero, como H_1 es una variedad soporte de $H \cap S$, se tiene de forma clara que $H_1 \cap S = H_1 \cap (H \cap S) \neq \emptyset$ entonces $H_1 \cap S \neq \emptyset$. Ahora, sea $(x, y) \subset S$ un intervalo abierto con $(x, y) \cap H_1 \neq \emptyset$. Entonces, como $H_1 \subset H$, se tiene que $(x, y) \cap H \neq \emptyset$ y, como H es una variedad soporte de S, $(x, y) \subset H$. Por tanto, $(x, y) \subset H \cap S$ y $(x, y) \cap H_1 \neq \emptyset$ y, como por hipótesis, H_1 es una variedad soporte de $H \cap S$ se tiene que $(x, y) \subset H_1$. Entonces H_1 es una variedad soporte de S.

□

Lema 2.3. *Sean K un subconjunto compacto no vacío de un espacio localmente convexo E y $\mathcal{H} = \{H_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una familia de variedades soporte de K cerradas dirigida por la inclusión (esto es, dados $H_{\gamma_1}, H_{\gamma_2}$ dos elementos de $\mathcal{H}$ entonces existe otro elemento de $\mathcal{H}$, H_{γ_3}, tal que $H_{\gamma_3} \subset H_{\gamma_1} \cap H_{\gamma_2}$). Entonces $H := \bigcap_{\gamma\in\Gamma} H_\gamma$ es una variedad soporte cerrada de K.*

Demostración. Primero, H es cerrado ya que es la intersección de conjuntos cerrados.

Para ver que H es una variedad soporte de K hay que ver:

(1) $H \cap K \neq \emptyset$.

(2) Para todo (x, y) intervalo abierto de K tal que $(x, y) \cap H \neq \emptyset$, entonces $(x, y) \subset H$.

Para comprobar (1), defino un orden parcial en Γ: $\gamma_1 \leq \gamma_2$ si $H_{\gamma_1} \supset H_{\gamma_2}$. Como la familia $\mathcal{H}$ esta dirigida por la inclusión, se tiene que dados γ,β en Γ existe α en Γ tal que $H_\alpha \subset H_\gamma \cap H_\beta$, esto es $\gamma \leq \alpha$ y $\beta \leq \alpha$. Sea γ_1 un elemento de Γ y elijo $x_{\gamma_1} \in H_{\gamma_1} \cap K$. Por la propiedad anterior, existe γ_2 tal que $\gamma_1 \leq \gamma_2$ y elijo $x_{\gamma_2} \in H_{\gamma_2} \cap K$. Procediendo de esta manera obtengo una red $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ en K. Como K es compacto esta red tiene un punto de acumulación que pertenece a H y K. Por tanto, $H \cap K \neq \emptyset$.

Falta demostrar (2), sea $(x, y) \subset K$ un intervalo abierto con $(x, y) \cap H \neq \emptyset$. Entonces, para todo γ de Γ se tiene que $(x, y) \cap H_\gamma \neq \emptyset$ y, como H_γ es variedad soporte de K, $(x, y) \subset H_\gamma$ para todo γ en Γ. Entonces, por la definición de H, $(x, y) \subset H$.

□

Proposición 2.4. *Sean K un subconjunto compacto no vacío de un espacio localmente convexo E y H una variedad soporte cerrada de K. Entonces H contiene al menos un punto extremo de K.*

Demostración. Considero $\mathcal{H}$ la familia de las variedades soporte de K contenidas en H. La primera observación es que esta familia es no vacía ya que H está. Por el Lema 2.2 esta familia esta dirigida por la inclusión y por el Lema 2.3 toda cadena decreciente tiene un último elemento.

Por el Lema de Zorn, esta familia $\mathcal{H}$ tiene un elemento minimal, que llamo H_1. Vamos a ver por reducción al absurdo que H_1 es un punto.

Supongamos que H_1 no es un punto, entonces el conjunto $H_1 \cap K$ es un cerrado contenido en K compacto, por lo tanto es compacto; esto es, es un compacto no vacío del espacio localmente convexo H_1.

Sea f un funcional lineal y continuo, no constante, en H_1, como $H_1 \cap K$ es compacto, f alcanzará su máximo en este conjunto. Entonces, por el Lema 2.1, se tiene que $H_0 = \{y \in H_1 / f(y) = s\}$ donde $s = \sup_{x\in S} f(x)$, es una variedad soporte de $H_1 \cap K$ cerrada y por el Lema 2.2 H_0 es también variedad soporte cerrada de K (contenida en H), por tanto pertenece a $\mathcal{H}$. Y como f es no constante H_0 está estrictamente contenido en H_1. Por tanto, H_1 no es un elemento minimal de $\mathcal{H}$ (contradicción).

Por tanto H_1 es un solo punto. Esto es, H_1 es una variedad soporte de K de dimensión 0, por tanto el punto de H_1 es un punto extremo de K y como $H_1 \subset H$ este punto extremo de K pertenece a H.

□

Teorema 2.5 (Teorema de Krein-Milman). *Sean E un espacio localmente convexo y K un subconjunto compacto y convexo no vacío suyo. Entonces:*

(I) K tiene al menos un punto extremo.

(II) $K = \overline{conv(Ext(K))}$.

Demostración. (I) Sea f un funcional lineal, continuo y no constante de E, como K es compacto, f alcanza su máximo en K, luego, por el Lema 2.1, K tiene una variedad soporte cerrada y, por la Proposición 2.4, K tiene un punto extremo.

(II) Supongamos $K \setminus \overline{conv(Ext(K))} \neq \emptyset$. Entonces sea $x_0 \in K \setminus \overline{conv(Ext(K))}$. Por el Teorema 1.22, podemos encontrar un funcional lineal y continuo f tal que $f(x_0)$ es mayor que $f(x)$ para todo $x \in \overline{conv(Ext(K))}$. Como K es compacto f alcanza su máximo en K, entonces por el Lema 2.1 el conjunto $\{y \in E / f(y) = \sup_{x\in K} f(x)\}$ es una variedad soporte cerrada de K y por la Proposición 2.4 tiene al menos un punto extremo de K. Sea c uno de estos puntos extremos de K, este punto cumple:

$$f(c) = \sup_{x\in K} f(x) \geq f(x_0) > \sup\{f(x) : x \in \overline{conv(Ext(K))}\}.$$

Entonces $c \notin \overline{conv(Ext(K))}$, en particular c no es un punto extremo de K (contradicción).

Por tanto $K = \overline{conv(Ext(K))}$.

□

Observación. La hipótesis de que el espacio E sea localmente convexo es necesaria, ya que en los espacios L_p con $0 < p < 1$ (que no son localmente convexos) podemos encontrar un conjunto compacto, convexo y no vacío sin puntos extremos, una explicación detallada de como es este conjunto se puede encontrar en el artículo de Kalton y Peck [8].

El siguiente resultado es una especie de recíproco del Teorema de Krein-Milman.

Teorema 2.6 (Teorema de Milman). *Sean E un espacio localmente convexo y B un subconjunto no vacío de E tal que $C := \overline{conv(B)}$ es compacto. Entonces $Ext(C) \subset \overline{B}$.*

Antes de ver la prueba de este teorema vamos a ver un lema previo.

Lema 2.7. *Sean C un convexo en un espacio localmente convexo E y c un punto extremo de C. Si $c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ y $x_i \in C$ para todo $i = 1, ..., n$, entonces para algún $i = 1, ..., n$ se tiene que $c = x_i$.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo:

Supongamos que $c \neq x_i$ para todo $i = 1, ..., n$, entonces al menos dos de los $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son mayores estricto que 0 y menores estricto que 1, puedo suponer que son λ_1 y λ_2. Entonces puedo encontrar un $\delta > 0$ tal que $\lambda_1 + \delta < 1$, $\lambda_2 + \delta < 1$, $\lambda_1 - \delta > 0$ y $\lambda_2 - \delta > 0$. Así podemos encontrar dos puntos de C:

$$a = \sum_{i=3}^{n} \lambda_i x_i + (\lambda_1 + \delta)x_1 + (\lambda_2 - \delta)x_2 \quad ; \quad b = \sum_{i=3}^{n} \lambda_i x_i + (\lambda_1 - \delta)x_1 + (\lambda_2 + \delta)x_2$$

tales que:

$$\frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 2\lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = c$$

pero $a \neq c$ y $b \neq c$, por tanto $c \notin Ext(C)$ (contradicción).

□

Ahora procedemos a ver la prueba del Teorema de Milman (Teorema 2.6):

Demostración. Basta con ver que $Ext(C) \subset B + U$ siendo U cualquier entorno convexo, cerrado y centrado de 0.

Sea U un entorno convexo, cerrado y centrado de 0. Como C es compacto y B es un subconjunto suyo, entonces B lo puedo cubrir con una cantidad finita de conjuntos de la forma $x_i + U$, donde $x_i \in B$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Sean $B_i := \overline{conv(B \cap (x_i + U))}$, estos conjuntos son cerrados dentro de un compacto, por lo tanto también son compactos y ya sabemos que son convexos. Entonces, por el Lema 2.12, $conv(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$ es convexo y compacto. Vamos a ver que se tiene que $C = conv(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$.

($\supset$) Tenemos que $B_i \subset C$ y C convexo, entonces $conv(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \subset C$.

($\subset$) Tenemos que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U)$ entonces:

$$B \subset B \cap \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U) = \bigcup_{i=1}^{n} B \cap (x_i + U) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{conv(B \cap (x_i + U))} = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Entonces:

$$conv(B) \subset conv(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \ \Rightarrow \ C = \overline{conv(B)} \subset \overline{conv(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)} = conv(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que $conv(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$ es compacto, en particular cerrado.

Sea $e \in Ext(C) \subset C$, entonces $e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ con $b_i \in B_i$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, ..., n$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Como $e \in Ext(C)$, por el Lema 2.7, existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $e = b_i$, este b_i cumple que $b_i \in B_i \subset conv(x_i + U) = x_i + U$ (ya que U es convexo). Por tanto $e = b_i \in B + U$. Entonces, $Ext(C) \subset B + U$.

Por tanto, tenemos que $Ext(C) \subset B + U$ para todo U entorno convexo, cerrado y centrado de 0. Entonces $Ext(C) \subset \overline{B}$.

□

2.2. Puntos extremos y Operadores lineales

Sean E, F dos espacios localmente convexos y $T : E \to F$ continua y lineal. Si S es un subconjunto no vacío de E y $x_0 \in Ext(S)$, no siempre se tiene que $T(x_0)$ pertenezca a $T(Ext(S))$, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1. Tomo $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ y $T : E \to F$ definido por $T(x, y) = x$ es claro que esta T es una aplicación continua y lineal. Considero el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $K = \{(x, y)/1 \geq y \geq 0; x \geq y; x \leq y+2\}$ es no vacío y el $(1, 1)$ es un punto extremo suyo. En cambio, $T(K) = [0, 3]$ y $T(1, 1) = 1$; y es claro que 1 no es un punto extremo de [0,3].

En cambio si se tiene el resultado inverso:

Proposición 2.8. *Sean E, F espacios localmente convexos, $T : E \to F$ continuo y lineal y K un conjunto compacto no vacío de E. Entonces, todo punto extremo de $T(K)$ es la imagen por T de un punto extremo de K.*

Antes de empezar la demostración de este resultado, voy a ver un lema previo:

Lema 2.9. *Sean E, F espacios localmente convexos, $T : E \to F$ continuo y lineal, S un subconjunto no vacío de E y H una variedad soporte cerrada de $T(S)$. Entonces $T^{-1}(H)$ es una variedad soporte de S.*

Demostración. Para ver que $T^{-1}(H)$ es una variedad soporte de S, hay que ver:

(1) $T^{-1}(H) \cap S \neq \emptyset$.

(2) Para todo (x, y) intervalo abierto de S tal que $(x, y) \cap T^{-1}(H) \neq \emptyset$, entonces $(x, y) \subset T^{-1}(H)$.

(1) Como H es una variedad soporte de $T(S)$, $H \cap T(S) \neq \emptyset$, por tanto existe $s \in S$ tal que $T(s) \in H$, entonces $s \in T^{-1}(H)$, por tanto $s \in T^{-1}(H) \cap S$ por lo que $T^{-1}(H) \cap S \neq \emptyset$.

(2) Sea $(x, y) \subset S$ un intervalo abierto tal que $(x, y) \cap T^{-1}(H) \neq \emptyset$. Separo en 2 casos:

- Si $T(x) = T(y)$, entonces como T es lineal $T(\alpha) = T(x) = T(y)$ para todo $\alpha \in (x, y)$. Sea $c \in (x, y) \cap T^{-1}(H)$, entonces $T(\alpha) = T(c)$ para todo $\alpha \in (x, y)$. Por tanto $(x, y) \subset T^{-1}(H)$.
- Si $T(x) \neq T(y)$, como T es lineal $(T(x), T(y))$ es un intervalo abierto de $T(S)$. Sea $c \in (x, y) \cap T^{-1}(H)$, entonces $T(c) \in (T(x), T(y)) \cap H$, luego $(T(x), T(y)) \cap H \neq \emptyset$. Por tanto, como H es una variedad soporte de $T(S)$, $(T(x), T(y)) \subset H$. Entonces, $(x, y) \subset T^{-1}(H)$.

□

Ahora si, ya vamos a demostrar la Proposición 2.8 :

Demostración. Sea x_0 un punto extremo de $T(K)$, entonces, por definición de punto extremo, $H := \{x_0\}$ es una variedad soporte cerrada de $T(K)$, por el Lema 2.9, $T^{-1}(H)$ es una variedad soporte cerrada de $T^{-1}(T(K)) \subset K$. Por la Proposición 2.4, $T^{-1}(H)$ contiene un punto extremo de $T^{-1}(T(K)) \subset K$. Sea c un punto extremo de K en $T^{-1}(H)$ entonces, como $H = \{x_0\}$, $T(c) = x_0$, por tanto x_0 es la imagen por T de c que es un punto extremo de K.

□

En esta misma dirección tenemos los siguientes resultados:

Proposición 2.10. *Sean X e Y dos espacios localmente convexos y T un operador de X a Y lineal, continuo e inyectivo. Si C es un subconjunto convexo de X, entonces $T(Ext(C)) = Ext(T(C))$.*

Demostración. $(\subset)$ Sea c un punto extremo de C, vamos a ver que $T(c)$ es un punto extremo de $T(C)$. Supongamos que $T(c)$ no es un punto extremo de $T(C)$, entonces existen dos puntos distintos a y b en $T(C)$ tal que $T(c) = \frac{1}{2}(a+b)$. Como a y b están en $T(C)$, entonces existen $x, y \in C$ tales que $a = T(x)$ y $b = T(y)$ y como T es inyectiva y $a \neq b$ entonces $x \neq y$. Y utilizando que T es lineal:

$$T(c) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}T(x) + \frac{1}{2}T(y) = T\left(\frac{1}{2}(x+y)\right).$$

Por tanto, como T es inyectiva, $c = \frac{1}{2}(x+y)$, entonces c no es un punto extremo de C (contradicción). Por tanto, $T(c)$ es un punto extremo de $T(C)$.

$(\supset)$ Sea x un punto extremo de $T(C)$, en particular, $x \in T(C)$, por tanto existe un punto c de C tal que $x = T(c)$, veamos que c es un punto extremo de C, para ello, supongamos que c no es punto extremo, entonces existen dos puntos distintos de C, y, z tales que $x = \frac{1}{2}(y+z)$, entonces como T es lineal:

$$T(c) = T\left(\frac{1}{2}(y+z)\right) = \frac{1}{2}T(y) + \frac{1}{2}T(z).$$

Como T es inyectiva e $y \neq z$, entonces $T(y) \neq T(z)$, entonces $x = T(c)$ no es un punto extremo de $T(C)$ (contradicción). Por tanto, c es un punto extremo de C.

□

Proposición 2.11. *Sean X, Y dos espacios normados, $T : X \to Y$ una isometría lineal y C un subconjunto convexo de X. Entonces, x es un punto extremo de C si y solo si T(x) es un punto extremo de T(C).*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la anterior proposición (Proposición 2.10), ya que esta proposición nos dice que $T(Ext(C)) = Ext(T(C))$.

($\Rightarrow$) Sea x punto extremo de C, como $T(Ext(C)) = Ext(T(C))$ se tiene que $T(x)$ es un punto extremo de $T(C)$.

($\Leftarrow$) Sea $T(x)$ un punto extremo de $T(C)$, como $T(Ext(C)) = Ext(T(C))$, se tiene que $T(x) \in T(Ext(C))$, por tanto x es un punto extremo de C.

□

Vamos a ver ahora algún ejemplo de como son los conjuntos de puntos extremos de la bola unidad cerrada en algunos espacios conocidos, donde se ve de forma clara lo diferentes que pueden ser estos conjuntos.

Ejemplo 2.2. (1) Como primer ejemplo veamos que B_{c_0} no tiene puntos extremos. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{c_0}$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, por tanto existe i_0 tal que $|x_{i_0}| < \frac{1}{4}$. Tomo $y = x + \frac{1}{4}e_{i_0}$ y $z = x - \frac{1}{4}e_{i_0}$, se tiene que tanto y como z están en B_{c_0} y $\frac{1}{2}(y+z) = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{4}e_{i_0}) + \frac{1}{2}(x-\frac{1}{4}e_{i_0}) = x$. Por tanto x no es un punto extremo de B_{c_0}.

