

PROPUESTA DE TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Director: Alfonso Zamora Saiz (UPM)

Tutor UCM: Enrique Arrondo Esteban

Alumna: Alessia Pérez Daniel

Curso: 2025-2026

Título: Quiver representations and neural networks

Resumen: Las redes neuronales [4] son algoritmos de inteligencia artificial y aprendizaje automático que intentan reproducir el procesamiento de información del cerebro humano a través de nodos o neuronas dispuestas en capas, e interconectadas. Entrenadas con una gran cantidad de datos, su utilidad es cada día mayor para identificar patrones, clasificar grandes cantidades de datos y hacer predicciones futuras, en campos como el reconocimiento de imágenes o el procesamiento de lenguaje natural.

Recientemente, ha emergido una línea aplicada en la geometría algebraica que estudia redes neuronales modeladas como representaciones de un quiver, donde los nodos de la red son los vértices del quiver y las conexiones sus aristas, y los datos que se ponen sobre ella son espacios vectoriales y aplicaciones lineales. Redes neuronales de gran arquitectura y gran dimensión en cada espacio vectorial pueden entonces verse como puntos en un espacio de móduli de representaciones. Este móduli fue estudiado de forma pionera por [5] y posteriormente ha sido usado en múltiples aplicaciones de varios campos [6, 7]. Un mejor conocimiento de las propiedades geométricas de este espacio de móduli puede arrojar luz en el entendimiento de la información que proporcione el entrenamiento de una red neuronal y, por tanto, en la precisión y validez de sus predicciones.

En este TFM se propone estudiar el estado del arte de esta cuestión [1, 2, 3] e intentar abordar, en la medida de lo posible, las siguientes cuestiones:

- (a) Entender cómo el cálculo de la dimensión de un quiver moduli puede dar información sobre el tamaño del output de una red neuronal.
- (b) Entender cómo el cálculo de las componentes conexas de un quiver moduli puede dar información sobre la naturaleza del output de una red neuronal.
- (c) Estudiar si es posible adaptar el estudio de una red neuronal con funciones de activación ReLU (lineal a trozos) a otras no lineales como sigmoides.
- (d) Investigar el papel que las condiciones de estabilidad en la construcción de espacios de móduli de representaciones de un quiver puedan verse reflejadas en una red neuronal.
- (e) Aplicar estos conceptos a bases de datos reales [8, 9] para intentar establecer patrones (dimensión, componentes conexas).

Referencias

- [1] Armenta, M.; Jodoin, P.-M. The Representation Theory of Neural Networks. *Mathematics* 2021, **9**, 3216. <https://doi.org/10.3390/math9243216>
- [2] Armenta, M.; Brüstle, Th.; Hassoun, S.; Reineke, M.; *Double framed moduli spaces of quiver representations*, *Linear Algebra and its Applications*, **650** 98-131 (2022).
- [3] Ganev, I. Walters, R.; *Quiver neural networks*, Preprint, arXiv:2207.12773 (2022).
- [4] Goodfellow, I.; Bengio, Y.; Courville, A.; *Deep Learning*, MIT Press, (2016). <http://www.deeplearningBook.org>.
- [5] King, A.; *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, *Quarterly Journal of Mathematics*, **45** 515–530, (1994).
- [6] Reineke, M.; *Moduli of representations of quivers*, Trends in representation theory of algebras and related topics, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 589–637 (2008).
- [7] Reineke, M.; *Framed Quiver Moduli, Cohomology, and Quantum Groups*, *Journal of Algebra*, **320** 94–115, (2008).
- [8] Tong, P. *Cats and Dogs Dataset*, Kaggle, (2020). <https://www.kaggle.com/datasets/tongpython/cat-and-dog>.
- [9] Forina, M.; Leardi, R.; Lanteri, S.; Casale, M. *Wine Data Set*, In PARVUS – An Extendable Package for Data Exploration, Classification and Correlation, Institute of Pharmaceutical and Food Analysis and Technologies: Genoa, Italy, (1986). <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/wine>.