Notas y comentarios sobre Álgebra Lineal, curso 2019–20 (editadas en 2020–21)
que se apoyan en el libro de texto Merino–Santos

M. J. de la Puente Muñoz
Facultad de Matemáticas, UCM

16 de abril de 2021

Sobre geometría afín

Para tener un espacio afín, necesitamos tener un espacio vectorial y para ello necesitamos un cuerpo $\mathbb{K}$. La definición de espacio afín (que es algo técnica) viene a decir que

1. punto + vector = punto (lo que significa dos cosas equivalentes: (a) que trasladamos el primer punto mediante el vector, obteniendo el segundo punto, (b) que punto - punto = vector). Esto es lo que nos dice la función $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V$ (de la definición de Merino–Santos)
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ es una condición natural, llamada *relación de Chasles*, que viene a decir que para ir desde el punto A al punto C , podemos pasar antes en el punto B .

Todo lo que se define en un espacio afín $\mathcal{A}$ hace referencia (antes o después) a su espacio vectorial V asociado: por ejemplo, la dimensión. Hay algunas similitudes y algunas diferencias entre lo afín y lo vectorial. Los elementos de un espacio afín se llaman *puntos*. En un espacio vectorial hay un vector especial: el vector cero. En cambio, en un espacio afín esto no ocurre, y por eso se dice que un espacio afín es *homogéneo*: no hay puntos con propiedades especiales. En un espacio vectorial un vector no nulo determina una recta y recíprocamente (dim 1), dos vectores li determinan un plano y recíprocamente (dim 2), etc. En un espacio vectorial tenemos las nociones de independencia lineal y de base. En cambio, en un espacio afín, dos puntos distintos determinan una recta y recíprocamente (dim 1), tres puntos no alineados determinan un plano y recíprocamente (dim 2), etc. Tenemos las nociones de *independencia afín* y de *sistema de referencia*. Hay dos tipos de sistemas de referencia: los *cartesianos* y los *afines* (o *baricéntricos*).

En este curso vamos a usar los *sistemas de referencia cartesianos* (por ser los más parecidos a las bases) y dentro de los cartesianos, los *rectangulares* (con base ortonormal). Dar un sistema de referencia cartesiano consiste en dar un punto (del espacio afín) y una base (del espacio vectorial asociado).

En un espacio vectorial hacemos combinaciones lineales de vectores (donde los coeficientes pueden ser escalares cualesquiera). En un espacio afín hacemos *combinaciones afines de puntos* (donde los coeficientes deben sumar uno; si no suman uno, lo que sale no es un punto, no es nada reconocible).

Por ejemplo, todos sabemos que el punto medio M de un segmento (determinado por dos puntos A y B en $\mathbb{K}^n$) está dado por la semisuma de las coordenadas de A y B : vemos que M es combinación afín de A y B ya que $1/2 + 1/2 = 1$. Otro ejemplo: el punto $3A/4 + B/4$ está en el segmento que une A y B , más cerca de A que de B . Otro ejemplo: ¿dónde está el punto $6A/5 - B/5$ en la recta que une A y B ?

Todos sabemos que el *baricentro* G (o *centro de gravedad*) de un triángulo (determinado por tres puntos A, B, C en $\mathbb{K}^n$ no alineados) está dado por $(A + B + C)/3$: vemos que G es combinación afín de A, B, C ya que $1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$. Todo punto P del plano determinado por A, B, C se obtiene mediante combinación afín de A, B, C con coeficientes $a, b, c \in \mathbb{K}$ tales que $a + b + c = 1$; i.e., $P = aA + bB + cC$.

Mirad aquí: https://en.wikipedia.org/wiki/Affine_space

Vamos a hablar de la *suma de subespacios afines*. Pensad en el plano S del suelo de la habitación donde estáis (plano afín) y la recta T que contiene el tubo fluorescente del techo (recta afín). Imaginad además que vivís en un espacio afín $\mathcal{A}$ 4-dimensional ¿Cuál es el mínimo subespacio afín de $\mathcal{A}$ que contiene al suelo y a la recta T ? Dicho subespacio afín se denota $S + T$. Observad que si consideramos un punto P del suelo y un punto Q de la recta T , el vector $\overrightarrow{PQ}$ que los une estará en la dirección de $S + T$. Ahora tomamos un punto concreto del suelo, por ejemplo $A \in S$, y uno concreto de la recta, por ejemplo $B \in T$. Tengo $S = A + \text{dir}(S)$, $T = B + \text{dir}(T)$ y $S + T = A + \text{dir}(S) + \text{dir}(T) + L(\overrightarrow{AB})$ y por tanto la dirección de $S + T$ es $\text{dir}(S) + \text{dir}(T) + L(\overrightarrow{AB})$.