(2) Los puntos extremos de B_{l_1} son $\{\pm e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Primero veamos que efectivamente $\pm e_i$ son puntos extremos para cualquier $i \in \mathbb{N}$. Sean $i \in \mathbb{N}$ y $x, y \in B_{l_1}$ tales que $e_i = \frac{x+y}{2}$. Entonces se tiene que $\frac{x_i + y_i}{2} = 1$ y como $x, y \in B_{l_1}$) se tiene que $x_i = y_i = 1$ y $x_j = y_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ distinto de i. Entonces $x = y = e_i$, por tanto e_i es un punto extremo de B_{l_1}. De forma análoga se ve que $-e_i$ también es punto extremo de B_{l_i}, por tanto $\{\pm e_i\}_{i=1}^{\infty}$ son puntos extremo de B_{l_1}.

Por último veamos que no hay ninguno más, es claro que si un punto es extremo de B_{l_1} entonces está en su frontera. Sea x tal que $\|x\|_1 = 1$ y x es distinto de $\pm e_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces existen $j, k \in \mathbb{N}$ distintos tales que $0 < |x_j| < 1$ y $0 < |x_k| < 1$, por tanto existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x_j - \delta| < 1$, $0 < |x_j + \delta| < 1$, $0 < |x_k - \delta| < 1$ y $0 < |x_k + \delta| < 1$. Entonces

$$x = \frac{(x - \delta e_j + \delta e_j) + (x + \delta e_j - \delta e_k)}{2}$$

con $(x - \delta e_j + \delta e_j), (x + \delta e_j - \delta e_k) \in B_{l_1}$ entonces x no es un punto extremo de B_{l_1}.

(3) Todos los puntos de la frontera de B_{l_p} con $1 < p < \infty$ son puntos extremos suyos. Sea $x \in l_p$ con $\|x\|_p = 1$ y supongamos que existen $y, z \in B_{l_p}$ distintos tales que $x = \dfrac{y+z}{2}$, entonces

$$1 = \|x\|_p = \left\|\frac{y+z}{2}\right\|_p \leq \frac{\|y\|_p + \|z\|_p}{2} \leq 1$$

Entonces $\|y\|_p = \|z\|_p = 1$. Ahora, utilizando el hecho de que dados $a, b \in \mathbb{R}$ distintos entonces $\left|\dfrac{a+b}{2}\right|^p < \frac{1}{2}|a| + \frac{1}{2}|b|^p$ se tiene que:

$$\left\|\frac{y+z}{2}\right\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{y_i+z_i}{2}\right|^p < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}|y_i|^p + \frac{1}{2}|z_i|^p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}|z_i|^p = \frac{1}{2}(\|y\|_p^p + \|z\|_p^p) = 1$$

donde hemos utilizado que como y y z son disjuntos existirá algún $i \in \mathbb{N}$ tal que y_i es distinto de z_i. Entonces se tiene que:

$$1 = \|x\|_p^p = \left\|\frac{y+z}{2}\right\|_p^p < 1$$

(contradicción). Por tanto y, z son iguales, esto es $y = x = z$, entonces x es un punto extremo de B_{l_p}. Por tanto, todos los puntos de la frontera de B_{l_p} son puntos extremos suyos.

(4) La bola unidad de $L_1([0,1])$ no tiene puntos extremos.

2.3. Lema de Choquet

Nota. Durante esta sección voy a utilizar las nociones de topología débil y espacio dual en espacios localmente convexos. En estos espacios estos conceptos se definen de forma análoga a como las he definido para espacios normados.

Definición 2.3. Sea C un conjunto en un espacio localmente convexo X. Una **rebanada de C** es una intersección de C con un semiespacio abierto de X.

Observación. Las intersecciones finitas de rebanadas forman una base de la topología débil.

Antes de ver el llamado Lema de Choquet, vamos a probar un lema previo:

Lema 2.12. *Sean E un espacio localmente convexo y K_1,..., K_n subconjuntos convexos y compactos de E. Entonces la envoltura convexa de $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ es también compacta.*

Demostración. Para ver que es compacto vamos a ver que de toda sucesión se puede extraer una subsucesión finita. Sea $(x_m)_{m\subset\mathbb{N}}$ una sucesión de $conv(\bigcup_{i=1}^{n} K_i)$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^m k_i^m$ donde $K_i^m \in K_i$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^m = 1$ con $\alpha_i^m \geq 0$.

Tenemos que $(k_1^m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en K_1 (compacto) entonces existe una subsucesión $(k_1^{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ convergente.

Ahora, tomo la subsucesión $(k_2^{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ de $(k_2^m)_{m\in\mathbb{N}}$ en K_2 (compacto), luego existe una subsucesión de la subsucesión, que para simplificar notación vuelvo a llamar igual, $(k_2^{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ convergente, con esta subsucesión de índices la subsucesión $(k_1^{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Realizando este procedimiento hasta el paso n llego a las subsucesiones $(k_1^{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$,..., $(k_n^{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ de $(k_1^m)_{m\in\mathbb{N}}$,..., $(k_n^m)_{m\in\mathbb{N}}$ respectivamente, convergentes.

Ahora, defino el siguiente conjunto en $\mathbb{K}^n$:

$$A := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n / x_i \geq 0 \ \ \forall i = 1, ..n \ \text{ y } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Este conjunto es un compacto en $\mathbb{K}^n$. Tomo la sucesión $(\alpha_1^{m_l}, ..., \alpha_n^{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ en A (compacto), luego existe una subsucesión, que por simplificar notación llamo igual, $(\alpha_1^{m_l}, ..., \alpha_n^{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ convergente.

Así tengo que con esta subsucesión de índices cada subsucesión $(k_i^{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ es convergente en K_i y $(\alpha_1^{m_l}, ..., \alpha_n^{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ convergente. Luego la subsucesión $(x_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ de $(x_m)_{m\subset\mathbb{N}}$ es convergente.

Por tanto $conv(\bigcup_{i=1}^{n} K_i)$ es compacto.

□

Lema 2.13 (Lema de Choquet)**.** *Sean X un espacio localmente convexo y C un subconjunto w-compacto suyo. Entonces para todo x punto extremo de C, las rebanadas de C que contienen a x forman una base de entornos de x en la topología débil relativa en C.*

Demostración. Por la observación tenemos que todo entorno de x en C es de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{V}_i$ donde $\tilde{V}_i$ son rebanadas de C.

Por lo que, basta con ver que para todo $V = \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{V}_i$ entorno de x en la topología débil relativa en C, donde $\tilde{V}_i$ son rebanadas de C, existe B una rebanada de C tal que $x \in B$ y $B \subset V$.

Sea $V = \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{V}_i$ entorno de x, entonces $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus V_i) \cap C$. Entonces, como x es un punto extremo de C, por el Lema 2.7, $x \notin conv(\bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus V_i) \cap C)$.

Cada $(X \setminus V_i) \cap C$ son w-cerrados dentro de un w-compacto, C, por tanto son w-compactos y por el Lema 2.12 tenemos que $\bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus V_i) \cap C$ es w-compacto, luego $x \notin \overline{conv(\bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus V_i) \cap C)}$.

Por el Teorema de Hanh-Banach (Teorema 1.12), existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$f(x) > \alpha > sup\{f(x)/x \in \bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus V_i) \cap C\}.$$

Entonces la rebanada de C, $B := C \cap \{x \in X/f(x) > \alpha\}$, contiene a x y está contenida en V.

□

Usando este último lema podemos dar una prueba del Teorema de Milman (Teorema 2.6) para la topología débil:

Proposición 2.14. *Sean X un espacio localmente convexo, C un subconjunto w-compacto y convexo suyo y B contenido en C un conjunto tal que $\overline{conv(B)} = C$. Entonces $Ext(C) \subset \overline{B}^w$.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe un punto extremo de C, x, tal que $x \notin \overline{B}^w$. Entonces por el Lema de Choquet (Lema 2.13) existe una rebanada S de C tal que $x \in S$ y $S \cap B = \emptyset$. Entonces por el Teorema 1.22 existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$f(x) > \alpha \geq \sup_{y \in B} f(y).$$

Como f es lineal, para todo $c = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i$ con $b_i \in B$, $\lambda_i \geq 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, se tiene

$$f(c) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f(b_i) \leq \sup_{y \in B} f(y) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \sup_{y \in B} f(y) \quad \Rightarrow \quad \sup_{y \in B} f(y) = \sup_{y \in \overline{conv(B)}} f(y).$$

Por tanto:

$$f(x) > \alpha \geq \sup_{y \in \overline{conv(B)}} f(y) \Rightarrow x \notin \overline{conv(B)} = C \Rightarrow x \notin C.$$

(Contradicción, ya que x es un punto extremo de C y por tanto pertenece a C). Entonces todo punto extremo de C pertenece a $\overline{B}^w$.

□

Capítulo 3

Representación y compacidad

En este capítulo primero vamos a ver que en el caso de que el espacio sea finito dimensional el Teorema de Krein-Milman (Teorema 2.5) se puede mejorar, esta mejora se conoce como Teorema de Carathéodory (Teorema 3.1). Después veremos cuando se dice que una medida representa a un punto y por último veremos el Teorema de representación de Choquet (Teorema 3.5).

3.1. Teorema de Caratheodory

Teorema 3.1 (Teorema de Caratheodory)**.** *Sea D un subconjunto compacto y convexo de un espacio topológico vectorial n-dimensional E. Entonces todo punto x de D es una combinación convexa de a lo sumo n+1 puntos extremos de D.*

Antes de ver la demostración de este resultado vamos a comprobar un lema que utilizaremos para su demostración.

Lema 3.2. *Sea D un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces o bien $Int(D) \neq \emptyset$, o bien, D esta en un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el 0 pertenece a D. Sea $\{e_i\}_{i=1}^m$ un conjunto maximal de vectores linealmente independientes en D, entonces $D \subset span(\{e_i\}_{i=1}^m)$. Se tiene que $m \leq n$. Y si $m < n$ entonces D esta en un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$, $span(\{e_i\}_{i=1}^m)$. Por lo que basta con comprobar que si $m = n$ entonces $Int(D) \neq \emptyset$.

Para todo $i = 1, ..., n$, como la dirección e_i está en D, tengo que existe α_i positivo tal que $\alpha_i e_i$ está en D. Y entonces, como D es convexo, se tiene que:

$$C := conv(\{\alpha_i e_i\}_{i=1}^n \cup \{0\}) \subset D.$$

Para todo $i = 1, ..., n$ existe $m_i > 1$ tales que $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{m_i} \leq 1$ entonce se tiene:

$$B := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i / 0 \leq \lambda_i \leq \frac{\alpha_i}{m_i}\} \subset C.$$

Y B es un entorno abierto del 0, luego:

$$\emptyset \neq Int(B) \subset Int(C) \subset Int(D) \Rightarrow Int(D) \neq \emptyset.$$

□

Ahora ya vamos a ver la demostración del Teorema 3.1.

Demostración. Vamos a demostrarlo por inducción sobre n la dimensión de E.

- $n = 1$. En el caso 1-dimensional se tiene que D es un intervalo cerrado $[a, b]$. Es claro que a y b son puntos extremos de D y por tanto, dado $d \in D$ existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $d = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Por lo que el resultado es cierto cuando $n = 1$.

- Supongamos que el resultado se cumple para $1, 2, ..., n-1$, vamos a comprobarlo para n. Por el Lema 3.2 tenemos dos posibilidades para D. O bien D está en un subespacio propio de E, en este caso D está contenido en un espacio de dimensión menor que n, luego por hipótesis de inducción tenemos el resultado. O bien, $Int(D) \neq \emptyset$, en este caso separamos los puntos de D en dos casos:

  a) Si x es un punto de la frontera de D, sea H un hiperplano soporte de D tal que $x \in H \cap D$. Tenemos que $H \cap D$ es un compacto y convexo de un espacio de dimensión $n - 1$, luego por hipótesis de inducción, x se puede escribir como una combinación convexa de n puntos extremos de $H \cap D$, que por el Lema 2.2 serán también puntos extremos de D.

  b) Si x es un punto interior de D. Por el Teorema de Krein-Milman (Teorema 2.5) tenemos que existe al menos un punto extremo de D, sea z_0 un punto extremo de D, y sea y un punto en la frontera de D que está en la misma línea que une x con z_0. Por el caso anterior y es la combinación convexa de n puntos extremos de D, que llamo z_1,..., z_n, $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$ con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Como x esta en la línea que une y y z_0, entonces existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que:

  $$x = \alpha y + (1 - \alpha)z_0 = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i + (1 - \alpha)z_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i z_i + (1 - \alpha)z_0$$

  con $\sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i + (1 - \alpha) = \alpha + (1 - \alpha) = 1$ y $\alpha\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, ...n$ y $1 - \alpha \geq 0$. Por tanto x es una combinación convexa de $n + 1$ puntos extremos de D.

□

3.2. Teorema de representación de Choquet

Ahora vamos a reformular este teorema de Caratheodory (Teorema 3.1) en el lenguaje de la representación integral. Sea D un subconjunto convexo y compacto de un espacio vectorial topológico n-dimensional E. Para y en D denoto por δ_y a la medida de Dirac en y, esto es:

$$\delta_y(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin A \\ 1 & \text{si } y \in A \end{cases}$$

Sea x un punto de D, por el Teorema de Caratheodory (Teorema 3.1), existen x_1,..., x_k puntos extremos de D, con $k \leq n+1$ y $\alpha_i \geq 0$ para todo $i = 1, ..., k$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Defino $\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}$ voy a ver que es una medida de probabilidad de D:

Demostración. (I) Sea $A \subset D$. Tenemos que $0 \leq \delta_{x_i}(A) \leq 1$, entonces:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}(A) \Rightarrow 0 \leq \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

(II) $\mu(\emptyset) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}(\emptyset) = 0 \quad$ y $\quad \mu(D) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}(D) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$

(III) Sea $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de D disjuntos 2 a 2, entonces:

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{x_i}(A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}(A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m)$$

donde hemos utilizado que δ_{x_i} es una medida.

□

Si f es un funcional continuo en D, tenemos:

$$\int_D f d\mu = \int_D f d\Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{x_i}\Big) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int_D f d\delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i).$$

Y si además f es lineal se tiene que:

$$f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) = \int_D f d\mu.$$

Todo esto motiva la siguiente definición:

Definición 3.1. Sea D un subconjunto compacto y convexo de un espacio localmente convexo E. Decimos que una medida de probabilidad μ de D **representa a un punto $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{X}$** si:

$$f(x) = \int_D f d\mu \qquad \forall f \in E^*.$$

Si S es un subconjunto de Borel de D, decimos que una medida μ es **soportada por $\boldsymbol{S}$** si $\mu(D \setminus S) = 0$.

Proposición 3.3. *Sea D un conjunto convexo y compacto en un espacio localmente convexo E. Entonces para todo punto x de D existe una medida de probabilidad μ de D soportada por $\overline{Ext(D)}$ que representa a x.*

Demostración. Primero, tenemos por el Teorema de Krein-Milman (Teorema 2.5) que $\overline{conv(Ext(D))} = D$. Sea x un punto de D, entonces existe una red $\{y_\alpha\}$ tal que $y_\alpha \to x$ y $y_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha x_i^\alpha$ con $\lambda_i^\alpha \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha = 1$ y $x_i^\alpha \in Ext(D)$. Cada y_α lo representamos con una medida de probabilidad $\mu_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \delta_{x_i^\alpha}$.

Por el Teorema 1.23, el conjunto de las medidas de probabilidad en el compacto $\overline{Ext(D)}$ se identifica con un conjunto w^*-compacto en $B_{C(\overline{Ext(D)})^*}$ (sea μ una medida de probabilidad, defino el funcional $\Psi(f) = \int_{\overline{Ext(D)}} f \mathrm{d}\mu$). Por tanto existe una subred $\{y_\beta\}$ de $\{y_\alpha\}$ convergente en la topología w^* a una medida de probabilidad μ en $\overline{Ext(D)}$.

Si f es un funcional lineal y continuo en E, entonces su restricción a $\overline{Ext(D)}$ está en $C(\overline{Ext(D)})$ y por tanto, tenemos:

$$f(x) = \lim_\beta f(y_\beta) = \lim_\beta \int_D f d\mu_\beta = \lim_\beta \int_{\overline{Ext(D)}} f d\mu_\beta = \int_{\overline{Ext(D)}} f d\mu$$

donde en la tercera igualdad hemos utilizado que x_i^β pertenece a $\overline{Ext(D)}$ para todo β y todo i.

Para terminar la prueba, basta con extender μ a $\tilde{\mu}$ una medida definida en todo D por $\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap \overline{Ext(D)})$ para todo $B \subset D$ conjunto de Borel. Vamos a ver que $\tilde{\mu}$ es una medida de probabilidad en D:

(I) Sea $A \subset D$ conjunto de Borel entonces $\tilde{\mu}(A) = \mu(A \cap \overline{Ext(D)})$ y utilizando que $0 \leq \mu(E) \leq 1$ para todo $E \subset \overline{Ext(D)}$ conjunto de Borel, se tiene que $0 \leq \tilde{\mu}(A) \leq 1$.

