Notas y comentarios sobre Álgebra Lineal, Cap 2, curso 2019–20 (editadas en 2020–21)
que se apoyan en el libro de texto Merino–Santos

M. J. de la Puente Muñoz
Facultad de Matemáticas, UCM

18 de mayo de 2021

Subespacio invariante $\operatorname{Inv}(f)$ *de un movimiento* f *de* $\mathbb{R}^2$ *ó* $\mathbb{R}^3$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Trabajaremos en $\mathbb{R}^n$ con un sistema de ref. rectangular $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$, i.e., O es un punto cualquiera y $\mathcal{B}$ es una base ortonormal. Si la expresión matricial del movimiento f es

$$f(X) = C + AX, \quad A \text{ matriz ortogonal} \tag{1}$$

consideramos la familia, denotada $\operatorname{Inv}(f)$, de todos los puntos X tales que el vector $\overrightarrow{Xf(X)}$ queda fijo por $\overrightarrow{f}$, i.e., $f(X) - X \in \ker(A - I)$, cuyas ecuaciones son

$$(A-I)\,(f(X)-X) = (A-I)\,(C+AX-X) = (A-I)\,(C+(A-I)X) = \tag{2}$$

$$(A-I)^2X + (A-I)C = 0 \tag{3}$$

OBS 1: si $X \in \operatorname{Inv}(f)$ entonces $\overrightarrow{Xf(X)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{Xf(X)}\right) = \overrightarrow{f(X)f^2(X)}$ nos dice que *los puntos* $X, f(X), f^2(X)$ *están alineados* y, mas aún, que $f(X)$ *es el punto medio del segmento* $Xf^2(X)$.
OBS 2: Es muuuuuuuuuy fácil demostrar que si $\operatorname{Inv}(f)$ es no vacío, entonces se trata de un *subespacio afín* (ejercicio).
Las proposiciones 1 y 2 que se ven a continuación demuestran que $\operatorname{Inv}(f) \neq \emptyset$ en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$. La propsición 1 aparece en Merino–Santos; no así la propsición 2.
Proposición 1: Si $\operatorname{rg}(A-I)^2 = \operatorname{rg}(A-I)$, entonces $\operatorname{Inv}(f)$ es no vacío.
Demostración: Recordemos que $\operatorname{rg}(MN) \leq \min\{\operatorname{rg} M, \operatorname{rg} N\}$; en particular obtenemos $\operatorname{rg}(A-I)^2 \leq \operatorname{rg}(A-I)$.
Tenemos que $\operatorname{Inv}(f)$ es conjunto de soluciones de un SLNH. Será no vacío si y sólo si los rangos de la matriz de coeficientes $\operatorname{rg}(A-I)^2$ y de la matriz ampliada $\operatorname{rg}\left((A-I)^2|(A-I)C\right)$ coinciden. Se verifica, usando la hipóteis, lo siguiente

$$\operatorname{rg}(A-I) = \operatorname{rg}(A-I)^2 \leq \operatorname{rg}\left((A-I)^2|(A-I)C\right) = \operatorname{rg}\left((A-I)\,(A-I|C)\right) \leq \tag{4}$$

$$\leq \min\{\operatorname{rg}(A-I), \operatorname{rg}(A-I|C)\} = \operatorname{rg}(A-I) \tag{5}$$

luego todas las desigualdades anteriores son igualdades. □

A continuación concretamos $n = 2$ ó 3.
Proposición 2: Si $n = 2$ ó 3 y $A \in M_n(\mathbb{R})$ es matriz ortogonal entonces $\operatorname{rg}(A-I)^2 = \operatorname{rg}(A-I)$.
Demostración: Se basa en combinar los siguientes hechos (vistos en clase o inmediatos):

1. Si $n = 2$ ó 3 y $A \in M_n(\mathbb{R})$ es matriz ortogonal entonces A es diagonalizable (por semejanza) sobre $\mathbb{C}$ —en efecto: si $n = 2$, sus autovalores son $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$ (caso de giro) ó $\{\pm 1\}$ (caso de simetría); $n = 3$, sus autovalores son $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$ y ± 1 ó $\{1 \text{ triple}\}$, ó $\{1 \text{ doble}, -1 \text{ simple}\}$, ó $\{1 \text{ simple}, -1 \text{ doble}\}$, ó $\{-1 \text{ triple}\}$,
2. si A es diagonalizable (por semejanza) entonces $A - I$ es diagonalizable (por semejanza)
3. si D es diagonal entonces $\operatorname{rg} D^2 = \operatorname{rg} D$
4. si A es diagonalizable (por semejanza) entonces $\operatorname{rg} A^2 = \operatorname{rg} A$. □