La *fórmula de Grassmann en caso afín* solo es válida (luego aplicable) en el caso de que los subespacios afines dados tengan intersección no vacía.

Ahora, hallad los subespacios suma para las parejas del ejemplo de abajo, comprobando las dimensiones.

Pregunta: ¿todo punto de un espacio afín se puede escribir como combinación afín de otros siempre y cuando sus coeficientes sumen uno?

Respuesta: dado un espacio afín $\mathcal{A}$ de dimensión finita n y dados ahí $n + 1$ puntos $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ afinmente independientes, cada punto P de dicho espacio se expresa, de modo único, como combinación afín de ellos, i.e., para P existen únicos escalares $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ y

$$P = a_0 A_0 + a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n$$

Esto es así porque los vectores $\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}$ —que están el espacio vectorial V asociado a $\mathcal{A}$ —, son n y son li, luego forman una base de V y por ello el vector $\overrightarrow{A_0 P}$ se expresa, de modo único, como combinación lineal de esa base, i.e., existen únicos escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\overrightarrow{A_0 P} = a_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + a_2 \overrightarrow{A_0 A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_0 A_n}$$

Entonces ¿quién es a_0 ? Pues sencillamente $a_0 = 1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n$.

Una idea clave es que, cada vez que fijamos un punto en un espacio afín $\mathcal{A}$ y construimos vectores con origen en ese punto, lo que aparece es el espacio vectorial asociado V . Es lo que hemos hecho arriba, con el punto A_0 . Ahora bien, el punto que fijemos puede ser cualquiera (porque un espacio afín es homogéneo).

Esto es lo que solemos hacer: pasar tan pronto como nos es posible de $\mathcal{A}$ al espacio vectorial V , que consideramos terreno más cómodo.

La *historia de la geometría afín* (en tres pinceladas) se remonta a *Euclides* (s III AC), que en su libro I de *LOS ELEMENTOS* define:

- punto es aquello que no tiene partes,
- recta es longitud sin anchura.

Euler en 1748 en el capítulo XVII de *INTRODUCTIO IN ANALYSIS INFINITORUM*, introduce el término latino *affinis* (que significa emparentado o similar).

En 1827 *Möbius*, en el capítulo 3 de su tratado *DER BARYCENTRISCHE CALCUL* introduce las nociones fundamentales, tal y como las conocemos hoy.

Vamos a trabajar sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ e introducir el *espacio afín euclídeo*, que es un espacio afín $\mathcal{A}$ dotado de una *distancia* (que proviene de una norma, que a su vez proviene de un producto escalar en el espacio vectorial V asociado a $\mathcal{A}$):

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

para todo par de puntos $A, B \in \mathcal{A}$.

Una distancia cumple tres propiedades que debéis aprender (subsec. 1.1, pag. 294)

Cuando trabajamos en el espacio afín euclídeo, los sistemas de referencia más útiles se llaman *sistemas de referencia rectangulares* y se definen como aquellos que incluyen una base ortonormal.

Vamos a decir que dos subespacios afines son *perpendiculares* si la dirección de uno está contenido en el perpendicular de la dirección del otro, o al revés.

Una vez tenemos la distancia entre dos puntos, queremos definir y calcular (a) distancia entre punto y subespacio afín y (b) distancia entre dos subespacios afines.

Para ello necesitamos definir la *proyección ortogonal de un punto sobre un subespacio afín* (subsección 1.9, pag.s 302 y 303). Si el punto es B y el subespacio afín es L , la proyección ortogonal de B sobre L se denota $p_L(B)$. Lógicamente vamos a obtener que la distancia entre B y L es la distancia entre dos puntos, que son, B y su proyección sobre L . (subsec. 1.10, pag. 304).

