Ejemplos sobre Álgebra Lineal, Cap 2, curso 2019–20 (editadas en 2020–21) que se apoyan en el libro de texto Merino–Santos

M. J. de la Puente Muñoz
Facultad de Matemáticas, UCM

18 de mayo de 2021

Ejemplo 1: Vamos a demostrar que la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+1 \\ x-z \\ x+y+z-1 \\ x+2y+3z+2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

es afín. Para ello debemos encontrar su aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$ que, todo parece indicar que es $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

Comprobemos que, cualesquiera que sean puntos $X, X' \in \mathbb{R}^3$, se tiene $\overrightarrow{f(X)f(X')} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{XX'})$. Sean $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ la matriz del enunciado, $C \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ el vector columna del enunciado, y sean $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, las coordenadas de X, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ las coordenadas de X'.[1] Entonces

(3)

$$\overrightarrow{f(X)f(X')} = f(X') - f(X) = C + A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \left(C + A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = A \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{XX'}).$$

Lo mejor es que, en cierto sentido, *todas las aplicaciones afines son así:*

$$f(X) = C + AX.$$

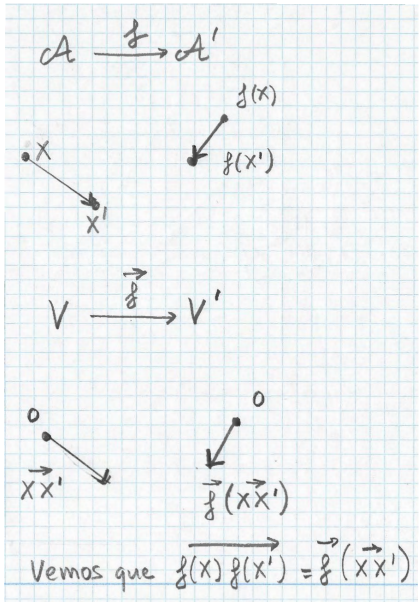
¿Cómo así? Una vez que hayamos fijado sistemas de referencia en los espacios de salida y llegada.

Ejemplo 2: $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 = V$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(X) = C + X$, donde $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ coord de punto arbitrario $X \in \mathbb{R}^2$. Se trata de una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es la identidad. ¿Qué es f? Claramente f es la *traslación* en $\mathbb{R}^2$ de vector $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, ya que $f(X) = C + X$ (¡vector mas punto es punto!) y escribimos $f = t_C$.

Decíamos que *todas las aplicaciones afines son de la forma $f(X) = C + AX$, lo que significa que una aplicación afín se pueden interpretar, en cierto sentido, como una aplicación lineal seguida de una traslación.*

Definición: una *traslación* es una aplicación afín de un espacio afín $\mathcal{A}$ en sí mismo tal que la apicación lineal asociad es la identidad.

[1] respecto del sistema de ref. canónico de $\mathbb{R}^3$, por defecto.



Definición: si f es una aplicación afín de un espacio afín $\mathcal{A}$ en sí mismo, los puntos fijos de f son aquellos $X \in \mathcal{A}$ tales que $f(X) = X$. El conjunto de puntos fijos se denota $\mathrm{Fix}(f)$ y es importante conocerlo para entender f (del mismo modo que es importante conocer los vectores fijos de un endomorfismo, o más generalmente, conocer los autovectores.)

Ejemplo 3: $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 = V$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(X) = C + 4X$, donde $C = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ coord de punto arbitrario X. Se trata de una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es la identidad multiplicada por 4 (luego f no es una traslación.) ¿Qué es f? Vamos a calcular $\mathrm{Fix}(f)$:

$$f(X) = X \Leftrightarrow \begin{cases} -9 + 4x = x \\ -6 + 4y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Así, f es *homotecia* de razón 4 y centro $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En general, una *homotecia* de centro $F \in \mathbb{K}^n$ y razón $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 1$, se define como la aplicación afín $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ dada por $X \mapsto C + aX$, donde $C = (1-a)F$. ¿Por qué esta defición? Se comprueba que f tiene un único punto fijo:

$$f(X) = X \Leftrightarrow C + aX = X \Leftrightarrow \tag{5}$$

$$0 = X - (C + aX) = C + (1-a)X = (1-a)F + (1-a)X = (1-a)(F - X) \tag{6}$$

de donde, usando que $a \neq 1$, deducimos $0 = F - X$, i.e., $F = X$, es decir, *el único punto fijo de f es F*. A nivel lineal, lo que hace $\vec{f}$ es multiplicar por a. Escribimos $f = h_{F,a}$.

Ejercicio: Demuestra que una traslación no tiene puntos fijos.

Ejemplo 1: $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 = V$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(X) = C + AX$, donde $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ coord de punto arbitrario $X \in \mathbb{R}^2$. Se trata de una aplicación afín.

