PROPUESTA DE TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

Director: Luis Álvarez Cónsul (ICMAT)

Tutor UCM: Enrique Arrondo Esteban

Alumna: Lucía Baena Ligero

Curso: 2024/2025

Título: Espacios de móduli en Geometría Algebraica

Resumen:

Dada una categoría de objetos en un contexto geométrico (típicamente en geometría algebraica o diferencial), un espacio de móduli es un objeto geométrico, preferiblemente de la misma categoría, cuyos puntos son clases de equivalencia de dichos objetos, esto es, un conjunto cociente dotado de una estructura geométrica que refleja la manera en que los objetos clasificados pueden variar en familias. Hay diferentes maneras de precisar esta definición, lo cual origina diferentes nociones de espacio de móduli. Este concepto es importante, no solo porque surge en problemas de clasificación muy naturales, sino también por su relación con áreas de las matemáticas tan diversas como la geometría algebraica, la geometría diferencial, la topología y el álgebra, y con la física teórica. En muchas ocasiones, esta relación refleja su riqueza geométrica (topológica, diferencial y algebraica).

El objetivo de esta Tesis de Fin de Master es entender algunas de las construcciones más importantes de espacios de móduli en geometría algebraica, con énfasis en el estudio separado de dichas construcciones, poniendo de relieve situaciones en las cuales existen espacios de móduli finos y otras en las cuales solamente existen espacios de móduli gruesos. Como ejemplos del primer caso, se considerarán Grassmannianas y esquemas de Hilbert y Picard. Como ejemplos del segundo caso (en ciertas situaciones, también del primer caso), se estudiarán espacios de móduli de representaciones de álgebras asociativas de dimensión finita, espacios de móduli de curvas estables y espacios de móduli de haces coherentes. Para ello, también se estudiarán aspectos básicos de la Teoría Geométrica de Invariantes desarrollada por Mumford, que en un buen número de situaciones proporciona un método general para construir tales espacios de móduli. Si el tiempo lo permite, se abordarán también construcciones más modernas de espacios de móduli que combinan la teoría de Mumford con campos (o *stacks*) algebraicos.

Referencias:

J. Alper, D. Halpern-Leistner, J. Heinloth: Existence of moduli spaces for algebraic stacks. Invent. Math. **234** (2023) 949–1038.

A. B. Altman, S. L. Kleiman: Compactifying the Picard scheme. Adv. Math. **35** (1980) 50–112.

L. Álvarez-Cónsul, A. King: A functorial construction of moduli of sheaves. Invent. Math. **168** (2007) 613–666.

P. Deligne, D. Mumford: The irreducibility of the space of curves of given genus. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **36** (1969) 75–109.

B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. L. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli: Fundamental algebraic geometry. Grothendieck's FGA explained. American Mathematical Society, 2005.

D. Huybrechts, M. Lehn: The geometry of moduli spaces of sheaves. Second ed. Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 2010.

A. D. King: Moduli of representations of finite-dimensional algebras", Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **45** (1994) 515–530.

A. Langer: Semistable sheaves in positive characteristic. Ann. of Math. (2) **159** (2004) 251–276.

S. G. Langton: Valuative criteria for families of vector bundles on algebraic varieties. Ann. of Math. (2) **101** (1975) 88–110.

D. Mumford, J.Fogarty, F. C. Kirwan: Geometric invariant theory. Third ed. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

C. T. Simpson: Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **79** (1994) 47–129.