Definimos la *distancia entre dos subespacios afines* L_1, L_2 de un espacio afín euclídeo $\mathcal{A}$ como el mínimo de las distancias $d(A_1, A_2)$ donde A_1 recorre L_1 y A_2 recorre L_2 . Demostramos que ese mínimo es igual a $d(A_1, L)$ donde $A_1 \in L_1$ es un punto cualquiera de L_1 y L es el mínimo subespacio afín que (a) contiene a L_2 y (b) es paralelo a L_1 . Esto es $d(L_1, L_2) = d(A_1, L)$. Y ocurre que los papeles de L_1 y L_2 son intercambiables.

Vamos a ver que esto tiene pleno sentido en unos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1: Consideramos dos rectas paralelas L_1, L_2 en el plano (i.e., $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 = V$). Todos sabemos (por sentido común, sin haber estudiado geometría afín) dos cosas: (a) que tomado un punto $A_1 \in L_1$, calculando la recta r perpendicular a ambas que pasa por A_1 , el punto de intersección de r y L_2 existe (llamémoslo A_2) y $d(L_1, L_2) = d(A_1, A_2)$ y (b) que la distancia anterior no depende del punto A_1 elegido: es decir si tomamos A'_1 en L_1 , calculando la recta r' perpendicular a ambas que pasa por A'_1 , el punto de intersección de r' y L_2 existe (llamémoslo A'_2) y $d(A'_1, A'_2) = d(L_1, L_2) = d(A_1, A_2)$.

Ejemplo 2: Consideramos dos rectas que se cruzan L_1, L_2 en el espacio $\mathbb{R}^3$: por ejemplo, la recta del tubo fluorescente del techo y la recta de una escoba tirada en el suelo. Todos sabemos (por sentido común, sin haber estudiado geometría afín) que existen un único punto A_1 en L_1 y un único punto A_2 en L_2 tales que la distancia $d(A_1, A_2)$ es menor que $d(A'_1, A'_2)$ para otros puntos $A'_1 \in L_1$ y $A'_2 \in L_2$.

Ejemplo 3: Consideramos recta y plano L_1, L_2 paralelos en el espacio $\mathbb{R}^3$: por ejemplo, la recta del tubo fluorescente del techo y el suelo. Todos sabemos (por sentido común, sin haber estudiado geometría afín) que existen infinitas rectas contenidas en L_2 y paralelas a L_1 , y que entre todas ellas, hay una única recta r que minimiza la distancia con L_1 . En este caso tendremos $d(L_1, L_2) = d(L_1, r)$ y este cálculo se reduce al ejemplo 1.

¿Cómo se armonizan los tres ejemplos? Como sigue: en L_1 tomamos un punto cualquiera, llamémoslo A_1 , y además tomamos $L = L_2 + \text{dir } L_1$ (que es el mínimo subespacio afín que contiene a L_2 y es paralelo a L_1) y ahora calculamos la distancia punto-subespacio $d(A_1, L)$ y

se comprueba que (a) $d(A_1, L)$ no depende del punto A_1 elegido en L_1 , (b) $d(A_1, L) \leq d(A'_1, A'_2)$ para todos $A'_1 \in L_1$ y $A'_2 \in L_2$, luego $d(A_1, L)$ es $d(L_1, L_2)$.
 ¿Quién es L en cada uno de los ejemplos? Ejemplos 1 y 3: $L = L_2$, ejemplo 2: L es el suelo.

Respecto a la distancia punto–subespacio afín, veamos el caso particular en que L es un hiperplano (i.e., subespacio de dim $n - 1$ en un ambiente de dimensión n). Si, respecto de cierto sistema de referencia rectangular, la ecuación de L es $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ y las coordenadas del punto B son $(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ entonces la *fórmula de Lagrange* (Boyer p. 518) nos dice que

$$d(B, L) = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n + a|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

Es fácil de recordar: en el numerador se toma el valor absoluto del resultado de evaluar la ecuación de L en el punto B , y en el denominador se toma la norma del vector $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ (que es perpendicular a L). Evidentemente, si B pertenece a L , esta fórmula da cero. En Merino–Santos (sec. 1.12, pag. 306) aparece el caso particular de dimensión 2, pero la fórmula es válida en cualquier dimensión. (Ejercicio: demuestra esta fórmula).