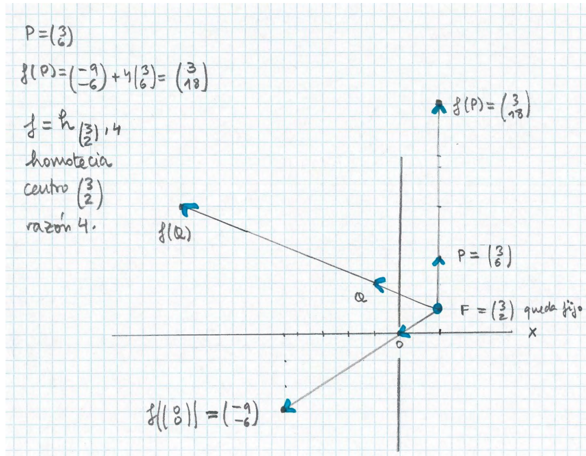


FIGURA 1. Homotecia en el plano afin.

¿Cómo actúa f? Hacer una representación gráfica. Veamos si f tiene puntos fijos:

$$(7)\quad C + AX = X \Leftrightarrow C + (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + x + y = 0 \\ 5 + 4x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8/5 \\ -7/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ pt. fijo}$$

Vamos a hallar las imágenes de algunos puntos y rectas: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(P_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $f(P_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $f(P_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Comprobamos que los puntos P_1, P_2, P_3 alineados (sobre recta $M : x = 0$) y por tanto los puntos $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ alineados (sobre recta $y = 5$, que es $f(M)$). ¿ Imagen de la recta $L : x = -8/5$?

$$(8)\qquad f\left(\begin{pmatrix} -8/5 \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = C + A\begin{pmatrix} -8/5 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 + \alpha \\ -7/5 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -7/5 \text{ ec. de } f(L)$$

Vemos que $M \| L$ y $f(M) \| f(L)$

Comprobar que $\frac{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|}{\|\overrightarrow{P_1P_3}\|} = \frac{\|\overrightarrow{f(P_1)f(P_2)}\|}{\|\overrightarrow{f(P_1)f(P_3)}\|}$. En ambos casos el valor es $2/3$.

¿Es f inyectiva? Est equivale a que $\overrightarrow{f}$ sea inyectiva; pero

$$(9)\qquad \det A = -4 \neq 0 \Leftrightarrow 2 = \operatorname{rk} A = \dim \operatorname{im} \overrightarrow{f} = 2 - \dim \ker \overrightarrow{f} \Leftrightarrow 0 = \dim \ker \overrightarrow{f}$$

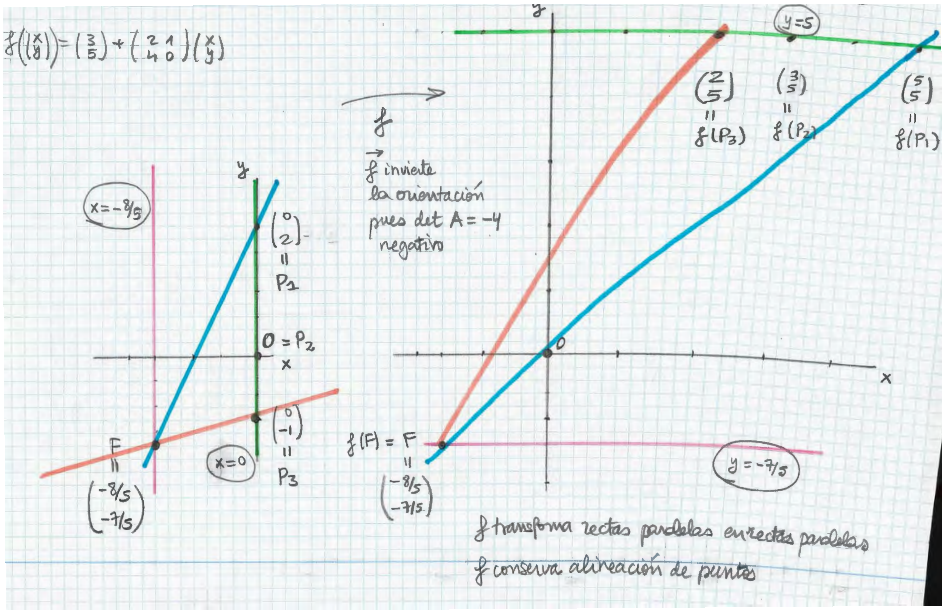
luego $\overrightarrow{f}$ inyectiva.

Hallar la imagen inversa por f de la recta $T : \begin{cases} x' = 1 + \beta \\ y' = 2 + \beta, \quad (\beta \in \mathbb{R}) \end{cases}$ *y su dimensión.*

$$(10)\quad f^{-1}(T) : \begin{pmatrix} 1 + \beta \\ 2 + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x + y \\ 5 + 4x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 = \beta \\ 4x + 3 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y + 2 = 4x + 3$$

luego $2x - y + 1 = 0$ es una ecuación de $f^{-1}(T)$ y su dimensión es 1 (no hay ganancia de dimensión por imagen inversa, pues f inyectiva)

¿Conserva $\overrightarrow{f}$ la orientación? Como $\det A$ es negativo, entonces $\overrightarrow{f}$ invierte la orientación.