Se puede demostrar que si $\mathbb{R}^n \neq \mathrm{Inv}(f) \neq \emptyset$, entonces $\mathrm{Inv}(f)$ es el mayor subespacio invariante propio del movimiento $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Sobre cónicas reales afines euclídeas; dos presentaciones clásicas. En $\mathbb{R}^2$ trabajaremos con el sistema de ref canónico $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}_c\}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ punto.

1. Datos: dos focos $F_1 \neq F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $a \in \mathbb{R}, a > 0$
   a) Elipse: $\{X \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{d}(X, F_1) + \mathrm{d}(X, F_2) = 2a\}$
   b) Hipérbola: $\{X \in \mathbb{R}^2 : |\,\mathrm{d}(X, F_1) - \mathrm{d}(X, F_2)| = 2a\}$[1]
2. Datos: un foco $F \in \mathbb{R}^2$, una directriz r (recta afín en $\mathbb{R}^2$ con $F \notin r$) y excentricidad $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$: cónica es $\{X \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{d}(X, F) = \epsilon\, \mathrm{d}(X, r)\}$
   a) Elipse si $\epsilon < 1$
   b) Parábola si $\epsilon = 1$
   c) Hipérbola si $\epsilon > 1$

Casos límite y casos particulares:

1. Circunferencia si $F_1 = F_2$ y si $\epsilon = 0$
2. Hipérbola equilátera si $\epsilon = \sqrt{2}$ (ver ejercicio 3 de hoja 11)
3. Parábola como límite de familia de elipses; parábola como límite de familia de hipérbolas.

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS QUE SE DEDUCEN DE LAS ECUACIONES

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{Elipse} \tag{6}$$

1. la curva $\mathcal{C}$ es simétrica resp eje $x = 0$ (pues $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$),
2. la curva $\mathcal{C}$ es simétrica resp eje $y = 0$,
3. la curva $\mathcal{C}$ es simétrica resp origen,
4. la curva $\mathcal{C}$ corta al eje $x = 0$ en los puntos $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \end{pmatrix}$,
5. la curva $\mathcal{C}$ corta al eje $y = 0$ en los puntos $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$,
6. **Si** $b < a$ entonces $b^2 < a^2$ y tomamos $d = +\sqrt{a^2 - b^2} \in \mathbb{R}$, luego $\boxed{a^2 = b^2 + d^2}$ (triángulo rectángulo) y los focos son $\begin{pmatrix} \pm d \\ 0 \end{pmatrix}$,
7. $\epsilon = d/a < 1$,
8. a se llama semieje mayor, b se llama semieje menor, d se llama semidistancia focal, $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$ se llaman vértices de $\mathcal{C}$ y están alineados con los focos.
9. La curva $\mathcal{C}$ es acotada: en efecto, vamos a demostrar que el cuadrado de la distancia al origen desde un punto cualquiera $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ no es mayor que a^2. Tenemos $\mathrm{d}(X, O)^2 = x^2 + y^2 = a^2\,(1 - y^2/b^2) + y^2 = a^2 + (1 - a^2/b^2)\, y^2 \leq a^2$ ya que $(1 - a^2/b^2)$ es negativo pues $b^2 < a^2$.

[1] Si omitimos el valor absoluto, obtenemos solo una componente conexa de la hipérbola

Ejercicio: ¿cómo cambian las propiedades anteriores si $b > a$? Dibuja.

