

PROPUESTA DE TRABAJO DE FIN DE MÁSTER  
MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

Director(es): Miguel García Bravo

Alumno(a): Álvaro Acitores Montero

Curso: Máster en Matemáticas Avanzadas

Título: Funciones meseta diferenciables en espacios de Banach

Resumen: Dado un espacio de Banach  $X$  se define función meseta como toda aquella función  $f:X \rightarrow \mathbb{R}$  que tiene un soporte acotado (el conjunto de puntos donde no vale cero es acotado). En general se sabe que en  $\mathbb{R}^n$  se pueden definir funciones meseta diferenciables y además teniendo soporte el conjunto abierto que se desee. Sin embargo, si uno trabaja con espacios de Banach de dimensión infinita, la existencia de funciones meseta diferenciables no siempre se da, y dependerá del espacio de Banach en cuestión. Por otro lado, en dimensión finita existe el Teorema de Rolle que nos dice que para toda función meseta diferenciable existirá un punto donde la función no se anula y que tiene derivada cero. De nuevo este resultado es falso en general cuando uno trabaja con espacios de Banach de dimensión infinita, aún poseyendo el espacio mesetas diferenciables.

Este TFM tiene por tanto varios objetivos que se pueden resumir en tres. El primero es que el alumno estudie la existencia de mesetas diferenciables en espacios de Banach, y qué posibles caracterizaciones de esta propiedad existen. En segundo lugar, se pide que el alumno desarrolle diferentes demostraciones sobre la falsedad del Teorema de Rolle cuando la dimensión del espacio sea infinita. Además, en los casos que sea posible, se intentará dar construcciones explícitas (y lo más sencillas posibles) de mesetas que no satisfacen el teorema de Rolle. Existen pocos ejemplos de este tipo en la literatura por lo que ser capaz de dar más tendría mucho interés. Un tercer objetivo, algo más abierto y que dependerá de los gustos del alumno, sería estudiar qué consecuencias tiene la existencia de mesetas diferenciables (por ejemplo, estas sirven como ayuda para encontrar aproximaciones diferenciables de funciones continuas), o bien estudiar en qué casos podemos controlar el soporte de las mesetas para hacerlo coincidir con el conjunto abierto que deseemos.

Este trabajo se engloba esencialmente en el campo del Análisis Funcional, y cualquiera con una buena base en esta asignatura y en Análisis en general puede desarrollarlo perfectamente. Muchos de los temas que se tratan en este TFM rozan preguntas aún abiertas, que se podrían estudiar en el futuro en una posible Tesis Doctoral.

**Referencias:**

- [1] D. Azagra and M. Jiménez-Sevilla, *The failure of Rolle's theorem in infinite-dimensional Banach spaces*, J. Funct. Anal. 182 (2001), 207-226.

- [2] R. Bonic and J. Frampton, *Smooth functions on Banach manifolds*, Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 15, No. 5, pp. 877-898, 1966.
- [3] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, vol. 64, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.
- [4] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos and Vicente V. Zizler, *Banach space theory: The basis for linear and nonlinear analysis*, Springer Science \& Business Media, 2011.
- [5] J. Ferrer, *Rolle's Theorem Fails in  $\mathbb{L}^2$* , The American Mathematical Monthly, Vol. 103, No. 2, pp. 161-165, 1996
- [6] P. Hajek and M. Johanis, *Smooth Analysis*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 19, 2014.