Ejemplo 2: Para la aplicación afín anterior $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+1 \\ x-z \\ x+y+z-1 \\ x+2y+3z+2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

se pide

1. dimensión y ecuaciones de $\operatorname{im} f$,
2. coordenadas de un punto $P \in \mathbb{R}^4$ cuya imag inversa por f sea vacía
3. ¿existe algún subespacio afín T de $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim f^{-1}(T) > \dim(T)$? Razonar la respuesta.

Solución: Observamos que $\overrightarrow{f}$ no puede ser suprayectiva ya que

$$\dim \operatorname{im} \overrightarrow{f} = \operatorname{rk} A \leq \text{mín}\{3,4\} \leq 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4 \tag{12}$$

luego f no puede ser suprayectiva. Observemos que $\operatorname{rk} A = 3$ (cálculo sencillo, con M. Gauss) luego $\dim \ker \overrightarrow{f} = 3 - \operatorname{rk} A = 0$, de donde $\overrightarrow{f}$ y f ambas inyectivas. (Esto no me lo han pedido, pero conviene saberlo).

1. Hemos visto que $\operatorname{rk} A = 3$. Escribimos unas ecuaciones paramétricas de $\operatorname{im} f$ e, imponiendo una condición de rango, llegamos a lo siguiente

$$\operatorname{im} f : 0 = \det \begin{pmatrix} x'-1 & 1 & 1 & 0 \\ y' & 1 & 0 & -1 \\ z'+1 & 1 & 1 & 1 \\ t'-2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = y' - 2z' + t' - 4 \tag{13}$$

es una ecuación impl de $\operatorname{im} f$, subespacio de dimensión 3 (i.e., $\operatorname{im} f$ es un hiperplano afín de $\mathbb{R}^4$).

2. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{im} f$, luego la imagen inversa de este punto por f es vacía.
3. Sabemos que $\dim T = \dim \operatorname{dir} T$ y $\dim f^{-1}(T) = \dim \operatorname{dir} f^{-1}(T)$, luego trasladamos la pregunta a los subespacios de dirección, que son subespacios vectoriales y a la aplicación lineal $\overrightarrow{f}$. Ahora nos damos cuenta de que para que la dimensión de la imagen inversa por $\overrightarrow{f}$ de un subespacio vectorial $W \subseteq \mathbb{R}^4$ sea mayor que la dimensión de W es preciso que $\ker \overrightarrow{f}$ sea mayor que $\{0\}$. Esto no ocurre en nuestro ejemplo, luego la respuesta es NO. (Más concretamente, todos los vectores que estén en $\ker \overrightarrow{f}$ se transforman en cero, esto es se "pierden al aplicarles $\overrightarrow{f}$". El tamaño de $\ker \overrightarrow{f}$ es responsable del posible aumento de dimensión por imagen inversa, y de la posible caída de dimensión por imagen directa, tanto de $\overrightarrow{f}$ como de f).

DATOS: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ afín tal que (a) cada recta que pasa por $F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ queda fija, (b) $f(P) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, con $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ¿Expresión matricial de f?

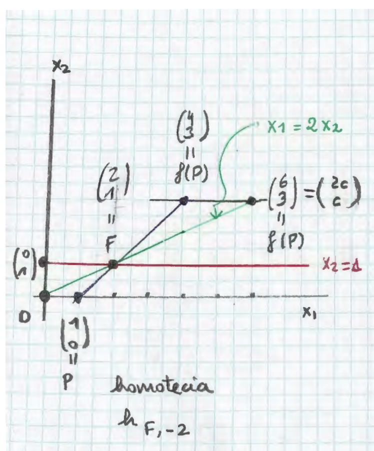


FIGURA 2. Homotecia $h_{F,-2}$.

Solución: Conviene empezar por hacer un dibujo cuidadoso (ver figura 2).

- OBS 0: que una recta r quede fija significa $f(r) = r$, i.e, cada punto de r se transforma en un punto de r; pero **no** significa que cada punto de r quede fijo,
- OBS 1: como cada recta que pasa por F queda fija, entonces F *queda fijo* (demostración: si r_1, r_2 son rectas distintas que pasan por F, entonces $F \in r_1 \cap r_2 \Rightarrow f(F) \in f(r_1) \cap f(r_2) = r_1 \cap r_2 = \{F\} \Rightarrow f(F) = F$)
- OBS 2: los puntos, $P, F, f(P)$ están *alineados* (esto lo hemos sospechado por dibujo) ya que $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$ (usando ejercicios de hoja 8); alternativamente, comprobamos que los vectores $\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{Pf(P)}$ son proporcionales

- OBS 3: $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\text{algo}\\1\end{pmatrix}$ pues este punto pertenece a la recta $x_2=1$, por (a)
- OBS 4: $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2c\\c\end{pmatrix}$, para cierto $c\in\mathbb{R}$, pues este punto pertenece a la recta $x_1=2x_2$, por (a).