(7) $$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{Hipérbola}$$

1. la curva $\mathcal{C}$ es simétrica resp eje $x = 0$ (pues $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$),
2. la curva $\mathcal{C}$ es simétrica resp eje $y = 0$,
3. la curva $\mathcal{C}$ es simétrica resp origen,
4. la curva $\mathcal{C}$ **no** corta al eje $x = 0$ (pues $-y^2/b^2 = 1$ no tiene solución sobre $\mathbb{R}$ ya que el miembro de la izq. es no positivo y el de la decha. es positivo),
5. la curva $\mathcal{C}$ corta al eje $y = 0$ en los puntos $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$,
6. se toma $d = +\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$, luego $\boxed{d^2 = a^2 + b^2}$ (triángulo rectángulo) y los focos son $\begin{pmatrix} \pm d \\ 0 \end{pmatrix}$,
7. $\epsilon = d/a > 1$,
8. a se llama semieje real, b se llama semieje imaginario, d se llama semidistancia focal, $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$ se llaman vértices de $\mathcal{C}$ y están alineados con los focos,
9. La curva $\mathcal{C}$ es **no** acotada: (indicación de dem: hay que demostrar que $\mathrm{d}(X, O)^2$ tiene a $+\infty$ cuando los puntos P se alejan más y más del origen recorriendo $\mathcal{C}$. Es parecida a la de arriba)
10. la curva $\mathcal{C}$ tiene 2 asíntotas. Son las rectas afines dadas por la ecuación $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$, que se descompone así $(x/a - y/b)\,(x/a + y/b) = 0 \Rightarrow (x/a - y/b) = 0$ ó $(x/a + y/b) = 0 \Rightarrow bx \pm ay = 0$. Veamos que $\lim_{P \in \mathcal{C}, \|\overrightarrow{OP}\| \to +\infty} \mathrm{d}(r, P) = 0$, donde r es cualquiera de las rectas anteriores, p.e., $r : bx - ay = 0$. Si $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ y suponemos $y_0 > 0$, tenemos, por F. Lagrange,

(8) $$\mathrm{d}(r, P) = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|bx_0 - b\sqrt{x_0^2 - a^2}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{a^2}{|x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}|} \underset{x_0 \to \pm\infty}{\to 0}$$

la tercera igualdad debida a que P satisface la ecuación de $\mathcal{C}$, la cuarta igualdad debida a que multiplicamos y dividimos por $|x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}|$ y sustituimos suma por diferencia por diferencia de cuadrados. Hemos demostrado que la recta r tiene la propiedad de que la **distancia** (medida perpendicularmente, por supuesto) desde puntos P de la curva $\mathcal{C}$ a r **tiende a cero**, cuando los puntos P se alejan más y más del origen.

Ejercicio: ¿cómo cambian las propiedades anteriores si la ecuación es $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$? Dibuja.

(9) $$\mathcal{C} : y^2 = 2px \qquad \text{Parábola}$$

1. la curva $\mathcal{C}$ es simétrica resp eje $y = 0$ (pues $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$),
2. la curva $\mathcal{C}$ corta al eje $x = 0$ solo en el origen y lo hace con multiplicidad 2 (pues tendremos $y^2 = 0$), el eje $x = 0$ es la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el origen, la directriz de $\mathcal{C}$ es paralela a esta recta,
3. el origen se llama vértice de $\mathcal{C}$,

4. el foco tiene coordenadas $\begin{pmatrix} p/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y queda en el semiplano de la decha. si y sólo si $p > 0$
5. La curva $\mathcal{C}$ es **no** acotada: (indicación de dem: es parecida a la de arriba)
6. la curva $\mathcal{C}$ **no** tiene asíntotas,i.e., no existe ninguna recta afín r con la propiedad de que la distancia desde puntos P de la curva $\mathcal{C}$ a r tiende a cero, cuando los puntos P se alejan más y más del origen.

Ejercicio: ¿cómo cambian las propiedades anteriores si el parámetro p cambia de signo? ¿Y si la ecuación es $x^2 = 2py$? Dibuja. *Ejercicio:* ¿cómo cambian las propiedades anteriores si el parámetro p crece? Es decir, compara las curvas dadas por $y^2 = 2px$ y $y^2 = 2p'x$ con $p < p'$. *Ejercicio:* presta atención a las secciones cónicas que se explican en Merino Santos sección 3.4 en pag 326 y haz dibujos precisos de cada una de ellas en el plano x, y. Son cónicas reducibles y/o degeneradas. *Preguntas:* ¿se obtiene el vacío como intersección de cono y plano? ¿ se obtiene un par de rectas paralelas como intersección de cono y plano? ¿cómo cambian las cónicas si consideramos conos con distintos ángulos?

ECUACIÓN GENERAL DE UNA CÓNICA REAL AFÍN EUCLÍDEA Definición: Una cónica real afín euclídea es el conjunto de puntos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen (mucha atención a cómo funcionan los subíndices aquí y mucha atención a los doses de los términos no cuadráticos (estos se ponen por comodidad))

(10) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$ con **alguno no nulo** entre a_{11}, a_{22}, a_{12}.