(II) $\tilde{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0 \quad$ y $\quad \tilde{\mu}(D) = \mu(D \cap \overline{Ext(D)}) = \mu(\overline{Ext(D)}) = 1$.

(III) Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ conjuntos de Borel disjuntos dos a dos, utilizando que μ es una medida en $\overline{Ext(D)}$ se tiene que:

$$\tilde{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \overline{Ext(D)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap \overline{Ext(D)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n).$$

Es claro que $\tilde{\mu}(D \setminus \overline{Ext(D)}) = \mu((D \setminus \overline{Ext(D)}) \cap \overline{Ext(D)}) = \mu(\emptyset) = 0$. Y se tiene que $\tilde{\mu}(D) = \mu(\overline{Ext(D)})$, entonces:

$$f(x) = \int_{\overline{Ext(D)}} f d\mu = \int_D f d\tilde{\mu}.$$

Por tanto, $\tilde{\mu}$ es una medida de probabilidad en D soportada por $\overline{Ext(D)}$ que representa a x. □

Una cuestión natural es preguntarse cuando una medida que representa a un punto en un conjunto está soportada por sus puntos extremos, como ocurre en el Teorema de Caratheodory (Teorema 3.1). Una primera dificultad es que el conjunto $Ext(D)$ no tiene porque ser un conjunto de Borel. Sin embargo, si D es un conjunto metrizable, esto es.

Definición 3.2. Un espacio topológico (X, τ) es **metrizable** si existe una métrica $d : X \times X :\longrightarrow [0, \infty)$ tal que la topología inducida por d es τ.

Como iba diciendo si D es metrizable se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.4. *Sea D un conjunto convexo y compacto en un espacio localmente convexo E. Si D es metrizable entonces el conjunto de puntos extremos de D es un conjunto G_δ en D.*

Nota. Un conjunto se dice que es G_δ si es una intersección numerable de conjuntos abiertos.

Demostración. Sea d una métrica en D que induce la topología de D. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defino:

$$F_n := \{x \in D / \ x = \frac{y+z}{2} \text{ con } y, z \in D \ ; \ \mathrm{d}(y,z) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Primero voy a comprobar que F_n es un conjunto cerrado de D para todo $n \in \mathbb{N}$:

Sean $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F_n$ y $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, entonces existen $y_k, z_k \in D$ con $\mathrm{d}(y_k, z_k) \geq \frac{1}{n}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tenemos que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones en D que es compacto. Entonces existe una subsucesión convergente de $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y para esos subíndices la subsucesión de $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ también posee una subsucesión convergente, con estos subíndices la subsucesión de $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ también es convergente, para simplificar la notación a estas subsucesiones convergentes las llamo $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, y defino: $y := \lim_{k\to\infty} y_k$ y $z := \lim_{k\to\infty} z_k$, entonces:

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \frac{y_k + z_k}{2} = \frac{y+z}{2}$$

$$\mathrm{d}(y,z) = \mathrm{d}(\lim_{k\to\infty} y_k, \lim_{k\to\infty} z_k) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{d}(y_k, z_k) \geq \frac{1}{n}.$$

Por tanto, x pertenece a F_n. Entonces F_n es cerrado.

Ahora, vamos a probar que: Un punto x de D no es un punto extremo si y solo si existe un número natural n tal que x pertenece a F_n.

($\Leftarrow$) Sea x un punto extremo de D, entonces si $y, z \in D$ tal que $x = \dfrac{y+z}{2}$, entonces $x = y = z$ y por tanto $\mathrm{d}(y, z) = 0$. Entonces x no pertenece a F_n para todo n natural. Por tanto, para todo n natural ningún punto de F_n es un punto extremo de D.

($\Rightarrow$) Sea x un punto de D que no es punto extremo, entonces existen $x_1, x_2 \in D$ tales que $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ y $x_1 \neq x \neq x_2$ de esto último se tiene que $\mathrm{d}(x_1, x_2) > 0$, entonces existe un número natural n tal que $\mathrm{d}(x_1, x_2) \geq \dfrac{1}{n}$, por tanto x pertenece a F_n.

Entonces se tiene que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D \setminus F_n = Ext(D)$. Como F_n es cerrado en D, entonces $G_n := D \setminus F_n$ es abierto en D para todo n natural, y $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = Ext(D)$ por tanto $Ext(D)$ es un conjunto G_δ en D.

□

Teorema 3.5 (Teorema de representación de Choquet)**.** *Sea D metrizable, compacto y convexo en un espacio localmente convexo E. Entonces para todo punto x_0 de D existe una medida de probabilidad μ en D soportada por Ext(D) que representa a x_0.*

Antes de ver la demostración de este teorema veamos algunos resultados previos. Primero veamos un ejemplo de una función f definida en un espacio localmente convexo X, con la propiedad de que $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(x)$ para todo $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha+\beta = 1$ y tal que su restricción a un subconjunto de X, D metrizable, compacto y convexo, no es de la forma $f(x) = k + \varphi(x)$ con $k \in \mathbb{K}$ y $\varphi \in X^*$.

Ejemplo 3.1. Sea $X = l_1$, $f(x) := \sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^i x_i$ y $D := \left\{x \in l_1 / |x_i| \leq \dfrac{1}{4^i}\right\}$. Sean $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$, entonces:

$$f(\alpha x + \beta y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i(\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} 2^i x_i + \beta \sum_{i=1}^{\infty} 2^i y_i = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Ahora, supongamos que $f(x) = \varphi(x) + k$ con $k \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in X^*$ en D. Entonces $\varphi(x) = f(x) - k$. Sea $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ la base canónica de l_1. Entonces $x^n = \dfrac{1}{4^n} e_n$ pertenece a D para todo n número natural, y evaluando en φ tenemos:

$$\varphi(x^n) = f(x^n) - k = 2^n \frac{1}{4^n} - k = \frac{1}{2^n} - k.$$

Como φ es lineal $\varphi(x^n) = \dfrac{1}{4^n}\varphi(e_n)$, entonces

$$\varphi(e_n) = 4^n \varphi(x^n) = 4^n(\frac{1}{2^n} - k) = 2^n - 4^n k.$$

Entonces se tiene que: $\lim_{n\to\infty} \varphi(e_n) = \infty$ y por tanto, $\varphi \notin X^*$ (contradicción). Entonces f no puede ser de esa forma en D.

Definición 3.3. Sea D un conjunto compacto y A el conjunto de todas las funciones f continuas en D tales que $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(x)$ para todo $x, y \in D$ y $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha+\beta = 1$. Sea f una función continua definida en D. Se define la **envoltura cóncava de f** como la función $\overline{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\overline{f}(x) := \inf\{g(x)/g \in A; g \geq f\}.$$

Proposición 3.6 (Propiedades básicas de $\overline{f}$)**.** *Sean f y g dos funciones continuas definidas en un compacto D, entonces:*

1. *$\overline{f}$ es cóncava, acotada, semicontinua superiormente y en particular, medible Borel.*
2. *$f \leq \overline{f}$ y $f = \overline{f}$ si f es cóncava.*
3. *$\overline{f+g} \leq \overline{f}+\overline{g}$; $\overline{f+g} = \overline{f}+g$ si $g \in A$; $\overline{rf} = r\overline{f}$ si $r > 0$.*
4. *$|\overline{f}-\overline{g}| \leq \|f-g\|$.*

Demostración. (1) Primero vamos a ver que $\overline{f}$ es cóncava. Sean $x, y \in D$, $\lambda \in [0,1]$ y $g \in A$ tal que $g \geq f$ entonces:

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y) \geq \lambda\overline{f}(x)+(1-\lambda)\overline{f}(y).$$

Por tanto:

$$\overline{f}(\lambda x+(1-\lambda)y) = \inf\{g(\lambda x+(1-\lambda)y)/g \in A, g \geq f\} \geq \lambda\overline{f}(x)+(1-\lambda)\overline{f}(y).$$

Como toda función g de A es continua en un compacto, entonces es acotado y por la definición de $\overline{f}$ esta también es acotada.

(2) Primero voy a ver que $f \leq \overline{f}$. Sea $x \in D$ y sea $g \in A$ con $g \geq f$, entonces $g(x) \geq f(x)$. Por tanto

$$\overline{f}(x) = \inf\{g(x)/g \in A; g \geq f\} \geq f(x).$$

(3) Primero veamos que $\overline{f+g} \leq \overline{f}+\overline{g}$. Sea $x \in D$. Sean $h, l \in A$ con $h \geq f$ y $l \geq g$, entonces $h+l \in A$ y $h+l \geq f+g$. Luego $h+l \in \{h/h \in A\ ;\ h \geq f+g\}$ y $h(x)+l(x) = (h+l)(x)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\overline{f+g}(x) &= \inf\{h(x)/h \in A\ ;\ h \geq f+g\} \leq \\ &\leq \inf\{h(x)/h \in A\ ;\ h \geq f\}+\inf\{l(x)/l \in A\ ;\ l \geq g\} = \\ &= \overline{f}(x)+\overline{g}(x).\end{aligned}$$

Entonces $\overline{f+g} \leq \overline{f}+\overline{g}$.

Ahora veamos que $\overline{f+g} = \overline{f} + g$ si $g \in A$: Si $g \in A$ entonces es cóncava y por (2) se tiene que $\overline{g} = g$ y utilizando lo que acabamos de demostrar se tiene que $\overline{f+g} \leq \overline{f} + \overline{g} = \overline{f} + g$. Con lo que falta ver que $\overline{f+g} \geq \overline{f} + g$, sea $h \in A$ con $h \geq f + g$, entonces considero $l = h - g$, que pertenece a A (ya que h y g están en A) y $l = h - g \geq f + g - g = f$ y $l + g = h$. Entonces $\overline{f+g} \geq \overline{f} + g$.

Por último, vemos que $\overline{rf} = r\overline{f}$ si $r > 0$: Sea $h \in A$ con $h \geq rf$, considero $l = \dfrac{1}{r}h$ que esta en A y $l = \dfrac{1}{r}h \geq \dfrac{1}{r}rf = f$ y $h = rl$. Por tanto, $\overline{rf} \geq r\overline{f}$. Y para ver la otra desigualdad, sea $h \in A$ con $h \geq f$, considero $l = rh$ que pertenece a A y $l = rh \geq rf$ y $h = \dfrac{1}{r}l$. Por tanto, $\overline{rf} \leq r\overline{f}$.

(4) Para demostrar esta última propiedad basta con utilizar algunas de las propiedades ya demostradas.

$$\overline{f} = \overline{f + g - g} \leq \overline{f - g} + \overline{g} \leq \|f - g\| + \overline{g} \quad \Rightarrow \quad \overline{f} - \overline{g} \leq \|f - g\|.$$

Por tanto $|\overline{f} - \overline{g}| \leq \|f - g\|$.

□

Ahora ya vamos a proceder a demostrar el Teorema de representación de Choquet (Teorema 3.5):

Demostración. Por el Lema 3.4 se tiene que $Ext(D)$ es un conjunto G_δ en D, esto es, es un conjunto de Borel en D. Como D es metrizable y compacto entonces el espacio de las funciones continuas en D, que denoto por $C(D)$, con la norma del supremo es un espacio separable.

Sea A el subespacio de $C(D)$ formado por todas las funciones f continuas en D tal que $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(x)$ para todo $x, y \in D$ y $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$. Nótese que por el Ejemplo 3.1 una función f de A no tiene que cumplir, en general, que su restricción a D sea de la forma $f(x) = k + \varphi(x)$ con $k \in \mathbb{K}$ y $\varphi \in E^*$.

Sea $S_A = \{f \in A / \|f\| = 1\}$, como $C(D)$ es separable y S_A es un subconjunto suyo, entonces se puede encontrar una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ densa en S_A. Definimos la función $h := \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} h_n^2$. Afirmo que h es una función continua y estrictamente convexa en D.

Sean x e y dos elementos de D disjuntos. Elijo $n \in \mathbb{N}$ tal que $h_n(x) \neq h_n(y)$. Se tiene que: $h_n(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha h_n(x) + (1-\alpha)h_n(y)$ para todo $\alpha \in (0,1)$. Y además nosotros sabemos que la aplicación $t \longrightarrow t^2$ es estrictamente convexa., por tanto:

$$h_n^2(\alpha x + (1-\alpha)y) = (\alpha h_n(x) + (1-\alpha)h_n(y))^2 < \alpha h_n^2(x) + (1-\alpha)h_n^2(y) \ \ \forall \alpha \in (0,1).$$

Utilizando esto y el hecho de que $h_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} h(\alpha x + (1-\alpha)y) &= \frac{1}{2^n} h_n^2(\alpha x + (1-\alpha)y) + \sum_{j=1, j\neq n}^{\infty} \frac{1}{2^j} h_j^2(\alpha x + (1-\alpha)y) \\ &\leq \frac{1}{2^n} h_n^2(\alpha x + (1-\alpha)y) + \sum_{j=1, j\neq n}^{\infty} \frac{1}{2^j} (\alpha h_j^2(x) + (1-\alpha) h_j^2(y)) \\ &< \frac{1}{2^n} (\alpha h_n^2(x) + (1-\alpha) h_n^2(y)) + \sum_{j=1, j\neq n}^{\infty} \frac{1}{2^j} (\alpha h_j^2(x) + (1-\alpha) h_j^2(y)) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} h_j^2(x) + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} h_j^2(y) = \alpha h(x) + (1-\alpha) h(y). \end{aligned}$$

Entonces $h(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha h(x) + (1-\alpha)h(y)$. Además h es continua ya que es una serie uniformemente convergente de funciones continuas. Por tanto, efectivamente, h es una función continua y estrictamente convexa en D.

Sea $Y = A \oplus \mathbb{R}h$ subespacio de $C(D)$.

Definimos un funcional subaditivo, positivamente homogéneo p en $C(D)$ como $p(g) := \overline{g}(x_0)$, donde $\overline{g}$ es la envoltura cóncava de $g \in C(D)$, y definimos $\varphi \in Y^*$ como $\varphi(g + rh) := g(x_0) + r\overline{h}(x_0)$ para $g \in A$ y $r \in \mathbb{R}$. Vamos a ver que φ está dominado por p en Y.

Hay que comprobar que $\varphi(g+rh) \leq p(g+rh)$, esto es $g(x_0) + r\overline{h}(x_0) \leq \overline{g+rh}(x_0)$. Utilizando la propiedad (3) de la Proposición 3.6, se tiene que si $r \geq 0$

$$\overline{g+rh}(x_0) = (g + \overline{rh})(x_0) = (g + r\overline{h})(x_0) = g(x_0) + r\overline{h}(x_0).$$

Si $r < 0$, entonces, como h es convexa, rh es cóncava:

$$\overline{g+rh}(x_0) = (g + \overline{rh})(x_0) = (g + rh)(x_0) \geq g(x_0) + r\overline{h}(x_0).$$

Por tanto, $g(x_0) + r\overline{h}(x_0) \leq \overline{g+rh}(x_0)$.

Podemos aplicar el Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.12) que nos dice que existe una extensión m de φ en todo $C(D)$ tal que $m(g) \leq \overline{g}(x_0)$ para toda $g \in C(D)$ y m es un operador continuo.

Si $g \in C(D)$ y $g \leq 0$, $0 \geq g(x_0) \geq m(g)$. Por tanto, si $\|g\| \leq 1$, entonces $g - 1 \leq 0$ y $m(g) \leq m(1)$. Como $m(1) = \varphi(1) = 1$ entonces m es un funcional positivo de norma 1 en $C(D)$. Por el Teorema 1.23, existe una medida de probabilidad μ en D tal que $m(g) = \int_D g d\mu$ para toda $g \in C(D)$. Nótese que:

$$m(h) = \varphi(h) = \overline{h}(x_0) \Rightarrow \overline{h}(x_0) = m(h) = M \int_D h d\mu.$$

$$\text{Sea } g \in A \Rightarrow m(g) = \varphi(g) = g(x_0) \Rightarrow g(x_0) = m(g) = \int_D g d\mu.$$

Para terminar la demostración, basta con comprobar:

(a) $\int_D h d\mu = \int_D \overline{h} d\mu$. Tenemos por la propiedad (2) de la Proposición 3.6 que $h \leq \overline{h}$, por tanto $\int_D h d\mu \leq \int_D \overline{h} d\mu$. Además:

$$\int_D \overline{h} d\mu \leq \text{ínf}\{\int_D g d\mu / g \in A; g \geq h\} = \text{ínf}\{g(x_0)/g \in A; g \geq h\} =$$
$$= \overline{h}(x_0) = \varphi(h) = m(h) = \int_D h d\mu.$$

Esto es: $\int_D h d\mu \leq \int_D \overline{h} d\mu \leq \int_D h d\mu$ entonces $\int_D h d\mu = \int_D \overline{h} d\mu$.