PRIMER MÉTODO: COEFICIENTES INDETERMINADOS. La expresión buscada será:

$$\begin{pmatrix}2c\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\tag{14}$$

Por OBS 1 tenemos

$$\begin{pmatrix}2c\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\alpha+\beta\\2\gamma+\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\beta=2-2c-2\alpha\\\delta=1-c-2\gamma\end{cases}\tag{15}$$

Por OBS 3 tenemos

$$\begin{pmatrix}2c\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha&2-2c-2\alpha\\\gamma&1-c-2\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{algo}\\1\end{pmatrix}\Rightarrow c+1-c-2\gamma=1\Rightarrow\gamma=0\tag{16}$$

Por (b) tenemos

$$\begin{pmatrix}2c\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha&2-2c-2\alpha\\0&1-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2c+\alpha=4\\c=3\end{cases}\Rightarrow\alpha=-2\tag{17}$$

de donde $\beta=0,\delta=-2\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=-2I\Rightarrow\overrightarrow{f}=-2\,\mathrm{id}$ y f es homotecia de razón -2 y centro F; escribimos $f=h_{F,-2}$.

SEGUNDO MÉTODO: Las observaciones me hacen sospechar que f es homotecia de centro F. La razón de la homotecia será negativa, pues P y $f(P)$ quedan en semirrectas opuestas (separadas por F). La razón ρ satisface $\|\rho\|=\frac{\|\overrightarrow{Ff(P)}\|}{\|\overrightarrow{FP}\|}=2$ (esto se ve bien en el dibujo), luego $\rho=-2$. La expresión matricial de f será

$$\begin{pmatrix}2c\\c\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\tag{18}$$

Usando (b) tenemos

$$\begin{pmatrix}2c\\c\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\Rightarrow c=3\tag{19}$$

DATOS: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ afín tal que (a) cada recta se trasforma en una recta paralela, i.e., $r\|f(r),\forall r$ recta, (b) $F=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ queda fijo, (c) $f(P)=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, con $P=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. ¿Expresión matricial de f?

Solución: ES MUY PARECIDO AL ANTERIOR. Conviene empezar por hacer un dibujo cuidadoso (ver figura 3).

- OBS 0: que cada recta r se transforme en una recta paralela a sí misma incluye la posibilidad de que algunas rectas sean invariantes,
- OBS 1: los puntos, $P,F,f(P)$ están *alineados* (comprobación sencilla)

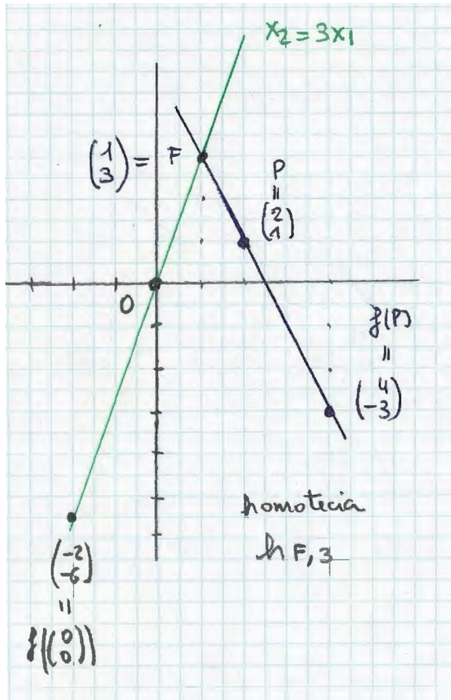


FIGURA 3. Homotecia $h_{F,3}$.

Las observaciones me hacen sospechar que f es homotecia de centro F. La razón de la homotecia será positiva, pues P y $f(P)$ quedan en la misma semirrecta (a partir de F). La razón ρ satisface $\rho = \frac{\|\overrightarrow{Ff(P)}\|}{\|\overrightarrow{FP}\|} = 3$ (esto se ve bien en el dibujo). La expresión matricial de f será

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Usando (c) tenemos

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = -2, c_2 = -6 \tag{21}$$

Comprobamos que se cumple (a): la recta $r : a_1x_1 + a_2x_2 - a_3 = 0$ se transforma (suponiendo que $a_1 \neq 0$) en

$$f(r) : \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} (-a_3 - a_2x_2)/a_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

y un vector director de esta recta es[2] $\begin{pmatrix} -3a_2/a_1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y también $\begin{pmatrix} -a_2/a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, que es vector director de r, luego $f(r) \| r$.
OBS: si no nos damos cuenta de que f puede ser una homotecia, debemos usar el método de coeficientes indeterminados.

