PROPUESTA DE TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

Director(es): Daniel Macías Castillo (Instituto de Ciencias Matemáticas - CSIC)

Tutor UCM: Marina Logares Jiménez

Alumno(a): Carlos García Ordóñez

Curso: 2024-2025

Título: El Teorema de Mordell-Weil

Resumen: El Teorema de Mordell-Weil se puede considerar el resultado fundacional de la geometría aritmética. Para una curva elíptica E definida sobre un cuerpo de números K, afirma que el grupo abeliano E(K) de los puntos K-racionales de E, o `grupo de Mordell-Weil de E/K', es finitamente generado.

El objetivo principal de este trabajo es presentar una demostración de este resultado. Sin embargo, no se conocen demostraciones constructivas.

En el caso K=Q, el subgrupo de puntos de torsión es relativamente sencillo de determinar. En el trabajo se desarrollarán las herramientas que permiten esta determinación.

Sin embargo, incluso en el caso K=Q, el rango es completamente misterioso. Su determinación es el contenido de la Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer, uno de los `Problemas del Milenio'. Aún así, en ciertos ejemplos de curvas elípticas concretas se puede acotar o incluso determinar este rango.

En el trabajo también se tratarán las herramientas teóricas necesarias para esta determinación y se desarrollarán los ejemplos básicos de curvas elípticas en los que resultan efectivos.

Además de los preliminares necesarios de teoría algebraica de números, este último punto requerirá un desarrollo de la cohomología de grupos y la cohomología de Galois, para poder definir los grupos de Selmer y de Tate-Shafarevich de una curva elíptica. Estos últimos son las herramientas principales en el estudio del rango.

Bibliografía:

[1] J. W. S. Cassels, Lectures on Elliptic Curves, LMS Student Texts, Cambridge University Press, 1991.
[2] J. Neukirch, Algebraic Number Theory, Springer, 1999.
[3] J.-P. Serre, Local Fields, Springer, 1979.
[4] J. H. Silverman, The Arithmetic of Elliptic Curves, Springer, 2nd ed., 2009.