Resumiendo lo anterior: hemos definido

1. Distancia entre dos puntos (norma de vector)
2. Distancia entre punto y subespacio afín
3. Distancia entre dos subespacios afines.

Observaciones:

1. Cada punto de arriba generaliza al punto anterior
2. Si dos subespacios se intersecan, entonces la distancia entre ellos es nula.

El tema que abordamos ahora es *aplicaciones afines* (sec. 2.1, 2.2, pag. 311 a 314). Al igual que no hay espacio afín sin un espacio vectorial que esté “ahí debajo”, no hay aplicación afín sin una aplicación lineal que esté “ahí debajo”. Esto explica la expresión

$$\vec{f}(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{f(O)f(X)}.$$

En un principio, el punto O es un punto concreto mientras que el punto X es arbitrario, pero en seguida se demuestra que lo anterior es válido para todo par de puntos $O, X \in \mathcal{A}$. Esto es así por la homogeneidad del espacio afín (i.e., ningún punto tiene propiedades especiales).

Debemos pensar lo siguiente:

1. El espacio afín es más natural, y más adecuado para las aplicaciones, que el espacio vectorial. ¿Qué aplicaciones? Cálculo de distancias, ángulos, áreas, volúmenes, traslaciones y otros movimientos de objetos en el plano y el espacio (y, en general, en $\mathbb{K}^n$) etc. Es más natural porque no hay un punto que tenga propiedades especiales y que por ello merezca ser llamado “el origen” (en sentido absoluto). Y es natural que distintos observadores adopten, en sus mediciones, distintos sistemas de referencia; esto es, un origen (el que cada uno elija) y una base del espacio vectorial asociado (la que cada uno elija). Como vimos en espacios vectoriales, la posibilidad de elegir base tiene ventajas. Por ello, es necesario saber cambiar de un sistema de referencia a otro.
2. Un movimiento muy sencillo es trasladar mediante un vector dado. Pero ¡una traslación no es una aplicación lineal!, ya que no envía el cero en sí mismo.

Esto, por sí solo, es una justificación suficiente para introducir el espacio afín: queremos y necesitamos hablar de *traslaciones*. Otra transformación muy sencilla es una *homotecia* de centro cualquier punto. Pero, las homotecias lineales (que hemos visto ya) tienen por centro al vector cero. Esto es otra buena razón para introducir el espacio afín: queremos y necesitamos hablar de homotecias de centro arbitrario.

3. Adelantando acontecimientos, nuestra definición (ligeramente distinta a como lo presenta el libro Merino–Santos) de movimiento es una aplicación afín (de un espacio afín real en sí mismo) tal que su aplicación lineal asociada es una isometría. Por tanto, los movimientos conservan distancias y ángulos —y con ello, conservan áreas y volúmenes—, si bien pueden respetar o invertir el sentido.
4. Volviendo a una aplicación afín f arbitraria, se demuestra que sus propiedades dependen casi totalmente de las propiedades de su aplicación lineal asociada $\vec{f}$. Por ejemplo:
 - a) f inyectiva si y sólo si $\vec{f}$ inyectiva,
 - b) f suprayectiva si y sólo si $\vec{f}$ suprayectiva,
 - c) f biyectiva si y sólo si $\vec{f}$ biyectiva,
 - d) la composición de aplicaciones afines es afín,
 - e) la inversa de una aplicación afín f biyectiva es afín,
 - f) la imagen de un subespacio afín mediante un aplicación afín f es un subespacio afín de dimensión menor o igual —puede haber caída de dimensión—,
 - g) la imagen inversa de un subespacio afín mediante un aplicación afín f es, o bien el vacío, o bien un subespacio afín de dimensión mayor o igual—puede haber aumento de dimensión—. Lo anterior tiene que ver, cómo no, con la dimensión de $\ker \vec{f}$.
5. Una aplicación afín f 1) transforma puntos alineados en puntos alineados, 2) conserva el paralelismo de subespacios afines, tanto por imagen directa como por imagen inversa.
6. En pocas palabras: una aplicación afín es aquella que conserva la alineación de puntos y el paralelismo. (También conserva la *razón simple* de tres puntos alineados, pero esta noción no la vamos a estudiar).
7. Ver texto y dibujos es <https://en.wikipedia.org/wiki/Affinetransformation>