[2] lo que acompaña al parámetro, que es x_2 en este caso

OBS: En este ejercicio se ve que *una homotecia en $\mathbb{R}^2$ transforma cada recta en una recta paralela. En particular, una homotecia deja invariante cada recta que pasan por el centro de la homotecia. Esto mismo es cierto para homotecias de $\mathbb{R}^n$.*

Hoja 10, Ejercicio 25. Es fácil darse cuenta de que las tres rectas, tomadas por parejas, satisfacen

1. se cruzan
2. son perpendiculares
3. distan 1

lo que nos lleva a visualizarlas sobre el *cubo unidad* (de vértices $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$) Conviene hacer un dibujo cuidado. Además, con el modelo de

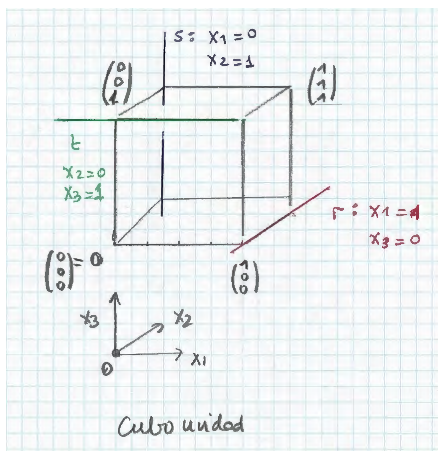


FIGURA 4. Rectas r, s, t sobre el cubo unidad.

cubo adjunto (al final de este fichero), podéis armar un cubo (recomiendo dejar los puntos hacia dentro) y, usando tres pajas de bebida (de 3 colores distintos) y cinta adhesiva, marcad en el cubo las rectas r (roja), s (azul) y t (verde). ¡Rotad el cubo con las manos y ved cómo actúa f!
Observamos que f^3 *fija cada una de las rectas dadas.*
Sospechamos que f es la rotación (o giro) cuyo eje E es la diagonal del cubo que pasa por $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, y $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, amplitud $\alpha = 2\pi/3 = 120°$ (el sentido del giro se determinará al final del problema). Si esto es así, el origen de coordenadas queda fijo, lo que significa que $f = \overrightarrow{f} = r_{u,\alpha}$ [3], con $E : x_1 = x_2 = x_3$ eje de giro (según notación de ejercicios de hoja 8), $\alpha = 120°$. La matriz[4] R de $r_{u,\alpha}$ se ha calculado en dicho ejercicio:

$$R = I + (\operatorname{sen}\alpha)B + (1 - \cos\alpha)(A - I) \tag{23}$$

[3] y además es una isometría de $\mathbb{R}^3$, ya estudiadas y clasificadas

[4] respecto de las bases canónicas, tanto es espacio de salida como de entrada

donde

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ vec. unitario en dir } E,\ a^2 = b^2 = c^2 = ab = ac = bc = 1/3 \Rightarrow A = \frac{1}{3}I \tag{24}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{sen} 120 = \sqrt{3}/2, \cos 120 = -1/2 \tag{25}$$

y sustituyendo en (23) y simplificando, llegamos a $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. De aquí deducimos que $\overrightarrow{f}(e_1) = e_2,\ \overrightarrow{f}(e_2) = e_3,\ \overrightarrow{f}(e_3) = e_1$, esto es, el sentido del giro es positivo.
OBS: La matriz R es *ortogonal* (i.e., $RR^T = I = R^TR$) como era de esperar (ya que $\overrightarrow{f}$ es isometría).
OBS: si no nos damos cuenta de que f es un giro, debemos usar el *método de coeficientes indeterminados*: la expresión matricial de f será:

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon & \lambda \\ \mu & \nu & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \tag{26}$$

Ahora calculamos ecuaciones paramétricas de r, s, t

$$r : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = q \\ x_3 = 0, \quad (q \in \mathbb{R}) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = q, \quad (q \in \mathbb{R}) \end{cases}, \quad t : \begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1, \quad (q \in \mathbb{R}) \end{cases} \tag{27}$$

e imponemos $f(r) = s$ así

$$f(r) = s \Rightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon & \lambda \\ \mu & \nu & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\q\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\q'\end{pmatrix} \text{ es cierto } \textbf{para todo } q \tag{28}$$

En particular,

$$q = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + \alpha = 0 \\ c_2 + \delta = 1 \end{cases} \Rightarrow \tag{29}$$

$$q = 1 \Rightarrow \beta = \epsilon = 0 \tag{30}$$

y la expresión matricial de f se simplifica así:

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_1 & 0 & \gamma \\ 1 - c_2 & 0 & \lambda \\ \mu & \nu & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \tag{31}$$

Cuando impongamos $f(s) = t$ y $f(t) = r$, llegaremos al mismo resultado.

Significado de ejercicios 13 a 16 de hoja 8: Dados una amplitud $\alpha \in [0, 2\pi)$, un sentido de giro (positivo o negativo) y un vector u unitario y la recta vectorial $E = L(u)$ en $\mathbb{R}^3$, hay tres isometrías asociadas a estos datos: la **rotación** $r_{u,\alpha}$, la **simetría** $s_{E^\perp}$ (esta no depende de α, por supuesto) y la **roto–simetría** (i.e., la composición conmutativa de las dos anteriores). Hay otra aplicación lineal más asociada al dato E; es la **proyección ortogonal** p_E sobre la recta E (pero esta última no es una isometría, pues no conserva las normas de vectores). Estas cuatro aplicaciones lineales guardan relación entre sí, lo que queda reflejado en las igualdades de matrices siguientes:

$$A^2 = A \quad \text{proyección} \tag{32}$$

$$R = I + (\operatorname{sen}\alpha)B + (1 - \cos\alpha)(A - I) \tag{33}$$

$$S = I - 2A \quad \text{Relación de Householder} \tag{34}$$

$$AB = 0 \tag{35}$$

$$SR = RS \tag{36}$$

donde

$$A = uu^T, \quad u = (a,b,c)^T \text{es vec. unitario dir } E, B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

La *relación de Householder* es $s_{E^\perp} = \mathrm{id} - 2p_E$ y esta relación entre proyección y simetría la habéis usado en bachillerato (dándola por obvia; ver figura 5)
`https://en.wikipedia.org/wiki/Householder_transformation`.