Tenemos una **ecuación de segundo grado en 2 variables**, (E 2GR 2VAR) y se expresa matricialmente así

$$\tilde{X}^T \tilde{A} \tilde{X} = 0 \tag{11}$$

o también así

$$X^T A X + BX + a_{00} = 0 \tag{12}$$

con $\tilde{X}, \tilde{A}, B, X$ como en Merino Santos pag 328.

OBS 1: las matrices $\tilde{A}, A$ son **simétricas**, A es submatriz de $\tilde{A}$, X es submatriz de $\tilde{X}$ (aquí aparece el 1 artificial que usamos habitualmente en geometría afín, para poder recoger datos en una matriz, juntando lo de 2º grado, lo de primer grado y la constante a_{00}),

OBS 2: hay unos factores 2 en la matriz B (esto se hace por comodidad),

OBS 3: la **parte cuadrática del polinomio** es $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$; es la **más importante** y está recogida en $X^T AX$;

OBS 4: la **parte no cuadrática del polinomio** es $2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}$; es la **menos importante** y está recogida en $BX + a_{00}$.

Ejemplo 1: la cónica dada por la ecuación $3x^2 + 7x + 5xy = 0$ tiene matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = (7, 0)$. Es facílisimo ver que se trata de un **par de rectas que se cortan**, ya que el polinomio dado es producto de x y $3x + 7 + 5y$, luego las rectas son $r_1 : x = 0$, $r_2 : 3x + 7 + 5y = 0$ y se cortan en el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ -7/5 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2: Hoja 11, ejercicio 7, 1) la cónica dada por la ecuación $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$ tiene matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = (8, 0)$. Es facíl ver que se trata de una hipérbola despejando y

así:

$$y = \frac{3x^2 + 8x - 1}{4x} \tag{13}$$

Aquí se ve inmediatamente que (a) la recta $x = 0$ es asíntota vertical, (b) existe una asíntota inclinada (es la recta afín de ecuación $y = mx + n$, con $m = \lim_{x \to \pm\infty} y/x = 3/4$, $n = \lim_{x \to \pm\infty}(y - mx) = 2$). El centro de hipérbola es el punto donde se cortan sus asíntotas: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dibuja primero las asíntotas y luego la hipébola.

Pregunta: dada una E 2GR 2VAR, siempre que se pueda despejar una de las variables (en función de la otra), ¿tendremos una hipérbola o un parábola? Razona la respuesta.

OBJETIVO: dada un E 2GR 2 VAR, averiguar qué cónica es y hallar todos sus elementos geométricos. A veces esto es fácil, sin más que observar cuidadosamente la ecuación, tal y como hemos visto en los dos ejemplos previos. Otras veces (las más) recurrimos a un procedimiento (algoritmo) sencillo, que nos permite llegar a una ecuación reducida de la cónica dada. El procedimiento consta de dos pasos principales: PASO 1: se diagonaliza (con matriz de paso ortogonal de determinante 1 —usando el Teorema Espectral—) la parte cuadrática; PASO 2: se reduce al mínimo número de términos posible la parte no cuadrática que haya resultado tras efectuar el paso 1.

OBS 1: En términos geométricos, **el paso 1 consiste en un giro** (OJO: podemos decir que giramos los ejes en un sentido o que giramos la cónica en el sentido opuesto. En la vida real ocurre lo mismo: si tengo en la pantalla del ordenador una foto girada, para verla bien, puedo girar la foto en un sentido o girar el ordenador en sentido opuesto. Estad atentos pues este es un punto de frecuentes errores.)

OBS 2: En términos geométricos, **el paso 2 consiste en una traslación**. (OJO: podemos decir que trasladamos los ejes según un vector o que trasladamos la cónica según el vector opuesto. En la vida real ocurre lo mismo: si tengo en la mesa un rotulador y un folio que no se tocan, para que el rotulador esté encima del folio puedo trasladar el rotulador según un vector, o trasladar el folio según el vector opuesto. Estad atentos pues este es un punto de frecuentes errores.)

OBS 3: es posible que uno de los dos pasos no sea necesario (por que ya esté hecho). En resumen, mediante a lo sumo una rotación y una traslación se consigue llevar una E 2GR 2VAR a una ecuación reducida. Son, a lo sumo, dos cambios de referencia afín. Son, a lo sumo, dos movimientos en el plano.