Continuamos el estudio de las aplicaciones afines, y nos centramos en aquellas f que van de un espacio afín $\mathcal{A}$ en sí mismo (por tanto $\vec{f}$ es un endomorfismo del espacio vectorial V asociado —aquí vamos a usar todo lo que sabemos sobre endomorfismos: valores propios, vectores propios, subespacios propios, etc. Hemos visto que para una tal aplicación afín es interesante conocer el conjunto de puntos fijos, denotado $\text{Fix}(f)$. Se demuestra fácilmente que $\text{Fix}(f)$ es vacío o es un subespacio afín (ejercicio). (Ejemplos: $\text{Fix}(f)$ es vacío si f es traslación, $\text{Fix}(f)$ es un punto, si f es homotecia). Hemos visto que puede haber subespacios afines invariantes (que son, por definición, los subespacios L de $\mathcal{A}$ tales que $f(L) \subseteq L$). (Ejemplo: si f homotecia de centro F , cada recta r que pasa por F es invariante). En general, para entender una aplicación afín $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, lo que se hace es calcular $\text{Fix}(f)$ y todos los subespacios invariantes (que pueden ser muchos). Pero, de entre todos ellos, hay uno que es el más importante. Se denotará $\text{Inv}(f)$ y tiene la siguiente expresión

$$(A - I)^2 X + (A - I)C = 0$$

donde $C + AX = Y$ es la expresión matricial de f . Observemos que $\text{Fix}(f)$ tiene la siguiente expresión

$$(A - I)X + C = 0$$

En general, $\text{Fix}(f)$ e $\text{Inv}(f)$ son subespacios afines distintos.

Todo ello lo vamos a estudiar en el caso de que f sea un *movimiento* (que, por definición, es aplicación afín de un espacio en sí mismo tal que $\vec{f}$ es isometría—luego $\vec{f}$ conserva el producto escalar, lo que significa que $\vec{f}$ conserva normas de vectores, cosenos de ángulos entre vectores y también conserva perpendicularidad—) Esto implica que un movimiento conserva distancias entre puntos, cosenos de ángulos y perpendicularidad. Todo esto está explicado en Merino–Santos secciones 2.3 y 2.4 pag.s 314 a 317. El paso siguiente será clasificar (es decir, entender totalmente) los movimientos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Volvamos al misterioso subespacio invariante $\text{Inv}(f)$, cuando f es un movimiento. Si nos fijamos bien, observaremos que, para cada punto P de $\text{Inv}(f)$ tenemos que los puntos

$$P, f(P), f^2(P), f^3(P), \dots$$

están alineados y equidistantes (como las marcas de una regla graduada). Esto es así porque el vector $\overrightarrow{Pf(P)}$ es fijo para $\vec{f}$, y también lo es el vector $\overrightarrow{f(P)f^2(P)}$ (por idéntica razón), etc.

Vamos a comprender la tabla de clasificación de los movimientos de $\mathbb{R}^2$ (se puede descargar de mi página web antigua; hay una tabla en Merino–Santos pag. 318, sec. 2.5, pero es excesivamente escueta).

Lo primero que hacemos es considerar la expresión matricial de un aplicación afín f respecto de un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$. Es útil expresar la matriz de f (respecto de $\mathbb{R}$ tanto en espacio de salida como de llegada) como producto de dos matrices, donde la de la izquierda corresponde a una traslación de vector C y la de la derecha corresponda a $\vec{f}$ —la cual, por ser lineal, transforma el vector cero en sí mismo—. La descomposición de la matriz de f en ese producto nos dice que f es la composición de $\vec{f}$ seguido de t_C (el orden en que actúan estas dos aplicaciones es relevante: primero actúa $\vec{f}$).

Recordemos que un movimiento es una aplicación afín f de un espacio en sí mismo tal que la aplicación lineal $\vec{f}$ es una isometría. Si la base $\mathcal{B}$ (del espacio vectorial V asociado) que hemos escogido es ortonormal, entonces la matriz A (de $\vec{f}$ respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}$) es ortogonal (i.e., $AA^T = I = A^T A$ y $\det(A) = 1$ ó -1).