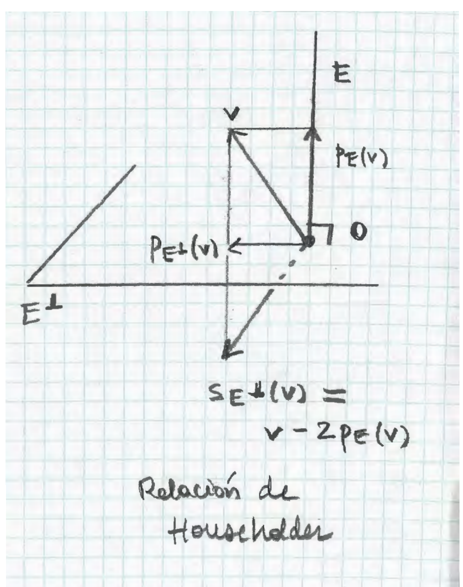


FIGURA 5. Relación de Householder $s_{E^\perp}(v) = v - 2p_E(v)$.

OBS 1: Basándonos en que $\operatorname{sen}(-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ y que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, llegamos a que la rotación de eje E, amplitud α y sentido negativo viene dada por R^T (esto no lo he visto escrito en ningún sitio)
OBS 2: En los libros encontraréis (y en nuestras hojas de ejercicios) problemas[5] en los que se pide calcular una de las matrices anteriores R, S ó RS y lo resuelven del siguiente modo geométrico, en 3 pasos:

[5] En Merino–Santos, ejercicios resueltos 54,55 en pag 190

- escogemos base $\mathcal{B}$ adecuada al problema (por ejemplo $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ con $v_1 = u$, (v_2, v_3) base de $E^\perp$; si queremos tomamos $\mathcal{B}$ ortonormal; si queremos tomamos ademáss $\mathcal{B}$ positivamente orientada)
- escribimos la matriz M de la aplicación lineal dada respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}$, que será sencilla,
- la matriz de la aplicación lineal dada respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ será PMP^{-1}, donde P es matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$.

El método geométrico en 3 pasos tiene la ventaja de que no es necesario recordar las relaciones (32) a (36). Por otro lado, usar los ejercicios de hoja 8 (si los hemos entendido) tiene la ventaja de la rapidez de aplicar unas fórmulas.

Los ejemplos siguientes son $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(X) = C + AX$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. ¿Es f movimiento? ¿Cuál?

Ejemplo 1: $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$. Tenemos $AA^T = I$ luego A ortogonal con $\det(A) = -1$, $\overrightarrow{f}$ isometría y f movimiento que invierte la orientación.
$\mathrm{Fix}(f) : C + (A - I)X = 0$ es vacío, pues $\mathrm{rg}(A - I) = 1$ y $\mathrm{rg}(A - I|C) = 2$. ESTAMOS EN LINEA 2 DE LA TABLA, luego f es **simetría deslizante.** El eje E es $\mathrm{Inv}(f)$ (sale $4x + 2y - 7 = 0$) y el vector es $w = (A + I)C/2 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$. Además $\overrightarrow{f}$ es simetría lineal (de matriz A resp $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$.) Obs 1: $w = \overrightarrow{Pf(P)}$ cualquiera que sea $P \in E$. Obs 2: podemos comprobar que $w \| E$ y también que $f = s_E \circ t_w = t_w \circ s_E$.

Ejemplo 2: $C = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha \\ 2\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & -\mathrm{sen}\,2\alpha \\ -\mathrm{sen}\,2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$. Tenemos $AA^T = I$ luego A ortogonal con $\det(A) = -1$, $\overrightarrow{f}$ isometría y f movimiento que invierte la orientación. Podemos calcular $\mathrm{rg}(A - I)$ y $\mathrm{rg}(A - I|C)$ y averiguar en que línea de la tabla estamos. *Otra forma:* calculamos $\mathrm{Fix}(f)$ y sale la recta $(\cos\alpha)x + (\mathrm{sen}\,\alpha)y = 1$—usando fórmulas trig. del ángulo doble—, luego f tiene una recta de puntos fijos, f es una **simetría** sobre dicha recta. Obs 1: si calculamos $\mathrm{Inv}(f)$ nos sale la misma recta. Obs 2: $\overrightarrow{f}$ es simetría lineal (de matriz A resp $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$.)

