

PROPUESTA DE TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

Director(es): Álvaro Lozano Rojo y Rubén Vigara Benito

Tutor UCM: Raquel Díaz Sánchez

Alumno(a): Pablo Serrano Gracia

Curso: 2025/2026

Título: Superficies de Dehn rellenable

Resumen:

Una *superficie de Dehn* en una 3-variedad M es una inmersión de una superficie compacta S en M en posición general. Así, las singularidades de la inmersión forman *curvas de dobles* y estas se intersecan en *puntos triples*. Es *rellenante* si proporciona una descomposición celular de M , donde el 2-esqueleto es la imagen en M de la superficie S , el 1-esqueleto son sus curvas dobles y el 0-esqueleto son sus puntos triples. En particular, su complemento es una reunión disjunta de bolas abiertas.

Esta noción la introdujo J.M. Montesinos (Representing 3-manifolds by Dehn spheres, Contribuciones Matemáticas: Homenaje a Joaquín Arregui Fernández, Editorial Complutense (2000), 239–247.), siguiendo ideas de W. Haken. En ese artículo prueba que toda 3-variedad tiene una esfera de Dehn rellenable. Estas superficies están estrechamente relacionadas con las cubulaciones, pues constituyen construcciones duales.

La información combinatoria de la inmersión puede codificarse mediante su *diagrama de Johansson*, formado por las preimágenes de las curvas y puntos singulares. Dicho diagrama contiene toda la información necesaria para reconstruir la 3-variedad, lo que permite estudiar su topología a partir de datos en la superficie. Aparecen naturalmente así cuestiones como, por ejemplo, cuándo dos diagramas producen variedades equivalentes o cómo calcular invariantes conocidos de 3-variedades como el grupo fundamental a partir de estos diagramas.

El presente trabajo tiene por objetivo que el estudiante se familiarice con las nociones básicas de las 3-variedades y estudie las superficies de Dehn y sus diagramas asociados, revisando la literatura fundamental sobre el tema, en particular los trabajos de J. M. Montesinos, I. Johansson y R. Vigara.

El desarrollo del trabajo incluirá la exposición de los resultados fundamentales junto con algunas aportaciones más recientes. Asimismo, se presentarán ejemplos ilustrativos que sirvan para visualizar los conceptos tratados y que permitan apreciar el alcance de estas representaciones dentro de la topología de 3-variedades.