(b) $\{x \in D/h(x) = \overline{h}(x)\} \subset Ext(D)$. Sea x un punto de D no extremo, entonces existen $y, z \in D$ con $y \neq x \neq z$ y $y \neq z$ tal que $x = \frac{y+z}{2}$. Utilizando que h es estrictamente convexa y $\overline{h}$ es cóncava se tiene:

$$h(x) = h\left(\frac{y+z}{2}\right) < \frac{1}{2}h(y) + \frac{1}{2}h(z) \leq \frac{1}{2}\overline{h}(y) + \frac{1}{2}\overline{h}(z) \leq \overline{h}\left(\frac{y+z}{2}\right) = \overline{h}(x).$$

Esto es, $h(x) < \overline{h}(x)$.

Ahora, sea x un punto de D con $h(x) = \overline{h}(x)$, si x no es punto extremo tenemos que $h(x) < \overline{h}(x)$ (contradicción). Por tanto x es punto extremo. Así tenemos lo que queríamos, $\{x \in D/h(x) = \overline{h}(x)\} \subset Ext(D)$.

Por la propiedad (2) de la Proposición 3.6 tenemos que $\overline{h} \geq h$ en D, usando (a) se tiene que $\mu(\{x \in D/h(x) < \overline{h}(x)\}) = 0$ y usando (b) se tiene que

$$D \setminus Ext(D) \subset \{x \in D/h(x) < \overline{h}(x)\}.$$

Por tanto:

$$0 \leq \mu(D \setminus Ext(D)) \leq \mu(\{x \in D/h(x) < \overline{h}(x)\}) = 0 \Rightarrow \mu(D \setminus Ext(D)) = 0.$$

Por último vamos a ver que para todo $g \in E^*$ se tiene que $g(x_0) = \int_D g d\mu$:

Sea $g \in E^*$, considero $G = g|_D$. Como g es continuo y lineal, G es continuo y lineal en D y cumple:

$$G(\alpha x + \beta y) = G(\alpha x) + G(\beta y) = \alpha G(x) + \beta G(y) \;\; \forall x, y \in D \text{ y } \alpha, \beta \geq 0 \text{ con } \alpha + \beta = 1.$$

Por tanto G pertenece a A, entonces ya sabemos que $G(x_0) = \int_D G d\mu$ y como $G = g|_D$ y $x_0 \in D$

$$g(x_0) = G(x_0) = \int_D G d\mu = \int_D g d\mu \;\; \Rightarrow \;\; g(x_0) = \int_D g d\mu.$$

En resumen, $g(x_0) = \int_D g d\mu$ para toda g en E^* y $\mu(D \setminus Ext(D)) = 0$. Por tanto, μ es una medida de probabilidad en D soportada por $Ext(D)$ que representa a x_0.

$\square$

Capítulo 4

Funcionales y puntos soporte

4.1. Principio Variacional de Ekeland

La forma clásica de buscar el mínimo de una función real, en el caso de que tengamos diferenciabilidad, es buscarlo entre los puntos donde la derivada es 0. Así encontraríamos el punto mínimo es decir el punto que soporta el grafo de la función desde abajo con un semiespacio. En el caso general sin diferenciabilidad, podemos reemplazar el quizás no existente semiespacio por un cono que toca al grafo en un solo punto desde abajo. Si el cono es suficientemente ancho (donde esta definición de suficiencia es la que nos dirá el Principio Variacional de Ekeland (Teorema 4.1)) entonces el único punto de intersección del cono y el grafo se comporta casi como un verdadero mínimo de la función. Esto es lo que vamos a ver en el siguiente resultado, el Principio Variacional de Ekeland.

Observación. En el siguiente resultado vamos a usar la siguiente noción: Sea X un espacio de Banach, dado $\varepsilon > 0$, definimos $K_\varepsilon := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}/t \leq -\varepsilon\|x\|\}$, este conjunto es un cono cerrado apuntando para abajo con vértice en el (0,0).
Equipamos $X \times \mathbb{R}$ con la métrica $\rho((x,t),(y,s)) := \|x-y\| + |t-s|$.

Definición 4.1. Sean X un espacio de Banach y f una función de X en $(-\infty, +\infty]$. Se dice que la función f es **propia** si su dominio, esto es $\{x \in X : f(x) < +\infty\}$, es un conjunto no vacío.

Teorema 4.1 (Principio Variacional de Ekeland)**.** *Sean X un espacio de Banach y $\varphi : X \longrightarrow (0,\infty]$ una función propia, semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Entonces, dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ hay un punto $\tilde{x}$ de X tal que $\varphi(\tilde{x}) < \varphi(x) + \varepsilon\|x-\tilde{x}\|$ para todo punto x de X distinto de $\tilde{x}$.*

Además, si x_0 de X satisface que $\varphi(x_0) < b + \delta$, donde $b := \inf\{\varphi(x)/x \in X\}$, entonces $\tilde{x}$ puede ser elegido de manera que $\|x_0 - \tilde{x}\| < \dfrac{\delta}{\varepsilon}$.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, vamos a definir por inducción una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ en X que converge a un punto $\tilde{x}$ de X que cumple que $\varphi(\tilde{x}) < \varphi(x) + \varepsilon\|x-\tilde{x}\|$ para todo punto x de X distinto de $\tilde{x}$. Sea $b = \inf\{\varphi(x)/x \in X\}$.

Primero, elegimos $x_0 \in X$ tal que $\varphi(x_0) < b + \dfrac{\delta}{2}$.

Supongamos elegidos x_k para todo $k = 0, 1, 2, .., n$, vamos a elegir x_{n+1}. Llamamos:

$$b_n := \inf\{t \in \mathbb{R} / \exists x \in X \text{ tal que } (x,t) \in \text{grafo}(\varphi) \cap ((x_n, \varphi(x_n)) + K_\varepsilon)\}.$$

Elijo $x_{n+1} \in X$ tal que:

$$(x_{n+1}, \varphi(x_{n+1})) \in (x_n, \varphi(x_n)) + K_\varepsilon \quad \text{y} \quad \varphi(x_{n+1}) < b_n + \frac{\delta}{2^{n+2}}. \tag{4.1}$$

De la primera condición de 4.1 se tiene que:

$$0 \leq \varepsilon \|x_n - x_{n+1}\| \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1}). \tag{4.2}$$

Esto es, la sucesión $(\varphi(x_n))_{n=0}^{\infty}$ es no creciente.

Como $\{(x_n + \varphi(x_n)) + K_\varepsilon\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos encajados, la sucesión $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ es no decreciente. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que:

$$b_{n-1} \leq b_n \leq \varphi(x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) < b_{n-1} + \frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

De donde se deduce que:

$$\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1}) < \frac{\delta}{2^{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{4.3}$$

Juntando 4.2 y 4.3 se obtiene:

$$\varepsilon \|x_n - x_{n+1}\| \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1}) < \frac{\delta}{2^{n+1}} \;\Rightarrow\; \|x_n - x_{n+1}\| < \frac{\delta}{2^{n+1}\varepsilon} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{4.4}$$

Por tanto la sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy y como X es un espacio de Banach, esta sucesión es convergente, esto es, existe un punto de X, $\tilde{x}$ tal que $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge a $\tilde{x}$.

Debido a que φ es semicontinua inferiormente, el conjunto $\text{grafo}(\varphi) \cap ((x_n, \varphi(x_n)) + K_\varepsilon)$ es cerrado para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Vamos a estimar sus diámetros en el espacio métrico $(X \times \mathbb{R}, \rho)$ para mostrar que forman una sucesión nula.

Fijo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado $(x,t) \in (x_n, \varphi(x_n)) + K_\varepsilon$, se tiene que $\varepsilon\|x - x_n\| \leq \varphi(x_n) - t$ y $b_{n-1} \leq b_n \leq t \leq \varphi(x_n) < b_{n-1} + \dfrac{\delta}{2^{n+1}}$, de esto se deduce que:

$$0 \leq \varphi(x_n) - t \leq b_{n-1} + \frac{\delta}{2^{n+1}} - b_{n-1} = \frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

Uniendo esto con lo primero se obtiene que: $\|x - x_n\| \leq \dfrac{\delta}{2^{n+1}\varepsilon}$.

Entonces: $\forall (x,t) \in (x_n, \varphi(x_n)) + K_\varepsilon$, $\|x - x_n\| \leq \dfrac{\delta}{2^{n+1}\varepsilon} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

Por tanto: $diam(\text{grafo}(\varphi) \cap ((x_n, \varphi(x_n)) + K_\varepsilon)) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

Entonces grafo$(\varphi) \cap ((x_n, \varphi(x_n)) + K_\varepsilon)$ forman una sucesión de conjuntos cerrados y encajados y como sus diámetros tienden a 0, se tiene que grafo$(\varphi) \cap (\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} (x_n, \varphi(x_n)) + K_\varepsilon)$ se reduce a un punto, precisamente $(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}))$, ya que $x_n \longrightarrow \tilde{x}$ y φ es lineal y continuo.

Obviamente, entonces se tiene que grafo$(\varphi) \cap ((\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) + K_\varepsilon) = (\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}))$. Por tanto:

$$\varepsilon\|\tilde{x} - x\| > \varphi(\tilde{x}) - \varphi(x) \;\; \Rightarrow \;\; \varphi(\tilde{x}) < \varphi(x) + \varepsilon\|\tilde{x} - x\| \qquad \forall x \in X / x \neq \tilde{x}.$$

Además, de 4.4 se tiene que:

$$\|x_0 - x_n\| \leq \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \cdots + \|x_{n-1} - x_n\| < \frac{\delta}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por tanto, utilizando que $\|.\|$ es una norma

$$\|x_0 - \tilde{x}\| = \|x_0 - \lim_{n\to\infty} x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_0 - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{\delta}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Esto es, $\|x_0 - \tilde{x}\| < \dfrac{\delta}{\varepsilon}$.

□

Observación. A pesar de que a simple vista la estimación $\|x_0 - \tilde{x}\| < \frac{\delta}{\varepsilon}$ parezca pobre, por estar ε en el denominador, esta estimación se vuelve "buena" simplemente eligiendo $\delta = \varepsilon^2$ y $\varepsilon > 0$ convenientemente pequeño.

4.2. Teoremas de Bishop-Phelps

En esta sección vamos a ver el Teorema de Bishop-Phelps, que nos dice que en un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach el conjunto de sus puntos soporte es denso en su frontera y que el conjunto de los funcionales soporte de un conjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío es denso en el espacio dual. Para ver la demostración del primer teorema vamos a ver antes unos resultados previos relacionados con la noción de cono que defino ahora y para el segundo utilizaremos el Principio Variacional de Ekeland (Teorema 4.1).

Definición 4.2. Sea X un espacio normado y C un subconjunto convexo suyo. Un funcional no nulo $f \in X^*$ se dice que es un **funcional soporte de C** (en un punto $x \in C$) si $f(x) = \sup\limits_{c \in C} f(c)$. Este punto x se dice que es un **punto soporte de C**.

Definición 4.3. Sean X un espacio de Banach, $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $0 < \delta < 1$, definimos el cono $K(f, \delta)$ como:

$$K(f, \delta) := \{x \in X : f(x) \geq \delta\|x\|\}.$$

Lema 4.2. *Sean C un subconjunto convexo, no vacío de un espacio de Banach X y c un punto de la frontera de C. Entonces, c es un punto soporte de C si y solo si existe un cono de la forma $K(f,\delta)$ que satisface $C \cap [c + K(f,\delta)] = \{c\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea c un punto soporte de C entonces existe un funcional lineal y continuo g tal que $g(x) \leq g(c)$ para todo $x \in C$, entonces $C \cap [c + K(g,\delta)] = \{c\}$ para cualquier $\delta \in (0,1)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $C \cap [c + K(f,\delta)] = \{c\}$ para algún funcional lineal y continuo f y algún $\delta \in (0,1)$. Si consideramos $K = c + K(f,\delta)$, entonces se tiene que $C \cap \mathring{K} = \emptyset$ y por tanto c es un punto soporte de C.

□

Lema 4.3. *Sean f un funcional lineal de norma 1 en un espacio de Banach X y δ un número entre 0 y 1. Si D es un subconjunto cerrado y acotado de X, entonces para cada $d \in D$ existe $m \in D$ que satisface que $D \cap [m + K(f,\delta)] = \{m\}$ y $m - d \in K(f,\delta)$.*

Demostración. Definimos el siguiente orden parcial $\geq$ en D, sean x, y dos puntos de D decimos que $x \geq y$ si $x - y \in K(f,\delta)$. Sea $d \in D$, consideramos el conjunto no vacío $D_d = \{x \in D : x \geq d\}$. Se tiene que $m \in D$ es un elemento maximal de D_d con respecto a este orden parcial si y solo si $D \cap [m + K(f,\delta)] = \{m\}$ y $m - d \in K(f,\delta)$. Por lo que basta con ver que D_d tiene un elemento maximal con respecto este orden parcial, para ello primero voy a probar que toda cadena en D_d tiene una cota superior en D_d y aplicando el Lema de Zorn terminaría la prueba.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena en D_d, si existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $c \geq z$ para todo $z \in \mathcal{C}$, entonces ya esta. Por tanto, supongamos que para todo $c \in \mathcal{C}$ existe $z \in \mathcal{C}$ tal que $z > c$. Definimos $x_\alpha = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{C}$ así identificamos $\mathcal{C}$ con una red creciente $\{x_\alpha\}$. Como D_d es acotado (en norma) entonces $\{f(x_\alpha)\}$ es una red creciente y acotado de números reales y por tanto es una red de Cauchy. Como para cada $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ tenemos que $x_\alpha \geq x_\beta$ o $x_\beta \geq x_\alpha$, se tiene que $\delta\|x_\alpha - x_\beta\| \leq |f(x_\alpha) - f(x_\beta)|$ para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$. Esto implica que $\{x_\alpha\}$ es una red de Cauchy en X que es un espacio de Banach. Luego $\{x_\alpha\}$ converge a un punto $m \in X$. Es claro que este punto m pertenece a D y como el cono $K(f,\delta)$ es cerrado se tiene que $m \geq x_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{C}$. Por tanto $m \geq d$, entonces $m \in D_d$ y m es una cota superior de la cadena $\mathcal{C}$. Por tanto, toda cadena en D_d tiene una cota superior en D_d y aplicando el Lema de Zorn se tiene que D_d tiene un elemento maximal con respecto al orden parcial $\geq$. Entonces existe $m \in D$ tal que $D \cap [m + K(f,\delta)] = \{m\}$ y $m - d \in K(f,\delta)$.

□

Teorema 4.4 (Teorema de Bishop-Phelps (puntos soporte))**.** *Sea C un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach X. Entonces el conjunto de los puntos soporte de C es denso en la frontera de C.*

Demostración. Sean x_0 un punto de la frontera de C y $\varepsilon > 0$. Elijo un punto y_0 que no esté en C tal que $\|x_0 - y_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por el teorema de separación (Teorema 1.17) existe un funcional lineal f tal que $f(y_0) > f(c)$ para todo $c \in C$. Sin pérdida de generalidad puedo suponer que el funcional f tiene norma 1 (normalizándolo). Ahora considero el conjunto $K = K(f, \frac{1}{2})$ y $D = C \cap (x_0 + K)$ es no vacío, cerrado y convexo. Si $x \in D$ entonces $x - x_0 \in K$, por tanto:

$$\frac{1}{2}\|x - x_0\| \leq f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) < f(y_0) - f(x_0) \leq \|y_0 - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $\|x - x_0\| < \varepsilon$, por tanto $D \subset B(x_0, \varepsilon)$. En particular D está acotado. Por el Lema 4.3 existe $m \in D$ tal que $D \cap (m + K) = \{m\}$ y $m - x_0 \in K$. Como $m \in D = C \cap (x_0 + K)$, entonces $m \in C \cap (m + K)$. Sea $x \in C \cap (m + K)$, entonces existe $k \in K$ tal que

$$x = m + k = x_0 + (m - x_0) + k \in x_0 + K \quad \Rightarrow \quad x \in C \cap (x_0 + K) = D.$$

Por tanto $x \in D \cap (m+K) = \{m\}$, esto es $x = m$ y esto se da para todo $x \in C \cap (m+K)$. Por tanto $C \cap (m + K) = \{m\}$ y por el Lema 4.2 se tiene que m es un punto soporte de C que satisface que $\|x_0 - m\| < \varepsilon$. Esto es, para todo punto x_0 de la frontera de C existe un punto soporte de C arbitrariamente próximo a x_0. Luego el conjunto de los puntos soporte de C es denso en la frontera de C.

□

Teorema 4.5 (Teorema de Bishop-Phelps (funcionales soporte))**.** *Sea C un subconjunto cerrado, convexo, no vacío y acotado de un espacio de Banach X. Entonces el conjunto de todos los funcionales lineales y continuos en X que alcanzan su supremo en C es denso en X^*.*

En particular, el conjunto de todos los funcionales lineales y continuos en X que alcanzan su norma es denso en X^*.