Ejemplo 3: $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $A = -I$. Sabemos que $\overrightarrow{f}$ es homotecia de centro el vector cero y razón -1 (o aplic. antipodal lineal). ESTAMOS EN LA LINEA 1 DE LA TABLA, EN EL CASO PARTICULAR DESCRITO EN LA PARTE BAJA DE LA MISMA. El centro de la **homotecia** f es $\mathrm{Fix}(f)$ y sale $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Obs 1: también se puede decir que f es **giro de amplitud 180 grados y centro** F. Obs 2: también que f es **aplicación antipodal y centro F.**
OJO: una aplicación antipodal en $\mathbb{R}^n$ conserva la orientación si n es par y la invierte en caso contrario (pues la matriz de aplicación lineal asociada es $-I_n$, con $\det = 1 > 0$ si n es par y $\det = -1 < 0$ en caso contrario).

Ejemplo 4: $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tenemos $A = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\mathrm{sen}\,90 \\ \mathrm{sen}\,90 & \cos 90 \end{pmatrix}$ luego $\overrightarrow{f}$ es rotación y f también es rotación. ESTAMOS EN LINEA 1 DE LA TABLA. El centro de rotación de f

es $\mathrm{Fix}(f)$ y sale $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$. Así, f es r**otación de centro F, amplitud 90 grados y sentido positivo.**

Haced dibujos de todos los casos.

Datos en $\mathbb{R}^3$ (todo referido al sistema de ref canónico $\mathcal{R}_c=\{O;\mathcal{B}_c\}$ donde el punto O es el origen de coordenadas): Plano afín $H: x+y+z=5$, recta afín $E:\begin{cases}x=y+1\\z=y+1\end{cases}$ vectores $w=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ (ver figura 6). Se pide matriz (resp. $\mathcal{R}_c,\mathcal{R}_c$) de

1. *roto–simetría* $s_H\circ r_{u,180}$ y su punto fijo F,
2. *mov. helicoidal* (o *rotación deslizante*) $r_{u,180}\circ t_v$,
3. *simetría deslizante* $s_H\circ t_w$,
4. imagen del punto $Q=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$ por cada uno de los movimientos anteriores.

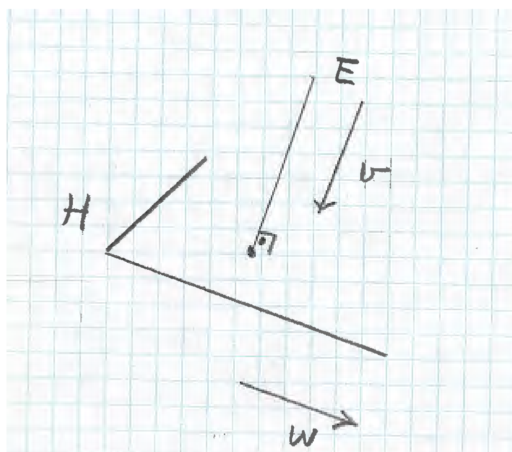


FIGURA 6. Recta y plano afines perpendiculares entre sí

Solución: Comprobaciones previas:

- E,H son perpendiculares ya que $\mathrm{dir}\,E:\begin{cases}x=y\\z=y\end{cases}$ y $\mathrm{dir}\,H: x+y+z=0$ son perpendiculares (luego aquí H es igual a $E^\perp$ que figura en línea 1 de la tabla de clasificación de movs. en $\mathbb{R}^3$)
- $v\|E$ ya que $v\in\mathrm{dir}\,E$
- $w\|H$ ya que $w\in\mathrm{dir}\,H$.

Necesitamos hallar las matrices R',S',T_w,T_v de $r_{u,180},s_H,t_w,t_v$ resp., para luego multiplicarlas por parejas. Tenemos (por bloques) $R'=\begin{pmatrix}1&0\\C_1&R\end{pmatrix}$, $S'=\begin{pmatrix}1&0\\C_2&S\end{pmatrix}$, con C_1 coordenadas de la imagen de O mediante $r_{u,180}$, C_2 coordenadas de la imagen de O mediante

s_H, R matriz de la rotación lineal $\overrightarrow{r_{u,180}} = r_{u,180}$, S matriz de la simetría lineal $\overrightarrow{s_H} = s_{\operatorname{dir} H}$ (las dos últimas resp. $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$), $T_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & I \end{pmatrix}$ y $T_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & I \end{pmatrix}$.

- la matriz R aparece en el ejercicio 114; es $R = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$,
- sea $C_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ (método de coef. indeterminados) y sabemos que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \tag{38}$$

  donde estamos expresando que el punto $E \cap M$ queda fijo por esta rotación lineal —donde M es el plano perpendicular a E que pasa por O—. Calculamos dicho punto: $M : x + y + z = 0$ y $E \cap M$ es el punto $\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ (que es lo que aparece en (40)).
  Deducimos $a_1 = c_1 = 2/3, b_1 = -2a_1$.
- (usando ejercicios 13 a 16 de de hoja 8) tenemos $S = I - 2A$ con $A = uu^T$, $u = 1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vector unitario en la dirección de E. Obtenemos $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

  OBS $R = -S$ ¿por qué? Pensemos que la pata de la mesa es $\operatorname{dir} E$, el tablero de la mesa es $\operatorname{dir} H$ y el origen es donde ambos se unen. Tomamos un vector $t \neq 0$ (que nace en el origen) y lo rotamos 180 grados alrededor de la pata, obteniendo t'. Ahora hallamos el simétrico de t respecto del tablero y lo que obtenemos en este caso es $-t'$.
- para hallar C_2, tomamos la recta perpendicular a H que pasa por el origen (sus ecuaciones son $x = y = z$), la cortamos con H, obteniendo el punto $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$, que es precisamente la proyección ortogonal $p_H(O)$ y tenemos
  $s_H(O) = C_2 = O + 2\overrightarrow{Op_H(O)} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 10/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$ (*relación de Householder*).