Para comprender cómo actúa (¿qué hace?) un movimiento f calculamos dos cosas: (a) familia de puntos fijos $\text{Fix}(f)$ —que, si no es el conjunto vacío, constituye un subespacio afín— y (b) $\text{Inv}(f)$, que, en el caso de dimensión 2, se puede probar que es no vacío (esto se deduce de que $\text{rg}(A - I)^2 = \text{rg}(A - I)$ cuando A es ortogonal de orden 2 y del uso de lema en Merino–Santos pag. 317); este es el subespacio afín invariante más importante de f , por ser el mayor.

En virtud de lo anterior y teniendo en cuenta las ecuaciones de $\text{Fix}(f)$ y las de $\text{Inv}(f)$, los casos surgen de considerar todos los valores posibles de $\det(A)$, $\text{rg}(A - I)$ y $\text{rg}(A - I|C)$. En efecto, si $\det(A) > 0$ entonces $\vec{f}$ —y también el movimiento f — conserva la orientación y, en caso contrario, la invierte. Si $\text{rg}(A - I) = \text{rg}(A - I|C)$ entonces el SLNH cuyo conjunto de soluciones es $\text{Fix}(f)$ es compatible, i.e., hay puntos fijos para f . En caso contrario, $\text{Fix}(f)$ es vacío.

Hay que tener en cuenta que, por lo que sabemos de matrices ortogonales de orden 2, la matriz A es igual a R_α ó S_α , y sus entradas son $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$.

La tabla presenta 5 casos, empezando por los más complejos y terminando por el más simple (que es $f = \text{id}$). Explico, en un par de casos, cómo entender la tabla.

En la fila 1, por ejemplo, tenemos $2 = \text{rg}(A - I) = \text{rg}(A - I|C)$ luego $\text{Fix}(f)$ es no vacío y tiene dimensión $2 - 2 = 0$, luego hay un único punto fijo para f . Las coordenadas de dicho punto se han calculado y aparecen en la tabla como x_0, y_0 . En este caso $\vec{f}$ es una rotación (de centro el vector cero) f también es una rotación de centro $(x_0, y_0)^T$.

En la fila 2, por ejemplo, tenemos $1 = \text{rg}(A - I)$ pero $2 = \text{rg}(A - I|C)$, luego $\text{Fix}(f)$ es vacío y no hay puntos fijos para f . En este caso, $\text{Inv}(f)$ tiene dimensión $2 - 1 = 1$, ya que, hemos dicho que ocurre $\text{rg}(A - I)^2 = \text{rg}(A - I) = 1$ —y que esto garantiza $\text{rg}((A - I)^2|(A - I)C) = 1$ es SLNH compatible indeterminado con un grado de libertad. Luego $\text{Inv}(f)$ es una recta afín que queda fija (o invariante), que hemos llamado E , y cuya ecuación hemos simplificado y anotado en la tabla. Si tomamos un punto P de E y calculamos el vector $w = \overrightarrow{Pf(P)}$ sale el mismo, independientemente de cual sea P . Hemos calculado w y lo hemos anotado en la tabla. Y comprobamos que w es paralelo a E . Ahora ¿qué es f ? Decimos que f es una *simetría deslizante*, i.e., f es el resultado de componer una traslación con una simetría sobre una recta. La traslación es t_w y la simetría es s_E y, gracias al paralelismo $w \parallel E$, tenemos conmutatividad, i.e., es lo mismo aplicar t_w seguido de s_E que aplicar s_E seguido de t_w . OBS: en general, si tomamos una recta afín E y un vector w no paralelo a E , tenemos que $t_w \circ s_E$ es distinto de $s_E \circ t_w$. Ejercicio: busca un ejemplo concreto. Los otros 3 casos se razonan de manera parecida y conviene recordar todos ellos.

Mirad con detalle el caso particular explicado en la parte baja de la tabla: la aplicación *antipodal* con punto fijo F es lo mismo que una homotecia con centro F y razón -1. También se puede llamar simetría sobre el punto F .