Demostración. Sean $f \in X^*$ y $\varepsilon > 0$. Defino la función $\tilde{f} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como $\tilde{f}(c) := f(c)$ para todo c en C y $\tilde{f}(x) := +\infty$ para todo x en $X \setminus C$. Entonces tenemos que $\tilde{f}$ cumple las hipótesis del Principio Variacional de Ekeland (Teorema 4.1). Entonces aplicando este resultado obtengo que existe $x_0 \in C$ tal que

$$\tilde{f}(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\| \leq \tilde{f}(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon\|x - x_0\| \;\; \forall x \in C$$

donde hemos utilizado la definición de $\tilde{f}$ en C ($\tilde{f}(c) = -f(c)$). Considero los siguientes dos conjuntos en $X \oplus \mathbb{R}$.

$$K_1 := \{(x,t) \in X \oplus \mathbb{R} / x \in C, t \leq f(x)\}; K_2 := \{(x,t) \in X \oplus \mathbb{R} / t \geq f(x_0) + \varepsilon\|x - x_0\|\}.$$

Estos conjuntos son convexos. El interior de K_2 es no vacío y disjunto de K_1. Entonces existe un funcional no nulo en $X^* \oplus \mathbb{R}$ que separa K_1 y K_2. Esto es, existen $x^* \in X^*$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$x^*(x) + \alpha t \leq \beta \text{ si } (x,t) \in K_1$$
$$x^*(x) + \alpha t \geq \beta \text{ si } (x,t) \in K_2.$$

Se tiene que α no puede ser negativo, ya que de ser así se tendría que $x^*(x) + \alpha t < \beta$ si $(x,t) \in K_2$ y t suficientemente grande. Por otro lado, si $\alpha = 0$, entonces $x^*(x) > \beta$ para todo $x \in X$. Por tanto $x^* = 0$ y esto no puede pasar. Por tanto α es mayor que 0 y se puede normalizar de manera que $\alpha = 1$. Como $(x_0, f(x_0)) \in K_1 \cap K_2$ se tiene que $x^*(x_0) + f(x_0) = \beta$. Entonces como $(x, f(x)) \in K_1$ para todo $x \in C$, se tiene

$$x^*(x) + f(x) \leq \beta = x^*(x_0) + f(x_0) \quad \forall x \in C.$$

Por tanto, $x^* + f$ alcanza su máximo en C en x_0. Por otro lado, si x es un punto de X y $t := f(x_0) + \varepsilon\|x - x_0\|$ se tiene que $(x,t) \in K_2$ y por tanto

$$x^*(x_0) + f(x_0) = \beta \leq x^*(x) + f(x_0) + \varepsilon\|x - x_0\| \quad \forall x \in X.$$

Entonces

$$x^*(x_0 - x) \leq \varepsilon\|x - x_0\| \ \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad |x^*(z)| \leq \varepsilon\|z\| \ \forall z \in X.$$

esto es, $\|x^*\| \leq \varepsilon$. Entonces $x^* + f$ alcanza su máximo en C y $\|x^*\| \leq \varepsilon$, es decir $g := x^* + f$ cumple que alcanza su máximo en C, es lineal, continuo y $\|g - f\| = \|x^*\| \leq \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por tanto, el conjunto de los funcionales lineales y continuos en X que alcanzan su máximo en C es un conjunto denso en X^*.

□

Observación. La completitud de X es esencial en el Teorema de Bishop-Phelps, ya que Katznelson probó que en el espacio de los polinomios en [0,1], el conjunto de los funcionales que alcanzan su norma no es denso en el espacio dual (ver [10]).

Capítulo 5

Algunos resultados relevantes

Utilizando la teoría desarrollada en los capítulos previos en este capítulo veremos resultados relevantes en espacios de Banach, en la primera sección veremos los resultados de Banach-Steinhaus, el principio de Acotación Uniforme (Teorema 5.1) y el Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 5.3). En la segunda sección veremos alguna caracterización de cuando un espacio de Banach es reflexivo así como la relación entre que un espacio de Banach sea reflexivo y como es el conjunto de puntos extremos de sus subconjuntos, siguiendo el artículo de Lindenstrauss y Phelps [9].

5.1. Teoremas de Banach-Steinhaus

Primero veremos el concepto de cuando una familia de operadores está acotada puntualmente y el Principio de Acotación Uniforme de Banach-Steinhaus (Teorema 5.1) que nos dice que toda familia de operadores que está acotado puntualmente está acotada. Por último veremos el Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 5.3) que nos relaciona acotación débil y débil estrella con acotación en norma.

Definición 5.1. Sean X e Y dos espacios normados y $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X, Y)$. Decimos que $\mathcal{A}$ está **acotada puntualmente** si para todo punto x de X se cumple que $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|T(x)\|_Y$ es finito.

Observación. Es claro que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ es acotado con la norma de operador (esto es, existe $C > 0$ tal que $\|T\| \leq C$ para todo $T \in \mathcal{A}$) entonces $\mathcal{A}$ es acotado puntualmente. A la implicación inversa se la conoce como el Principio de Acotación Uniforme de Banach-Steinhaus.

Teorema 5.1 (Principio de Acotación Uniforme de Banach-Steinhaus)**.** *Sean X e Y dos espacios de Banach y $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X, Y)$. Si $\mathcal{A}$ es acotada puntualmente, entonces $\mathcal{A}$ es acotada en $\mathcal{B}(X, Y)$.*

Antes de ver la prueba enuncio el Teorema de categoría de Baire.

Teorema 5.2 (Teorema de Baire)**.** *Sean X un espacio topológico completamente metrizable y $(U_n)_n$ una sucesión de conjuntos abiertos densos, entonces su intersección es densa.*

Veamos ahora la demostración del Principio de Acotación Uniforme de Banach-Steinhaus usando este teorema.

Demostración. Para cada número natural n considero el conjunto

$$N_n := \{x \in X / \sup_{T\in\mathcal{A}} \|T(x)\|_Y \leq n\}.$$

Se tiene que estos conjuntos N_n son cerrados, convexos y equilibrados en X.

1. Equilibrado: Sea $x \in N_n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq 1$, entonces:

$$n \geq \sup_{T\in\mathcal{A}} \|T(x)\|_Y \geq |\alpha| \sup_{T\in\mathcal{A}} \|T(x)\|_Y = \sup_{T\in\mathcal{A}} \|\alpha T(x)\|_Y = \sup_{T\in\mathcal{A}} \|T(\alpha x)\|_Y.$$

   Entonces αx pertenece también a N_n.

2. Cerrado: Sea $(x_k)_k \subset N_n$ una sucesión que converge a un punto x de X. Veamos que x está en N_n. Sea $T \in \mathcal{A}$, por la continuidad de T y el hecho de que $\|T(x_k)\|_Y \leq n$ para todo k número natural, se tiene que $\|T(x)\|_Y \leq n$ y por tanto x pertenece a N_n.

3. Convexo: Sean $x_1, x_2 \in N_n$ y $\lambda \in [0, 1]$. Sea $T \in \mathcal{A}$:

$$\|T(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\|_Y \leq \lambda\|T(x_1)\|_Y + (1-\lambda)\|T(x_2)\|_Y \leq \lambda n + (1-\lambda)n = n.$$

   Entonces $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in N_n$, por tanto N_n es convexo.

Vamos a ver ahora que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$. Sea x un punto de X, por hipótesis tenemos que $\sup_{t\in\mathcal{A}} \|T(x)\|_Y < \infty$, por tanto existe un número natural n tal que $x \in N_n$. Aplicando el Teorema de categoría de Baire (Teorema 5.2) existe un número natural n_0 tal que N_{n_0} tiene interior no vacío, esto es existen x_0 en N_{n_0} y $\delta > 0$ tal que $x_0 + \delta B_X \subset N_{n_0}$. Como N_{n_0} es equilibrada también se tiene que $-x_0 + \delta B_X \subset N_{n_0}$ y como N_{n_0} es convexo, para todo punto y de δB_X se tiene que:

$$y = \frac{1}{2}(x_0 + y) + \frac{1}{2}(-x_0 + y) \in N_{n_0}.$$

Por tanto, $\delta B_X \subset N_{n_0}$.

Sea $x \in B_X$, considero $y = \frac{x}{\|x\|}\delta \in \delta B_X \subset N_{n_0}$, entonces $\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T(y)\|_Y \leq n_0$ aplicando esto tenemos:

$$\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T(x)\|_Y = \sup_{T\in\mathcal{A}} \left\| \frac{\|x\|}{\delta} T(y) \right\|_Y = \frac{\|x\|}{\delta} \sup_{T\in\mathcal{A}} \|T(y)\|_Y \leq \frac{n_0}{\delta}.$$

Como esto se da para todo punto x de la bola B_X, se tiene que $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|T\| \leq \frac{n_0}{\delta}$, por tanto $\mathcal{A}$ es acotada.

$\square$

Teorema 5.3 (Teorema de Banach-Steinhaus)**.** *Sea X un espacio de Banach. Se tiene que:*

(a) Si $M \subset X^*$ es w^*-acotado, entonces M es acotado.

(b) Si $M \subset X$ es w-acotado, entonces M es acotado.

Demostración. Primero probamos (a). Observamos que el espacio (X^*, w^*) no es más que el espacio $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ con la topología de la convergencia puntual. Por tanto si $M \subset X^*$ es w^*-acotado, entonces es un conjunto acotado puntualmente en $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ y aplicando el Teorema 5.1 se tiene que M es acotado.

Ahora veamos (b). Consideramos la siguiente aplicación $\pi : X \longrightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ definida por $\pi(x)(x^*) = x^*(x)$. Veamos que esta aplicación es una isometría. Sea $x \in X$, veamos que $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$. Sea $x^* \in B_{X^*}$, entonces $|\pi(x)(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\|\|x\| \leq \|x\|$, por tanto $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$.
Por otro lado, sabemos que existe un elemento $x_0^* \in B_{X^*}$ tal que $x_0^*(x) = \|x\|$, por tanto $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$. Entonces $\|\pi(x)\| = \|x\|$. Además la topología de la convergencia puntual en $\mathcal{B}(X, Y)$ induce en $\pi(X)$ una topología que denoto por τ_p. Con esta topología la aplicación $\pi : (X, w) \longrightarrow (\pi(X), \tau_p)$ es un isomorfismo. Por tanto si M es w-acotado, entonces $\pi(M)$ sera puntualmente acotado y aplicando el apartado (a), $\pi(M)$ es acotado y como π es una isometría M también será acotado.

$\square$

Nosotros sabemos que en un espacio normado de dimensión finita la topología débil coincide con la topología en norma. Sin embargo, esto no se da en los espacios de dimensión infinita, de hecho en estos espacios siempre se tiene que estas dos topologías son siempre distintas.

Proposición 5.4. *Sea X un espacio normado de dimensión infinita y $A \subset X$ distinto del vacío. Si A es débil abierto, entonces A no está acotado. En particular la topología en norma y la topología débil no coinciden en X.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que el 0 pertenece a A. Como A es w-abierto existe $\varepsilon > 0$ y f_1,...,$f_n \in X^*$ tal que $\{x \in X / |f_i(x)| < \varepsilon\} \subset A$, es claro que el conjunto:

$$N := \{x \in X / f_i(x) = 0 \ \ \forall i = 1, .., n\} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(0)$$

está contenido en A. Se tiene además que N es distinto de $\{0\}$, ya que si fuera $\{0\}$ se tendría que para toda $f \in X^*$, $N \subset f^{-1}(0)$. Por tanto f sería una combinación de

$f_1,...,f_n$ entonces $X^* = span\{f_i\}_{i=1}^n$ (contradicción, ya que X^* es infinito dimensional). Por tanto, existe $0 \neq x \in N$. Entonces para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que λx pertenece a N. Entonces N no es acotado y por tanto, como $N \subset A$, A tampoco es acotado.

□

5.2. Reflexividad y punto extremos

En esta sección vamos a ver primero varias caracterizaciones de cuando un espacio de Banach es reflexivo. Después veremos el concepto de cuerpo convexo en un espacio de Banach y varios resultados que nos dicen como es el conjunto de puntos extremos de un cuerpo convexo en un espacio de Banach reflexivo e infinito dimensional, siguiendo el artículo de Lindenstrauss y Phelps [9].

Teorema 5.5. *Sea X un espacio de Banach. X es reflexivo si y solo si B_X es débilmente compacta.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si X es reflexivo entonces $X = X^{**}$ y en particular $B_X = B_{X^{**}}$. Por el Teorema de Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.9) $B_{X^{**}}$ es w^*-compacto en X^{**}, y se tiene que la topología w^* en X^{**} es $w(X^{**}, X^*) = w(X, X^*)$ que es la topología débil en X. Por tanto B_X es w-compacto en X.

($\Leftarrow$) Si B_X es w-compacta, entonces B_X es w^*-cerrado en X^{**} y por el Teorema de Goldstine (Teorema 1.11) se tiene que la w^*-clausura de B_X en X^{**} es $B_{X^{**}}$, por tanto $B_X = \overline{B_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$. Entonces $X = X^{**}$, esto es, X es reflexivo.

□

Proposición 5.6. *Sea X un espacio de Banach. X es reflexivo si y solo si X^* es reflexivo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si X es reflexivo entonces la topología w y la w^* coinciden en X^*. ($w = w(X^*, X^{**}) = w(X^*, X) = w^*$). Por el Teorema de Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.9) se tiene que B_{X^*} es w^*-compacto en X^* y como acabamos de ver en X^*, la topología w y w^* coinciden. Entonces se tiene que B_{X^*} es débilmente compacto y por el Teorema anterior (Teorema 5.5) X^* es reflexivo.

($\Leftarrow$) Si X^* es reflexivo, por lo que acabo de demostrar se tiene que X^{**} es reflexivo y por el Teorema anterior (Teorema 5.5) $B_{X^{**}}$ es débilmente compacto. Por otro lado, B_X es cerrado, por lo tanto w-cerrado y es un subconjunto de $B_{X^{**}}$ que es w-compacto en X^{**}. Por tanto B_X es w-compacto en X^{**} y como la topología débil en X^{**} induce la topología débil en X, se tiene que B_X es w-compacto en X y por el Teorema anterior (Teorema 5.5) se tiene que X es reflexivo.

□

Proposición 5.7. *Sea X un espacio de Banach. X es reflexivo si y solo si la topología w y la w^* coinciden en X^*.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si X es reflexivo entonces $X = X^{**}$. Por tanto se tiene que $w(X^*, X^{**}) = w(X^*, X)$. Es decir, efectivamente en X^* la topología débil y débil* coinciden.

($\Leftarrow$) Por el Teorema de Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.9) se tiene que (B_{X^*}, w^*) es compacto, entonces $(B_{X^*}, w) = (B_{X^*}, w^*)$ es compacto. Esto es B_{X^*} es débilmente compacto, entonces por el Teorema 5.5 se tiene que X^* es reflexivo y por la proposición anterior (Proposición 5.6) X es reflexivo.

□

Observación. Si X no es reflexivo, existe un conjunto convexo de X^* que es w-cerrado y no es w^*-cerrado.

Proposición 5.8. *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Si Y es un subespacio cerrado de X, entonces Y es un espacio de Banach reflexivo.*

Demostración. El hecho de que Y es un espacio de Banach es claro. Veamos que es reflexivo. La topología débil en Y coincide con la restricción de la topología débil en X. Entonces B_Y es un conjunto w-cerrado y es un subconjunto de B_X que es w-compacto (por el Teorema 5.5 ya que X es reflexivo). Por tanto B_Y es w-compacto y por el Teorema 5.5 se tiene que Y es reflexivo.

□

Proposición 5.9. *Sea X un espacio de Banach. Si X es separable y reflexivo, entonces (B_X, w) es un espacio metrizable.*

Antes de ver la demostración de este resultado voy a enunciar un resultado que relaciona separabilidad con metrizabilidad de un conjunto débilmente compacto en un espacio de Banach.

Proposición 5.10. *Sea C un conjunto débil compacto en un espacio de Banach X. Si X^* es w^*-separable, entonces (C, w) es metrizable. En particular, si X es separable, entonces (C, w) es metrizable.*

Utilizando este resultado voy a demostrar la Proposición 5.9.

Demostración. Como X es reflexivo por el Teorema 5.5 se tiene que B_X es w-compacto. Como X es separable y B_X es w-compacto por la Proposición 5.10 se tiene que (B_X, w) es metrizable.

□

Teorema 5.11. *Sea X un espacio de Banach, reflexivo e infinito dimensional. Entonces $Ext(B_X)$ es no numerable.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $Ext(B_X)$ es numerable, entonces $Ext(B_X) = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Para cada número natural n defino:

$$F_n := \{f \in X^*/\|f\| \leq 1 \text{ y } |f(x_n)| = \|f\|\}.$$

Es claro que F_n es débilmente cerrado. Veamos que $B_{X^*} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Por definición de los F_n es claro que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset B_{X^*}$.

Para ver la otra inclusión, tenemos que como X es reflexivo, B_{X^*} es débilmente compacta (aplicando Proposición 5.6 y Teorema 5.5). Ahora aplicando el Teorema de Krein-Milman (Teorema 2.5) (en (X, w)) a B_X se tiene que,

$$B_X = \overline{conv(Ext(B_X))}^w = \overline{conv(Ext(B_X))}$$

donde hemos utilizado el Teorema de Mazur (en un conjunto convexo la w-adherencia y la adherencia en norma coinciden). Por tanto, sea $g \in B_{X^*}$. Dado $x \in B_X$, se tiene que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. Entonces:

$$|g(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g(x_n)| \leq \sup\{|g(x_n)|/n \in \mathbb{N}\}|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n| = \sup\{|g(x_n)|/n \in \mathbb{N}\}.$$

Por tanto, $\sup\{|g(x_n)|/n \in \mathbb{N}\} = \sup\{|g(x)|/x \in B_X\}$ y como el supremo se alcanza, se tiene que existe un número natural n tal que $g \in F_n$.