Ya tenemos todos los ingredientes:

$$R' = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2/3 & & & \\ -4/3 & & R & \\ 2/3 & & & \end{array}\right), \quad S' = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 10/3 & & & \\ 10/3 & & -R & \\ 10/3 & & & \end{array}\right) \tag{39}$$

luego las respuestas son (por bloques)

1. $S'R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_2 & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_1 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_2 - RC_1 & -R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_2 - RC_1 & -I \end{pmatrix}$, que corresponde a la *homotecia de razón* -1 (también llamada *aplicación antipodal*) de centro $C_2 - RC_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. El punto fijo F es, lógicamente, $E \cap H$, luego $5 = x + y + z = (y+1) + y + (y+1)$, de donde $y = 1$ y $F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (Ejercicio: comprueba que sale lo mismo resolviendo las ecuaciones de $\mathrm{Fix}(s_H \circ r_{E,u,180})$)
2. $R'T_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_1 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_1 + Rv & R \end{pmatrix}$, con $C_1 + Rv = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -7/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
3. $S'T_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_2 & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_2 - Rw & -R \end{pmatrix}$, con $C_2 - Rw = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 10/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$,
4.
    - $S'R' \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = C_2 - RC_1 - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$,
    - $R'T_v \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = C_1 + Rv + R \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -7/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 \\ 8/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$,
    - $S'T_w \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = C_2 - Rw - R \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 10/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 \\ -5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ son las coordenadas pedidas.

Comprobaciones adicionales: vemos que $S'R' = R'S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_1 + RC_2 & -I \end{pmatrix}$, verificando que $C_2 - RC_1 = C_1 + RC_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. De modo parecido se comprueba que $R'T_v = T_vR'$ y $S'T_w = T_wS'$.

Hoja 10, Ejercicio 30. ¿Matriz de movimiento helicoidal (o rotación deslizante), $\alpha = 60°$, sentido positivo, eje $E : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ orientada según el vector $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y vector de traslación $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

La aplicación considerada es $f = t_w \circ r_{E,u,60} = r_{E,u,60} \circ t_w$. Su aplicación lineal asociada es $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{t_w \circ r_{E,u,60}} = \overrightarrow{t_w} \circ \overrightarrow{r_{E,u,60}} = \mathrm{id} \circ \overrightarrow{r_{E,u,60}} = \overrightarrow{r_{E,u,60}}$ es rotación lineal $r_{u,60}$.
Trabajaremos con el sistema de ref canónico $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}_c\}$ donde el punto O es el origen de coordenadas.

OBS 1: $e_3 = w \| E$ ya que $w \in \operatorname{dir} E : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (es el eje z) —es lo esperado.

La rotación lineal $r_{u,60}$ tiene matriz (resp $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$)

$R = \begin{pmatrix} \cos 60 & -\operatorname{sen} 60 & 0 \\ \operatorname{sen} 60 & \cos 60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ —ya que el eje z es de rotación y sus vectores quedan fijos, y restringiéndonos al plano $z = 0$, lo que tenemos es una rotación lineal plana de $60°$ y sentido positivo (Alternativa: podemos calcular la matriz R usando ejercicios 13 a 16 de de hoja 8). **¿Cuál es la imagen de O mediante $r_{E,u,60}$?** Llamémosla $C' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (met. de coef. indeterminados) y sabemos que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

donde estamos expresando que **el punto $E \cap M$ queda fijo por la rotación lineal** —donde M es el plano perpendicular a E que pasa por O—. Calculamos dicho punto: $M : z = 0$ y $E \cap M$ es el punto $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (que es lo que aparece en (40)). De (40) deducimos $a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, b = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, c = 0$. Entonces la matriz de $r_{E,u,60}$ es

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & & - & - & - \\ a & | & & & \\ b & | & & R & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \tag{41}$$

la matriz de t_w es

$$T = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & & - & - & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & I & \\ 1 & | & & & \end{pmatrix}, \tag{42}$$

y la matriz de f es $R'T = TR'$. *Comprobación:* Calculamos estos productos y vemos que son iguales: $C' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ es la imagen del origen O por la rotación $r_{E,u,\alpha}$ y tenemos (usando cajas)

$$R'T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C' & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C' + Rw & R \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$TR' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C' & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w + C' & R \end{pmatrix} \tag{44}$$

y se tiene $Rw = w$.

OBS 2: La imagen del origen mediante f es el punto $C' + w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$

¿Dónde va el punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ mediante f? Va a $C' + w + R \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$