OBS 1: si f es rotación entonces $\vec{f}$ también es rotación: lo único que las distingue es el centro de rotación.

OBS 2: si f es simetría sobre recta afín E entonces $\vec{f}$ también es simetría sobre recta ¿qué recta? La dirección de E .

OBS 3: si f es simetría deslizante sobre la recta E , entonces $\vec{f}$ es simetría sobre la recta dir E .

En general, casi toda la información de f está en $\vec{f}$; en otras palabras, f es $\vec{f}$ y algo más. Ejemplo visual: si vamos caminando con paso fijo w , manteniendo nuestros pies a derecha e izquierda y equidistantes de una recta E , los diversos puntos de las plantas de nuestros pies van moviéndose (por el plano del suelo, que es $\mathbb{R}^2$) según una *simetría deslizante* f , que se repite una y otra vez.

Vamos a clasificar los movimientos en $\mathbb{R}^3$, de modo parecido a como hicimos con los movimientos de $\mathbb{R}^2$. Encontraréis tabla en mi vieja página web; hay una tabla en Merino–Santos pag. 319, sec. 2.6, pero es excesivamente escueta). También encontrareis ejercicio 199 en dicho fichero.

Tenemos que tener presente la clasificación de isometrías de $\mathbb{R}^3$.

Lo primero que hacemos es considerar la expresión matricial de un aplicación afín f respecto de un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$. Es útil expresar la matriz de f (respecto de $\mathcal{R}$ tanto en espacio de salida como de llegada) como producto de dos matrices, donde la de la izquierda corresponde a una traslación de vector C y la de la derecha corresponda a $\vec{f}$ —la cual, por ser lineal, transforma el vector cero en sí mismo—. La descomposición de la matriz de f en ese producto nos dice que f es la composición de $\vec{f}$ seguido de t_C (el orden en que actúan estas dos aplicaciones es relevante: primero va $\vec{f}$)

Recordemos que un movimiento es una aplicación afín f de un espacio en sí mismo tal que la aplicación lineal $\vec{f}$ es una isometría. Si la base $\mathcal{B}$ (del espacio vectorial V asociado) que hemos escogido es ortonormal, entonces la matriz A (de $\vec{f}$ respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}$) es ortogonal (i.e., $AA^T = I = A^T A$ y $\det(A) = 1$ ó -1).

Para comprender cómo actúa (¿qué hace?) un movimiento f calculamos dos cosas: (a) familia de puntos fijos $\text{Fix}(f)$ —que, si no es el conjunto vacío, constituye un subespacio afín— y (b) $\text{Inv}(f)$, que, en el caso de dimensión 3, se puede probar que es no vacío (esto se deduce de que $\text{rg}(A - I)^2 = \text{rg}(A - I)$ cuando A es ortogonal de orden 3 y del uso de lema en Merino–Santos pag. 317); este es el subespacio afín invariante más importante de f , por ser el mayor.

En virtud de lo anterior y teniendo en cuenta las ecuaciones de $\text{Fix}(f)$ y las de $\text{Inv}(f)$, los casos surgen de considerar todos los valores posibles de $\det(A)$, $\text{rg}(A - I)$ y $\text{rg}(A - I|C)$. En efecto, si $\det(A) > 0$ entonces $\vec{f}$ —y también el movimiento f — conserva la orientación y, en caso contrario, la invierte. Si $\text{rg}(A - I) = \text{rg}(A - I|C)$ entonces el SLNH cuyo conjunto de soluciones es $\text{Fix}(f)$ es compatible, i.e., hay puntos fijos para f . En caso contrario, $\text{Fix}(f)$ es vacío.

La tabla presenta 7 casos, empezando por los más complejos y terminando por el más simple (que es $f = \text{id}$).

Dice Wikipedia que la curiosidad es algo natural que le sucede a los seres humanos y a los animales, especialmente a los individuos más jóvenes. Y también esto: La curiosidad es el deseo de ver, averiguar o saber alguna cosa por parte del ser humano y otros seres vivos. Engendra la exploración, la investigación, y el aprendizaje. O esto otro: La curiosidad es hija de la ignorancia y madre de la ciencia. La cura para el aburrimiento es la curiosidad. No existe cura para la curiosidad.