Entonces $B_{X^*} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, con B_{X^*} débilmente compacto. Entonces por el Teorema de Baire (Teorema 5.2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tiene interior débil relativo a B_{X^*} no vacío. Sea f_0 un punto interior débil relativo. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\|f_0\| < 1$. Entonces existen y_1,...,y_n puntos de X tales que f está en F_{n_0} siempre que:

$$\|f\| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad |(f - f_0)(y_i)| < 1 \ \forall i = 1, 2, ..., n \tag{5.1}$$

Defino:

$$N := \{f \in X^*/f(y_i) = f_0(y_i) \ \forall i = 1, 2, ..., n \ ; \ f(x_{n_0}) = f_0(x_{n_0})\}$$

que tiene codimensión finita (y X tiene dimensión infinita) y contiene una línea a través de f_0. Entonces $N \cap S_{X^*} \neq \emptyset$, por tanto existe g en N con $\|g\| = 1$. Entonces por la Ecuación 5.1, g pertenece a F_{n_0}, por tanto:

$$1 = \|g\| = |g(x_{n_0})| = |f_0(x_{n_0})| = \|f_0\|.$$

(Contradicción ya que hemos supuesto que $\|f_0\| < 1$). Por tanto, $Ext(B_X)$ no es numerable.

□

Definición 5.2. Sean X un espacio de Banach y C un subconjunto suyo, se dice que C es un **cuerpo convexo** si es acotado, convexo, cerrado y con interior no vacío.

Corolario 5.12. *Sea X un espacio de Banach reflexivo e infinito dimensional. Si C es un cuerpo convexo en X, entonces $Ext(C)$ es no numerable.*

Demostración. Considero el espacio $E := X \times \mathbb{R}$ y en él considero la siguiente norma $\|(x,r)\| = \text{máx}(\|x\|_X, |r|)$. E equipado con esta norma es un espacio de Banach reflexivo. Consideramos el conjunto $C_1 := \{(x,1)/x \in C\}$. Podemos encontrar una norma equivalente en E de manera que la bola unidad en este espacio sea $\overline{conv(C_1 \cup (-C_1))}$. Con esta norma E sigue siendo Banach reflexivo. Utilizando el Teorema 5.11 se tiene que el conjunto de los puntos extremos de la bola unidad de este espacio, denotada por B_E, es no numerable y se tiene que:

$$Ext(B_E) = Ext(\overline{conv(C_1 \cup (-C_1))}) = Ext(C_1) \cup Ext(-C_1) = Ext(C_1) \cup (-Ext(C_1)).$$

Por tanto, $Ext(C_1)$ es no numerable y por la definición de C_1 se tiene que los puntos extremos de C_1 coinciden con los puntos extremos de C, por tanto $Ext(C)$ no es numerable.

□

Observación. Si K es un conjunto débilmente compacto y numerable en un espacio de Banach infinito dimensional, entonces el interior de $C = \overline{conv(K)}$ es vacío.

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que el interior de C es no vacío. Por un Teorema de Krein (Teorema 6.15) se tiene que C es débilmente compacto en X y tiene interior no vacío. Por tanto, se tiene que B_X es también débilmente compacta, entonces por el Teorema 5.5 se tiene que X es reflexivo.

Por otro lado, si C tiene interior no vacío, entonces C es un cuerpo convexo en X y aplicando el Corolario 5.12 (que se puede aplicar ya que acabo de ver que X es reflexivo) se tiene que $Ext(C)$ es no numerable. Como $C = \overline{conv(K)}$, aplicando el Teorema de Milman (Teorema 2.6), se tiene que $Ext(C) \subset \overline{K} = K$, entonces K es no numerable (contradicción ya que K es numerable por hipótesis). Por tanto, el interior de C es no vacío.

□

Otra consecuencia del primer teorema es el siguiente resultado:

Corolario 5.13. *Sea X un espacio de Banach reflexivo, separable e infinito dimensional. Si C es un cuerpo convexo de X, entonces el conjunto de puntos extremos de C no es un conjunto de puntos aislados.*

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que $Ext(C)$ es aislado. Por el Corolario 5.12 tenemos que $Ext(C)$ es no numerable. Pero, como $Ext(C)$ es un conjunto aislado en X que es un espacio de Banach separable, entonces $Ext(C)$ es numerable (contradicción). Por tanto, $Ext(C)$ no es un conjunto de puntos aislados.

□

Observación. En esta prueba hemos utilizado un resultado básico que nos dice que en un espacio de Banach separable todo conjunto de puntos aislados es numerable.

Demostración. Sea C un conjunto de puntos aislados de X un espacio de Banach separable y supongamos que C es no numerable. Sea D un conjunto denso y numerable de X. Considero el conjunto $E := C \cap D$, este conjunto es denso y numerable en C. Como C es no numerable, $C \setminus E$ tampoco es numerable. Luego puedo encontrar al menos un punto x de C tal que para cada número natural n existe un punto x_n de E distinto de x de manera que $\|x - x_n\| < \frac{1}{n}$. Así se obtiene una sucesión de puntos de C distintos de x tales que convergen en norma a x. Por tanto, C no es un conjunto de puntos aislados (contradicción). Entonces C es numerable.

□

Capítulo 6

Fronteras de James

En este capítulo introducimos el concepto de frontera de James de un conjunto y estudiamos varios resultados relacionados con este concepto como pueden ser el Teorema de James, Godefroy y Rainwater.

Definición 6.1. Sean X un espacio de Banach y C un subconjunto acotado de X^*. Un conjunto $B \subset C$ se dice que es una **frontera de James de C** si para todo punto x de X existe un elemento g de B tal que $g(x) = \sup_{f \in C} f(x)$. Un conjunto $B \subset B_{X^*}$ se dice que es **frontera de James de X** si es frontera de James de B_{X^*}.

Observación. Un conjunto $B \subset B_{X^*}$ es frontera de James de X si para todo punto x de S_X existe un elemento f de B tal que $f(x) = 1$.

Proposición 6.1. *Sean X un espacio de Banach y C un conjunto acotado y w^*-cerrado de X. Entonces el conjunto de los puntos extremos de C es una frontera de James de C. En particular, los puntos extremos de B_{X^*} es una frontera de James de X.*

Demostración. Sea $x \in X$, considero el conjunto $H := \{f \in X^* / f(x) = \sup_{g \in C} g(x)\}$ que es w^*-cerrado y por el Lema 2.1 es una variedad soporte de C. Por la Proposición 2.4 se tiene que H contiene un punto extremo de C, esto es existe un punto extremo de C, f, que esta en H. Por tanto $f(x) = \sup_{g \in C} g(x)$. Entonces $Ext(C)$ es una frontera de James de C.

□

Proposición 6.2. *Sean X un espacio de Banach, C un conjunto acotado, w^*-compacto de X^* y $B \subset C$ una frontera de James de C. Entonces $\overline{conv(B)}^{w^*} = C$.*

Demostración. ($\subset$) Como C es convexo y $B \subset C$, entonces $conv(B) \subset C$ y como C es w^*-compacto, se tiene que $\overline{conv(B)}^{w^*} \subset \overline{C}^{w^*} = C$.

($\supset$) Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que no se da, entonces existe $g \in C \backslash \overline{conv(B)}^{w^*}$. Por el Teorema de separación de Hahn-Banach (Teorema 1.17) existe un punto x de X tal que $\sup\limits_{f\in B} f(x) < g(x)$. Por tanto, para todo elemento f de B se tiene que $f(x) < \sup\limits_{g\in C} g(x)$, entonces B no es frontera de James de C (contradicción). Por tanto, $C \subset \overline{conv(B)}^{w^*}$.

$\square$

Ahora vamos a ver un resultado de Godefroy que nos da una caracterización de las fronteras de James y como corolario obtendré una condición suficiente para saber cuando X^* es separable. Para demostrar este resultado necesito antes ver dos resultados de Simons.

Lema 6.3 (Desigualdad de Simons)**.** *Sean B un conjunto no vacío y $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $l_\infty(B)$. Supongamos que para toda sucesión $(\lambda_n)_n$ de elementos no negativos que satisfacen que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$, el vector $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ alcanza su supremo en B. Entonces, si $u(b) := \limsup\limits_{n\to\infty} x_n(b)$ para todo $b \in B$, se tiene que:*

$$\sup_{b\in B} u(b) \geq \inf\{\sup_B x / x \in conv(\{x_n\})\}.$$

Demostración. Defino $C_k := \{\sum\limits_{n=k}^{\infty} \lambda_n x_n / \lambda_n \geq 0 \quad \sum\limits_{n=k}^{\infty} \lambda_n = 1\}$ para todo k natural. Por lo que, basta con ver que

$$\inf_{x\in C_1} \sup_B x \leq \sup_B u. \tag{6.1}$$

Sea $\varepsilon > 0$, elijo inductivamente $z_k \in C_k$ para todo k natural.

En el primer paso, defino $v_0 = 0$ y tomo $z_1 \in C_1$ de manera que

$$\sup_B z_1 \leq \inf_{z\in C_1} \{\sup_B z\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En el paso general, supuesto que tengo elegido z_1,...,z_k, voy a elegir z_{k+1}, primero defino $v_k := \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{z_n}{2^n}$ y elijo $z_{k+1} \in C_{k+1}$ de manera que:

$$\sup_B 2^k v_k + z_{k+1} \leq \inf_{z\in C_{k+1}} \{\sup_B z\} + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \tag{6.2}$$

Una vez elegida toda la sucesión $(z_k)_k$ defino $v := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{2^n}$ que pertenece a C_1. Tenemos:

$$\begin{gathered} 2^{k+1} v_{k+1} - 2^{k+1} v_k = 2^{k+1}(v_{k+1} - v_k) = 2^{k+1} \frac{z_{k+1}}{2^{k+1}} = z_{k+1} \quad \Rightarrow \\ 2^{k+1} v_{k+1} - 2^k v_k = z_{k+1} + 2^k v_k. \end{gathered} \tag{6.3}$$

Por otro lado:

$$2^k v - 2^k v_k = 2^k \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z_n}{2^n} \right) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z_n}{2^{n-k}} \in C_{k+1} \tag{6.4}$$

donde hemos usado que $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-k}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Utilizando las Ecuaciones 6.2, 6.3 y 6.4 se tiene:

$$\sup_B (2^{k+1} v_{k+1} - 2^k v_k) \leq \sup_B (2^k v_k + (2^k v - 2^k v_k)) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \sup_B 2^k v + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = 2^k \sup_B v + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Como $v \in C_1$, por hipótesis se tiene que existe $t \in B$ tal que $v(t) = \sup\limits_B v$.

$$\begin{aligned} 2^m v_m(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (2^{k+1} v_{k+1} - 2^k v_k)(t) \leq \sum_{k=0}^{m-1} 2^k \sup_B v + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = (2^m - 1) v(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leq \\ \leq (2^m - 1) v(t) + \varepsilon = 2^m v(t) + \varepsilon - \sup_B v. \end{aligned}$$

Entonces $\sup\limits_B v \leq -2^m v_m(t) + 2^m v(t) + \varepsilon$ y por tanto:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in C_1} \{\sup_B x\} \leq \sup_B v \leq \limsup_{m \to \infty} (2^m v - 2^m v_m)(t) + \varepsilon = \\ = \limsup_{m \to \infty} \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n x_n \right)(t) + \varepsilon \leq \limsup_{m \to \infty} x_{m+1}(t) + \varepsilon = \\ = \limsup_{m \to \infty} x_m(t) + \varepsilon = u(t) + \varepsilon \leq \sup_B u + \varepsilon. \end{aligned}$$

Haciendo ε tender a 0 se tiene la Ecuación 6.1 y por tanto tenemos demostrado el Teorema.

□

Observación. Sean X un espacio de Banach y $B \subset X^*$ acotado, entonces podemos considerar X como un subconjunto de $l_\infty(B)$ identificando $x \in X$ con $(f(x))_{f \in B}$. Si B es una frontera de James de X, entonces $\sup\limits_B x = \|x\|$ y el supremo se alcanza.

Teorema 6.4 (Teorema de Simons)**.** *Sean X un espacio de Banach y B una frontera de James de un subconjunto acotado $M \subset X^*$. Si $(x_n)_n$ es una sucesión acotada de X y defino $u(x^*) := \limsup\limits_{n \to \infty} x^*(x_n)$ para todo $x^* \in X^*$, entonces $\sup\limits_{x^* \in B} u(x^*) = \sup\limits_{x^* \in M} u(x^*)$.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que no se da, entonces existe α tal que $\sup\limits_{x^* \in B} u(x^*) < \alpha < \sup\limits_{x^* \in M} u(x^*)$. Sea $f \in M$ tal que $u(f) > \alpha$, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $f(x_n) > \alpha$ para todo n natural. Sea $x \in conv(x_n)$, entonces

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha = \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) > \alpha.$$

Además, sea $(\lambda_n)_n$ una sucesión de números no negativos y tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$, considero $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$, entonces como B es una frontera de James de M existe $g \in B$ tal que $g(x) = \sup_{h \in M} h(x) \geq \sup_{h \in B} h(x)$. Por tanto, $\sup_{h \in M} h(x) = \sup_{h \in B} h(x)$ y x alcanza su supremo en B y podemos aplicar la desigualdad de Simons (Lema 6.3) y se tiene que:

$$\alpha > \sup_{x^* \in B} u(x^*) \geq \inf_{x \in conv(x_n)} \{\sup_{h \in B} h(x)\} = \inf_{x \in conv(x_n)} \{\sup_{h \in M} h(x)\} \geq \inf_{x \in conv(x_n)} f(x) \geq \alpha.$$

Por tanto $\alpha > \alpha$ (contradicción). Entonces $\sup_{x^* \in B} u(x^*) = \sup_{x^* \in M} u(x^*)$.

□

Ahora si, vamos a enunciar y demostrar el citado Teorema de Godefroy.

Teorema 6.5 (Teorema de Godefroy)**.** *Sean X un espacio de Banach y C un subconjunto acotado y convexo de X^*. Si B es un conjunto separable en norma y frontera de James de C, entonces $C = \overline{conv(B)}^{\|\cdot\|}$.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\overline{conv(B)}^{\|\cdot\|}$ es distinto de C, entonces por el Teorema de separación de Hahn-Banach (Teorema 1.17) podemos encontrar $F \in S_{X^{**}}$, $\alpha < \beta$ y un elemento y_0^* de C que no esta en $\overline{conv(B)}^{\|\cdot\|}$ tales que $F(f) \leq \alpha$ para todo $f \in B$ y $F(y_0^*) > \beta$. Sea $S := \{x \in B_X / y_0^*(x) > \beta\}$. Usando el Teorema de Goldstine (Teorema 1.11) tenemos que $F \in \overline{S}^{w^*}$. Como B es separable, la topología en X^{**} de la convergencia puntual en los puntos de B es metrizable. Entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en S tal que converge a F en los puntos de $B \cup \{y_0^*\}$. Poniendo $u(x^*) = \limsup_{n \to \infty} x^*(x_n)$ y aplicando el Teorema de Simons (Teorema 6.4) se tiene que:

$$\alpha \geq \sup_B F = \sup_B u = \sup_C u \geq u(y_0^*) \geq \beta.$$

(Contradicción, ya que $\alpha < \beta$). Entonces $C = \overline{conv(B)}^{\|\cdot\|}$.

□

Corolario 6.6 (Godefroy)**.** *Sea X un espacio de Banach, si X tiene una frontera de James separable entonces X^* es separable.*

Demostración. Sea B una frontera de James separable de X, entonces por el Teorema de Godefroy (Teorema 6.5) se tiene que $\overline{conv(B)} = B_{X^*}$. Como B es separable, entonces $\overline{conv(B)}$ es también separable y por tanto B_{X^*} es separable, entonces X^* es también separable.

□

Corolario 6.7. *Sea X un espacio de Banach, si $Ext(B_{X^*})$ es separable entonces X^* es separable.*

Demostración. Por la Proposición 6.1 se tiene que $Ext(B_{X^*})$ es frontera de James de X y además es separable. Entonces por el corolario anterior (Corolario 6.6) se tiene que X^* es separable. □

Usando la desigualdad de Simons (Lema 6.3) y el Teorema de Simons (Teorema 6.4) podemos estudiar como la frontera de James de un conjunto interactua con el espacio bidual.

Corolario 6.8. *Sean X un espacio de Banach, M un subconjunto acotado de X^* y B una frontera de James de M. Si $x^{**} \in X^{**}$ es el w^*-límite de una sucesión acotada en X, entonces $\sup_{x^* \in B} x^{**}(x^*) = \sup_{x^* \in M} x^{**}(x^*)$. En particular, si B es una frontera de James de X y $x^{**} \in X^{**}$ es el w^*-límite de una sucesión acotada en X, entonces $\|x^{**}\| = \sup_B x^{**}$.*

Demostración. Sean $x^{**} \in X^{**}$ y $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X tal que x^{**} es el w^*-límite de $(x_n)_n$, entonces si $x^* \in X^*$, se tiene que $x^{**}(x^*) = \limsup_{n\to\infty} x_n(x^*)$. Por tanto aplicando el Teorema de Simons (Teorema 6.4) se tiene que $\sup_{x^* \in B} x^{**}(x^*) = \sup_{x^* \in M} x^{**}(x^*)$. Para la última parte, basta con tener en cuenta que si B es una frontera de James de X, en particular B es una frontera de James de B_{X^*} y que $\sup_{x^* \in B_{X^*}} x^{**}(x^*) = \|x^{**}\|$. Por tanto aplicando la primera parte del corolario se tiene que:

$$\|x^{**}\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} x^{**}(x^*) = \sup_{x^* \in B} x^{**}(x^*).$$

□

Corolario 6.9. *Sean X un espacio de Banach, C un subconjunto cerrado, convexo y acotado suyo. Si todo punto de $S_{X^{**}}$ es el w^*-límite de una sucesión acotada en B_X, entonces se tiene que $C = \overline{conv(B)}^{\|\cdot\|}$ para todo B frontera de James de C.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que no se da, entonces existe $x^* \in C \setminus \overline{conv(B)}^{\|\cdot\|}$. Por el Teorema de separación de Hahn-Banach (Teorema 1.17) existen $x^{**} \in S_{X^{**}}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\sup_{y^* \in B} x^{**}(y^*) < \alpha < x^{**}(x^*)$, en particular se tiene que $\sup_{y^* \in B} x^{**}(y^*) < \sup_{y^* \in C} x^{**}(y^*)$. Por otro lado, como $x^{**} \in S_{X^{**}}$ por hipótesis, existe una sucesión acotada en X tal que x^{**} es su w^*-límite. Por tanto aplicando el Corolario 6.8 se tiene que $\sup_{y^* \in B} x^{**}(y^*) = \sup_{y^* \in C} x^{**}(y^*)$ (contradicción). Por tanto $C = \overline{conv(B)}^{\|\cdot\|}$. □

Proposición 6.10. *En un espacio de Banach dual separable. Todo conjunto convexo cerrado y acotado es la adherencia de la envoltura convexa de sus puntos extremos.*

Demostración. Sean X^* un espacio dual separable y C un subconjunto convexo, cerrado y acotado suyo. Por la Proposición 6.1 se tiene que $Ext(C)$ es una frontera de James de C.

Procedemos por reducción al absurdo, supongamos que $\overline{conv(Ext(C))} \neq C$. Por el teorema de separación (Teorema 1.20), podemos encontrar $F \in S_{X^{**}}$, $\alpha < \beta$ y un elemento f_0 de $C \setminus \overline{conv(Ext(C))}$ de manera que $F(f) \leq \alpha \quad \forall f \in Ext(C)$ y $F(f_0) > \beta$. Sea $S = \{x \in B_X : f_0(x) > \beta\}$. Usando el Teorema de Goldstine (Teorema 1.11), tenemos que $F \in \overline{S}^{w^*}$. Como X^* es separable y $Ext(C)$ es un subconjunto suyo, también va a ser separable. Entonces la topología de los conjuntos acotados en X^{**} de la convergencia puntual es metrizable en $Ext(C)$. Entonces, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S que converge a F en los puntos de $Ext(C)$. En particular, $f(x_n) \longrightarrow F(f)$ para todo $f \in Ext(C)$, por tanto $\sup\limits_{f\in Ext(C)} \{\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)\} = \sup\limits_{f\in Ext(C)} F(f) \leq \alpha$.

Por otro lado, tenemos que como f_0 lineal, $conv(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \subset S$ y f_0 pertenece a C, entonces para todo $x \in conv(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ se tiene que $\sup\limits_{f\in Ext(C)} f(x) = \sup\limits_{f\in C} f(x) > \beta$. Entonces, por la desigualdad de Simons (Lema 6.3), se tiene que:

$$\alpha \geq \sup_{f\in Ext(C)} \{\limsup_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)\} \geq \inf_{x\in conv(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})} \{\sup_{f\in Ext(C)} f(x)\} \geq \beta.$$

Entonces $\alpha \geq \beta$ (contradicción, ya que $\alpha < \beta$). Por tanto $\overline{conv(Ext(C))} = C$.

□

Lema 6.11. *Sean X un espacio de Banach y A un subconjunto suyo. Si A es acotado y su w^*-clausura en X^{**} es un subconjunto de X, entonces A es w-compacto.*

Demostración. Si A es acotado entonces A° es un entorno del 0 en X^*. Entonces por el Teorema de Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.9) se tiene que $A^{\circ\circ}$ es w^*-compacto en X^{**} y como $A \subset A^{\circ\circ}$ tenemos que $\overline{A}^{w^*}$ es w^*-compacto y es un subconjunto de X entonces $\overline{A}^{w} = \overline{A}^{w^*}$ es w-compacto, y como A es w-cerrado, entonces $A = \overline{A}^{w}$ es w-compacto.

□

Teorema 6.12 (Teorema de James)**.** *Sean X un espacio de Banach y A un subconjunto w-cerrado suyo. Entonces, A es w-compacto si y solo si todo elemento f de X^* alcanza su supremo en A, esto es todo elemento de X^* es un funcional soporte de A.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea A w-compacto, como todo elemento f de X^* es w-continuo se tiene que $f(A)$ es compacto en $\mathbb{R}$ por lo tanto alcanza su supremo.

($\Leftarrow$) Lo vamos a ver solo en el caso particular en el que además tenemos que X es separable, si no lo fuera sería mucho más complejo. Sean $C = \overline{conv(A)}$ y $f \in X^*$, entonces $\sup\limits_{A} f = \sup\limits_{C} f = \sup\limits_{\overline{C}^{w^*}} f$. Como X es separable, tenemos que A es una frontera de James separable de $\overline{C}^{w^*}$ en X^{**}, entonces por el Teorema de Godefroy (Teorema 6.5) $\overline{conv(A)} = \overline{C}^{w^*}$. Como todo $f \in X^*$ alcanza su supremo en C, se tiene que C es w-acotado entonces por el Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 5.3) se tiene que C es acotado. Además, C es convexo y w-cerrado entonces $C = \overline{C}^{w^*} = \overline{C}^{w}$, por tanto C es acotado y su w^*-clausura en X^{**} es el propio C que es un subconjunto de X. Entonces por el Lema 6.11 se tiene que C es w-compacto. Por tanto A es un subconjunto w-cerrado de C que es w-compacto, entonces A es w-compacto.

□

Corolario 6.13. *Sea X un espacio de Banach. X es reflexivo si y solo si todo elemento f de X^* alcanza su norma.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea X reflexivo, entonces por el Teorema 5.5 se tiene que B_X es w-compacto y aplicando el Teorema de James (Teorema 6.12) se tiene que todo elemento f de X^* alcanza su supremo en B_X y como $\sup_{B_X} f = \|f\|$, entonces todo elemento de X^* alcanza su norma.

($\Leftarrow$) Por el Teorema de James (Teorema 6.12) B_X es w-compacto, entonces por el Teorema 5.5 se tiene que X es reflexivo.

□

Ahora veamos otra caracterización de cuando un espacio de Banach es reflexivo debida a James.

Teorema 6.14 (Teorema de caracterización de James)**.** *Sea X un espacio de Banach. X es reflexivo si y solo si existe $\theta \in (0,1)$ tal que para toda sucesión $(x_n)_n$ en S_X que cumple que $\inf\{\|u\| : u \in conv\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\} \geq \theta$, se tiene que existen un número natural n_0, un punto u de $conv\{x_1, ..., x_{n_0}\}$ y otro punto v de $conv\{x_{n_0+1}, ...\}$ tales que $\|u - v\| \leq \theta$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea X reflexivo. Fijo $\theta \in (0,1)$ y sea $(x_n)_n \in S_X$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ considero el conjunto $K_n = \overline{conv}\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$. Así tengo una sucesión $(K_n)_n$ de conjuntos encajados ($K_{n+1} \subset K_n$), no vacíos, convexos, w-cerrados y acotados (ya que la sucesión $(x_n)_n$ esta en S_X). Por tanto $K_n = \overline{K_n}^{w^*} = \overline{K_n}^{w}$, esto es K_n es acotado y su w^*-clausura en X^{**} es el propio K_n que es un subconjunto de X. Entonces por Lema 6.11 se tiene que K_n es w-compacto para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por tanto existe $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$. Como $x \in K_0$ existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $u \in conv\{x_1, ..., x_{n_0}\}$ tal que $\|x - u\| < \frac{\theta}{2}$ y como también $x \in K_{n_0}$ entonces existe $v \in conv\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$ tal que $\|x - v\| < \frac{\theta}{2}$. Entonces $\|u - v\| \leq \|u - x\| + \|x - v\| < \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $X \neq X^{**}$, entonces vamos a construir una sucesión $(x_n)_n$ que hace fallar la hipótesis. Considero $B_\theta = \{F \in X^{**} / \|F\| \leq \theta\}$, como $X \neq X^{**}$ entonces existe $F_\theta \in S_{X^{**}} \setminus \bigcup_{x \in X} (x + B_\theta)$. Como $F_\theta \notin B_\theta$ existe un w^*-entorno convexo V_1 de F_θ en X^{**} tal que $V_1 \cap B_\theta = \emptyset$ y elijo $x_1 \in V_1 \cap S_X$. Como $F_\theta \notin x_1 + B_\theta$ existe un w^*-entorno convexo $V_2 \subset V_1$ de F_θ tal que $V_2 \cap (x_1 + B_\theta) = \emptyset$ y elijo $x_2 \in V_2 \cap S_X$. Como $F_\theta \notin (conv\{x_1, x_2\} + B_\theta)$ existe un w^*-entorno convexo $V_3 \subset V_2$ de F_θ tal que

$V_3 \cap (conv\{x_1, x_2\} + B_\theta) = \emptyset$ y elijo $x_3 \in V_3 \cap S_X$. Procediendo de este modo consigo una sucesión decreciente $(V_n)_n$ de conjuntos convexos y una sucesión $(x_n)_n$ de S_X tales que $conv\{x_n\} \subset V_1$, entonces $\inf\limits_{u \in conv\{x_n\}} \|u\| \geq \theta$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $conv\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \subset V_{n+1}$ y además $V_{n+1} \cap (conv\{x_1, ..., x_n\} + B_\theta)$, por tanto dados cualesquiera $u \in conv\{x_1, ..., x_n\}$ y $v \in conv\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$ se tiene que $\|u - v\| > \theta$ (contradicción con la hipótesis). Entonces $X = X^{**}$, por tanto X es reflexivo.

□

Veamos alguna aplicación del Teorema de James (Teorema 6.12), primero vamos a ver una extensión de este resultado que nos dice que el cierre convexo de un conjunto w-compacto en un espacio de Banach es también w-compacto, este resultado se lo debemos a Krein.

Teorema 6.15 (Teorema de Krein)**.** *Sean X un espacio de Banach y A un subconjunto w-compacto suyo, entonces $C := \overline{conv(A)}$ es w-compacto.*

Demostración. Sea $f \in X^*$, sabemos que $\sup\limits_A f = \sup\limits_C f$ y como A es w-compacto, por el Teorema de James (Teorema 6.12) se tiene que f alcanza su supremo en A. En particular, como $A \subset C$, f también alcanza su supremo en C. Esto es, todo $f \in X^*$ alcanza su supremo en C entonces por el Teorema de James (Teorema 6.12) C es w-compacto.

□

Teorema 6.16 (Teorema de Rainwater-Simons)**.** *Sean X un espacio de Banach, M un subconjunto acotado de X^* y B una frontera de James de M. Sean $(x_n)_n \subset X$ una sucesión acotada y $x \in X$. Si $f(x_n) \to f(x)$ para todo f de B, entonces $f(x_n) \to f(x)$ para todo f de M. En particular, si B es una frontera de James de X y $f(x_n) \to f(x)$ para todo f en B, entonces $(x_n)_n$ converge débilmente a x.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(x_n)_n$ converge a 0 en todos los elementos de B, esto es $f(x_n) \to f(0) = 0$ para todo elemento f de B. Considero a cada x_n como un elemento de X^{**}, esto es una aplicación de X^* en $\mathbb{R}$ y defino $u(x^*) := \limsup\limits_{n\to\infty} x_n(x^*)$ para todo elemento x^* de X^*. Entonces aplicando el Teorema de Simons (Teorema 6.4) tenemos que $\sup\limits_{x^* \in M} u(x^*) = \sup\limits_{x^* \in B} u(x^*)$ y como para todo elemento f de B se tiene que $f(x_n) \to f(0) = 0$, entonces

$$u(x^*) = \limsup_{n\to\infty} x_n(x^*) = \limsup_{n\to\infty} x^*(x_n) = 0.$$

Por tanto, $\sup\limits_{x^* \in M} u(x^*) = \sup\limits_{x^* \in B} u(x^*) = 0$. Supongamos que existe $x^* \in M$ tal que $x^*(x_n)$ no converge a $x^*(0) = 0$. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $|x^*(x_{n_k})| > \varepsilon$ para todo k natural, por tanto se da alguna de estas dos posibilidades: o bien, $x^*(x_{n_k})$ para infinitos k, entonces $u(x^*) > \varepsilon$. (Contradicción, ya que $\sup\limits_{x^* \in M} u(x^*) = 0$) o bien se tiene que $x^*(-x_{n_k}) > \varepsilon$ para infinitos k, entonces (haciendo el mismo razonamiento que hemos hecho para $(x_n)_n$ con $(-x_n)_n$) se tiene que $u(x^*) > \varepsilon$. (Contradicción, ya que $\sup_{x^* \in M} u(x^*) = 0$). Por tanto, no puede existir $x^* \in M$ tal que $x^*(x_n)$ no converja a $x^*(0) = 0$, esto es $f(x_n) \to f(0) = 0$ para todo f de M. En el caso particular de que B es una frontera de James de X, tendría que $f(x_n) \to f(x)$ para todo f de B_{X^*}, entonces $f(x_n) \to f(x)$ para todo f de X^*, esto es $(x_n)_n$ converge débilmente a x.

□

Corolario 6.17 (Rainwater)**.** *Sean X un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset X$ una sucesión acotada y $x \in X$. Si $f(x_n) \to f(x)$ para todo f punto extremo de B_{X^*} entonces $(x_n)_n$ converge débilmente a x.*

Demostración. Por la Proposición 6.1 se tiene que el conjunto de los puntos extremos de B_{X^*} es una frontera de James de X. Entonces por el teorema anterior (Teorema 6.16) se tiene que $f(x_n) \to f(x)$ para todo f de B_{X^*}. Por tanto $f(x_n) \to f(x)$ para todo f de X^*, entonces $(x_n)_n$ converge débilmente a x.

□

Capítulo 7

Propiedad de Krein-Milman y Propiedad de Radon-Nikodým

Siguiendo el artículo de R.E. Huff y P.D. Morris [6] me voy a adentrar en una cuestión todavía abierta relacionada con el tema del trabajo que es la equivalencia entre la propiedad de Krein-Milman y la propiedad de Radon-Nikodým en los espacios de Banach, primero veremos que la propiedad de Radon-Nikodým implica la propiedad de Krein-Milman y en cuanto a la otra implicación veremos que se da en el caso de que el espacio sea un espacio de Banach dual ya que en el caso general no se conoce. Empecemos viendo cuando decimos que un espacio de Banach tiene la propiedad de Krein-Milman y la de Radon-Nikodým.

Definición 7.1. Un espacio de Banach X se dice que tiene la **propiedad de Krein-Milman** si todo subconjunto acotado, convexo y cerrado suyo cumple que es igual a la adherencia de la envoltura convexa de sus puntos extremos.

Para definir cuando un espacio de Banach tiene la propiedad de Radon-Nikodým no voy a utilizar la definición habitual sino una definición equivalente más ajustada a la teoría desarrollada en este trabajo, para ello necesito dar una definición previa.

Definición 7.2. Sean X un espacio de Banach y A un subconjunto acotado suyo, se dice que un punto x de A es un **punto fuertemente expuesto de *A*** si existe un funcional $f \in X^*$ tal que $f(x) = \sup_{a \in A} f(a)$ y para toda sucesión $(x_n)_n \subset A$ tal que $f(x_n) \to f(x)$ se tiene que $\|x_n - x\| \to 0$. Denotamos por $Fep(A)$ el conjunto de todos los puntos fuertemente expuestos de A.

Definición 7.3. Un espacio de Banach X se dice que tiene la **propiedad de Radon-Nikodým** si todo subconjunto acotado, convexo y cerrado suyo cumple que es igual a la adherencia de la envoltura convexa de sus puntos fuertemente expuestos.

Una vez vista estas definiciones la pregunta natural que nos hacemos es si estas propiedades son equivalentes. La implicación de que la propiedad de Radon-Nikodým implica la propiedad de Krein-Milman si se conoce y se debe al hecho de que todo punto fuertemente expuesto es un punto extremo.

Proposición 7.1. *Sean X un espacio de Banach, A un subconjunto convexo suyo y x un punto fuertemente expuesto de A entonces x es un punto extremo de A.*

Demostración. Supongamos que x no es un punto extremo, entonces existen x_1 y x_2 dos puntos de A distintos de x tales que $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Como x es un punto fuertemente expuesto de A se tiene que existe $f \in X^*$ tal que $\sup_{a \in A} f(a) = f(x) = \sup_{a \in A} f(a)$. Por otro lado, se tiene que $f(x) = f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) \leq \sup_{a \in A} f(a)$, entonces $f(x_1) = f(x_2) = \sup_{a \in A} f(a) = f(x)$. Entonces, como x es un punto fuertemente expuesto de A, se tiene que $x_1 = x = x_2$. (Contradicción, ya que x_1 y x_2 son dos puntos distintos de x). Por tanto x es un punto extremo de A.

□

Proposición 7.2. *Sea X un espacio de Banach que cumple la propiedad de Radon-Nikodým entonces X también cumple la propiedad de Krein-Milman.*

Demostración. Sea A un subconjunto de X acotado, convexo y cerrado, entonces utilizando la Proposición 7.1 se tiene que $Fep(A) \subset Ext(A)$, por tanto $\overline{conv(Fep(A))}$ está contenido en $\overline{conv(Ext(A))}$ y como X cumple la propiedad de Radon-Nikodým se tiene que $A = \overline{conv(Fep(A))}$, entonces, utilizando que A es convexo y cerrado se tiene que

$$A = \overline{conv(Fep(A))} \subset \overline{conv(Ext(A))} \subset A.$$

Entonces $\overline{conv(Ext(A))} = A$. Por tanto, X cumple la propiedad de Krein-Milman.

□

Utilizando el hecho demostrado en la Proposición 7.1, todo punto fuertemente expuesto es un punto extremo, obtenemos una mejora del Teorema de Krein-Milman (Teorema 2.5) en el contexto de espacios de Banach, este resultado se conoce como Teorema de Lindenstrauss y Troyanski.

Teorema 7.3 (Teorema de Lindenstrauss-Troyanski)**.** *Sean X un espacio de Banach y W un subconjunto suyo convexo y w-compacto, entonces W es la adherencia de la envoltura convexa de sus puntos fuertemente expuestos.*

En cuanto a la otra implicación, esto es, que la propiedad de Krein-Milman implica la propiedad de Radon-Nikodým no se sabe todavía en el caso general. Si se sabe en el caso en el que el espacio es un espacio de Banach dual, la demostración de este hecho va a ser el objetivo de este capítulo, como lo era para Huff y Morris en su artículo.

Teorema 7.4. *Sea X un espacio de Banach dual que cumple la propiedad de Krein-Milman entonces cumple la propiedad de Radon-Nikodým.*

Para demostrar este teorema voy a necesitar dar alguna definición previa así como dos resultados previos de Uhl y Stegall.

Teorema 7.5 (Teorema de Uhl y Stegall)**.** *Sea X^* el espacio dual de un espacio de Banach X entonces, X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým si y solo si todo subespacio separable de X tiene un dual separable.*

Teorema 7.6 (Teorema de Stegall)**.** *Sean ε un número positivo y X un espacio de Banach separable tal que X^* es no separable. Entonces existen un subconjunto Δ de S_{X^*} que es w^*-homeomorfo al conjunto de Cantor y una sucesión $(x_n)_n$ de X con $\|x_n\| < 1+\varepsilon$ para todo n natural, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(x_n) - \chi_{A_n}\| < \varepsilon$, donde $T : X \to C(A)$ es el operador evaluación, esto es $T(x)(x^*) = x^*(x)$ y los conjuntos A_n son las imágenes homeomorfas de los intervalos diádicos del conjunto de Cantor.*

Definición 7.4. Sean X un espacio de Banach y B un subconjunto convexo suyo. Se dice que $A \subset B$ es un **subconjunto extremal de B** si A es cerrado, convexo y no vacío y tal que para todo punto x de A para el cual existen $u, v \in B$ de manera que x es una combinación convexa de u y v, entonces u y v pertenecen a A.

Definición 7.5. Sea X un espacio topológico Hausdorff. Una medida μ en la σ-álgebra de Borel de X se dice que es una **medida de Radon** de X si cumple que es:

(I) Interior normal (inner regular), esto es, para todo subconjunto abierto U de X se tiene que
$$\mu(U) = \sup\{\mu(K)/K \text{ es compacto y } K \subset U\}.$$

(II) Ordinario exterior (outer regular), esto es, para todo conjunto de Borel B de X se tiene que
$$\mu(U) = \min\{\mu(A)/A \text{ es abierto y } B \subset A\}.$$

(III) Localmente finita, esto es, todo punto de X tiene un entorno U tal que $\mu(U) < \infty$.

De forma análoga a como definimos el espacio $L^\infty([0,1])$ definimos $L^\infty(\Delta, \mu)$ para un espacio de medida arbitrario:

Definición 7.6. Sea (Δ, μ) un espacio de medida definimos $L^\infty(\Delta, \mu)$ el espacio vectorial de las clases de funciones medibles (iguales en μ-ctp) f tales que $esssup(f)$ es finito, donde
$$esssup(f) = \inf\{\alpha/\mu(\{t \in \Delta : f(t) > \alpha\}) = 0\}$$
y definimos la norma de cada elemento f como $\|f\| = esssup(f)$.

Definición 7.7. Un espacio de Banach X es **inyectivo** si para todo espacio de Banach Z, para todo subespacio Y de Z y para todo operador lineal y continuo T de Y en X existe un operador lineal y continuo G de Z a X que es extensión de T.

Ahora ya si podemos proceder a la demostración del resultado principal de este capítulo, el Teorema 7.4.

Demostración. Sea Z^* el espacio dual de un espacio de Banach Z tal que Z^* cumple la propiedad de Krein-Milman. Veamos, por reducción al absurdo, que Z^* también cumple la propiedad de Radon-Nikodým. Supongamos que Z^* no cumple la propiedad de Radon-Nikodým entonces por el resultado anterior de Uhl y Stegall (Teorema 7.5) se tiene que Z tiene un subespacio X separable tal que X^* no lo es. Entonces aplicando el Teorema de Stegall (Teorema 7.6) al espacio X (que es de Banach por ser un subespacio de un espacio de Banach) con $\varepsilon = \frac{1}{2}$, se tiene que existen un subconjunto $\Delta \subset S_{X^*}$ que es w^*-homeomorfo al conjunto de Cantor y una sucesión $(x_n)_n$ de X con $\|x_n\| < \frac{3}{2}$ para todo n natural, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(x_n) - \chi_{A_n}\| < \dfrac{1}{2}$, donde $T : X \to C(A)$ es el operador evaluación, esto es $T(x)(x^*) = x^*(x)$ y los conjuntos A_n son las imágenes homeomorfas de los intervalos diádicos del conjunto de Cantor.

Sea μ una medida de Radon en Δ tal que $\mu(A_n) = 2^{-k}$ si $2^k \le n \le 2^{k+1}$, para cada n natural definimos la medida μ_n en Δ como $\mu_n(E) = \dfrac{\mu(E \cap A_n)}{\mu(A_n)}$ para todo E conjunto de Borel. Estas medidas μ_n son medidas de Radon en Δ. El operador de evaluación T se puede ver como una aplicación de X en $L^\infty(\Delta, \mu)$, como el último espacio es inyectivo, T se puede extender a un operador acotado, que llamo también T, de Z en $L^\infty(\Delta, \mu)$. Las medidas μ_n se pueden ver como elementos de $L^\infty(\Delta, \mu)^*$. Para cada n natural, sea $x_n^* = T^*(\mu_n) \in Z^*$, donde T^* es el operador dual de T, considero los siguientes conjuntos.

$$C := \overline{conv\{\mu_n\}}^{w^*} \subset L^\infty(\Delta, \mu)^*.$$

$$D := \overline{conv\{x_n^*\}}^{w^*} \subset Z^*.$$

$$K := \{z^* \in D / z^*(x_n) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty\}.$$

Tanto C como D son w^*-compactos y $D = T^*(C)$. Nuestro objetivo es ver que K es un conjunto no vacío, acotado, cerrado (en norma) y convexo que no tiene puntos extremos llegando así a una contradicción con el hecho de que Z^* cumple la propiedad de Krein-Milman. Es claro que K es convexo y acotado. También es sencillo ver que K es cerrado en norma, sea $(z_n^*)_n \subset K$ y $z^* \in Z^*$ tal que $\|z_n^* - z^*\| \to 0$ cuando n tiende a infinito, veamos que z^* pertenece a K, lo primero de todo como $(z_n^*)_n$ es una sucesión en K en particular, también esta en D luego z^* pertenece a D, y se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |z^*(x_n)| = \lim_{n\to\infty} |(z^* + z_m^* - z_m^*)(x_n)| = \lim_{n\to\infty} |z_m^*(x_n)| + \lim_{n\to\infty} |(z^* - z_m^*)(x_n)| \le$$
$$\le \lim_{n\to\infty} |z_m^*(x_n)| + \|z^* - z_m^*\| (\lim_{n\to\infty} \|x_n\|) \le \frac{3}{2} \|z^* - z_m^*\|$$

esto se da para todo m natural, entonces haciendo m tender a infinito en el último término se va 0, luego $z^*(x_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ por tanto $z^* \in K$, entonces K es cerrado (en norma).

Veamos ahora que K es no vacío viendo que x_n^* pertenece a K para todo n natural. Sea n un número natural es claro que x_n^* pertenece a D y se tiene,

$$\lim_{m\to\infty} |x_n^*(x_m)| = \lim_{m\to\infty} |\mu_n(T(x_m))| = \lim_{m\to\infty} |\mu_n(T(x_m) - \chi_{A_m} + \chi_{A_m})| \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} |\mu_n(T(x_m) - \chi_{A_m})| + \lim_{n\to\infty} |\mu_n(\chi_{A_m})| \leq \lim_{n\to\infty} \|T(x_m) - \chi_{A_m}\| + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\mu(A_n \cap A_m)}{\mu(A_n)}\right)$$

y por lo deducido del Teorema de Stegall se tiene que $\|T(x_m) - \chi_{A_m}\| \to 0$ al hacer m tender a infinito y por la definición de la medida μ se tiene que $\mu(A_m) \to 0$ cuando m tiende a infinito, y al estar n fijo se tiene que $\dfrac{\mu(A_n \cap A_m)}{\mu(A_n)} \to 0$ cuando m tiende a infinito, entonces $x_n^*(x_m) \to 0$ cuando m tiende a infinito, luego x_n^* pertenece a K para todo n natural, luego K es distinto del vacío.

Por último vamos a comprobar que K no tiene puntos extremos. Para ello, primero vamos a ver que K es un subconjunto extremal de D, sean n, m naturales entonces se tiene

$$x_n^*(x_m) = \mu_n(T(x_m) - \chi_{A_m}) + \mu_n(\chi_{A_m}) \geq -\|T(x_m) - \chi_{A_m}\|$$

entonces como $D = \overline{conv\{x_n^*\}}^{w^*}$, se tiene que $z^*(x_m) \geq -\|T(x_m) - \chi_{A_m}\|$ para todo $z^* \in D$ y todo m natural, por tanto

$$\liminf_{m\to\infty} z^*(x_m) \geq \liminf_{m\to\infty} -\|T(x_m) - \chi_{A_m}\| = 0 \quad \forall z^* \in D. \tag{7.1}$$

Ahora supongamos que existen $z_1^*, z_2^* \in D$ tales que $z^* = \frac{1}{2}(z_1^* + z_2^*)$, entonces utilizando la ecuación (7.1) se tiene que:

$$\limsup_{m\to\infty} z_1^*(x_m) \leq 2 \limsup_{m\to\infty} z^*(x_m) - \liminf_{m\to\infty} z_2^*(x_m) \leq 0$$

$$\limsup_{m\to\infty} z_2^*(x_m) \leq 2 \limsup_{m\to\infty} z^*(x_m) - \liminf_{m\to\infty} z_1^*(x_m) \leq 0$$

luego $z_1^*, z_2^* \in K$, entonces K es un subconjunto extremal de D. Para completar la prueba veamos que todo punto extremo de D no está en K, sea z^* un punto extremo de D, el conjunto $C \cap (T^*)^{-1}(z^*)$ es un conjunto extremal en C, entonces existe un punto extremo de C que denoto por β tal que $T^*(\beta) = z^*$. Como β es un punto extremo de C se tiene que β está en la w^*-clausura de $\{\mu_n\}$ que denoto por W. Por otro lado, utilizando la definición de los μ_n y el hecho de que para todo n natural A_n sea la unión disjunta de A_{2n} y A_{2n+1} se tiene que $\mu_n = \frac{1}{2}(\mu_{2n} + \mu_{2n+1})$, por tanto ningún μ_n es un punto extremo de C, luego $\beta \in W \setminus \{\mu_n\}$. Como $\mu_n(\chi_{A_m})$ es o 0 o 1 si $n \geq m$, se tiene que $\beta(\chi_{A_m})$ es o 0 o 1 para todo m natural y como sabemos que $\beta(\chi_{A_1}) = 1$ se tiene que

$$1 = \beta(\chi_{A_1}) = \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} \beta(\chi_{A_m}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

entonces $\beta(\chi_{A_m}) = 1$ para infinitos m. Para cada uno de estos m tal que $\beta(\chi_{A_m}) = 1$ se tiene que

$$z^*(x_m) = T^*(\beta)(x_m) = \beta(T^*(x_m)) = \beta(T(x_m) - \chi_{A_m}) + \beta(\chi_{A_m}) > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

donde hemos utilizado que:

$$\beta(T(x_m) - \chi_{A_m}) \geq -\|T(x_m) - \chi_{A_m}\| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \|T(x_n) - \chi_{A_n}\| > \frac{1}{2}.$$

Como esto pasa para infinitos m, entonces $(z^*(x_m))_m$ no converge a 0, luego z^* no pertenece a K. Por tanto K no tiene puntos extremos, entonces como K es un subconjunto acotado, convexo y cerrado de Z^* que cumple la propiedad de Krein-Milman, entonces $K = \overline{conv(Ext(K))} = \emptyset$, por tanto K es vacío (contradicción, ya hemos visto que K era no vacío), luego Z^* cumple la propiedad de Radon-Nikodým.

□

Otro tipos de espacios de Banach donde se conoce la equivalencia entre estas dos propiedades es en los llamados retículos de Banach, estos son.

Definición 7.8. Un retículo de Banach es un espacio de Banach ordenado $(X, \leq)$ tal que:

1. Si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$ para todo $z \in X$.
2. Para todo $x \in X$ tal que $0 \leq x$ y para todo número real $a \geq 0$ se tiene que $0 \leq ax$.
3. Para cualesquiera $x, y \in X$ existen un ínfimo de x e y, denotado por $x \wedge y \in X$ y un supremo de x e y, denotado por $x \vee y \in X$.
4. Para cada $x \in X$ definimos $|x| = x \vee (-x)$, y se tiene que si $|x| \leq |y|$ entonces $\|x\| \leq \|y\|$.

Como ya he dicho, en estos espacios se tiene la equivalencia entre la propiedad de Krein-Milman y la de Radon-Nikodým, para ver este resultado se puede consultar el artículo de Bourgain y Talagrand [2].

Por último, resaltar que a pesar de que, como ya he dicho, la equivalencia entre estas dos propiedades no se sabe en el caso general. Huff y Morris en un artículo posterior al seguido durante este capítulo [7] demuestran la equivalencia entre la propiedad de Radon-Nikodým y la llamada propiedad fuerte de Krein-Milman. Se dice que un espacio tiene la propiedad fuerte de Krein-Milman si todo subconjunto cerrado y acotado (no necesariamente convexo) suyo tiene un punto extremo.

Bibliografía

[1] ALIPRANTIS, C., BORDER, K. *Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999.

[2] BOURGAIN, J., TALAGRAND, M. *Dans Un Espace de Banach Reticule Solide, La Propriété de Radon-Nikodým et Celle de Krein-Milman Sont Équivalentes.* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 81, No.1, Jan. 1981, pages 93-96.

[3] COHN, DONALD L. *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, 1997.

[4] FABIAN, M., HABALA, P., HAJEK, P., MONTESINOS SANTALUCÍA, V., ZIZLER, V. *Banach Space Theory, The Basis for Linear and Nonlinear Analysis.* CMS Books in Mathematics. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.

[5] FABIAN, M., HABALA, P., HAJEK, P., MONTESINOS SANTALUCÍA, V., PELANT, J., ZIZLER, V. *Functional Analysis and Infinite Dimensional Geometry.* CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8. Springer-Verlag, New York, 2001.

[6] HUFF, R. E., MORRIS, P. D. *Dual Spaces with the Krein-Milman Property have the Radon-Nikodým Property.* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 49, No.1, May 1975, pages 104-108.

[7] HUFF, R. E., MORRIS, P. D. *Geometric characterizations of the Radon-Nikodym property in Banach spaces.* Studia Mathematica, tomo LVI, 1976, pages 157-164

[8] KALTON, N. J., PECK, N. T. *A Re-Examination of the Roberts Example of a Compacto Convex Set Without Extreme Points.* Mathematische Annalen, Vol 253, Springer-Verlag 1980, pages 89-101.

[9] LINDENSTRAUSS, J., PHELPS, R. R. *Extreme Point Properties of Convex Bodies in Reflexive Banach Spaces.* Israel Journal Mathematics Vol 6, 1968, pages 39-48.

[10] MEGGINSON, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory* Graduate Texts in Mathematics, Springer 1998, pages 271-272.