OBS 4: ¿no se necesita hacer simetrías? No, ya que toda cónica (degenerada o no, reducible o no) presenta uno o dos ejes de simetría. Por ello, y para simplificar el algoritmo, no vamos a usar simetrías. ¿Cómo se refleja el no uso de simetrías? Se refleja en que la matriz de paso del PASO 1 se tomará con determinante positivo.

OBS 5: Es fundamental aprender a **completar cuadrados**, porque se usará a menudo tanto en el PASO 1 como en el PASO 2.

Completar cuadrados se basa en usar $(p \pm q)^2 = p^2 + q^2 \pm 2pq$, luego $p^2 \pm 2pq = (p \pm q)^2 - q^2$.

Ejemplo 3; continuación de ejemplo 2: Vamos a completar cuadrados en la parte de 2 grado de $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$, que es $3x^2 - 4xy$. Se hace así:

$$3x^2 - 4xy = 3(x^2 - 4xy/3) = 3(x - 2y/3)^2 - 3(4y^2/9) \tag{14}$$

Luego tomaremos nuevas variables, por ejemplo, $\begin{cases} x' = x - 2y/3 \\ y' = y \end{cases}$ y la parte de segundo grado quedará así

(15) $$3x'^2 - 4y'^2/3$$

El cambio de variables (cambio de base) que hemos efectuado es $X' = PX$ con

(16) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde la matriz P **no** es ortogonal. ¿Podemos modificar el cambio de base anterior a fin de tener matriz de paso ortogonal? Sí, tomando $P = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -2/3 & -1 \end{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}}$. La nueva matriz P tiene det -1 (negativo) ¿Podemos modificar el cambio de base anterior a fin de tener matriz de paso ortogonal con det positivo? Sí, tomando $P = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}}$. La matriz P representa un giro y el cambio de variables (cambio de base) que hemos efectuado es $X' = PX$, esto es $\begin{cases} x' = (x - 2y/3)\frac{3}{\sqrt{13}} \\ y' = (2x/3 + y)\frac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}$. Averigua de qué giro se trata. Averigua en qué se convierte la ecuación dada.

Ejercicio: en $3x^2 - 4xy - 7y^2$, completar cuadrados se puede hacer de dos maneras: empezando con x^2 o con y^2. Hazlo de ambas forma con matrices de paso ortogonal con det positivo. Averigua de qué giros se trata.

Ejercicio: La cónica de ecuación $x - y^2 + 7y - 2 = 0$ es una parábola. Lo comprobamos de inmediato completando cuadrados así:

(17) $$-y^2 + 7y = -(y^2 - 7y) = -(y - 7/2)^2 - (-49/4)$$

El cambio de variables (traslación) que hemos efectuado es $X' = PX$, esto es $\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 7/2 \end{cases}$ y la ecuación dada queda así $x' - y'^2 + 49/4 - 2 = x' - y'^2 + 41/4 = 0$.

Hacemos una nueva traslación así: $\begin{cases} x'' = x' + 41/4 \\ y'' = y' \end{cases}$ y la ecuación dada queda $x'' - y''^2 = 0$.

Dibuja esta parábola (en los sistemas de coordenadas X y X'') y averigua todos sus elementos geométricos. La composición de las dos traslaciones es una traslación. ¿Cuál?

Algunas preguntas y respuestas.

Preguntas: ¿se obtiene el vacío como intersección de cono y plano? ¿ se obtiene un par de rectas paralelas como intersección de cono y plano? ¿cómo cambian las cónicas si consideramos conos con distintos ángulos?

Respuestas someras: NO. NO. Si comparamos dos conos con distintos ángulos[2] (y mismos eje y vértice) y los cortamos con un mismo plano afín, lo que cambian son los parámetros de la cónica (semiejes, semidistancia focal, excentricidad) así como los elementos geométricos

[2]Un *cono circular recto* es la superficie (de revolución) $\mathcal{S}$ que se obtiene a partir de dos rectas afines E y g en $\mathbb{R}^3$ que se cortan (en un punto V) cuando E queda fija y g rota alrededor de E. El ángulo de $\mathcal{S}$ es, por definición, el que forman E y g. Se llaman E eje, g generatriz y V vértice de $\mathcal{S}$. El cono $\mathcal{S}$ tiene infinitas generatrices y es la unión de todas ellas.

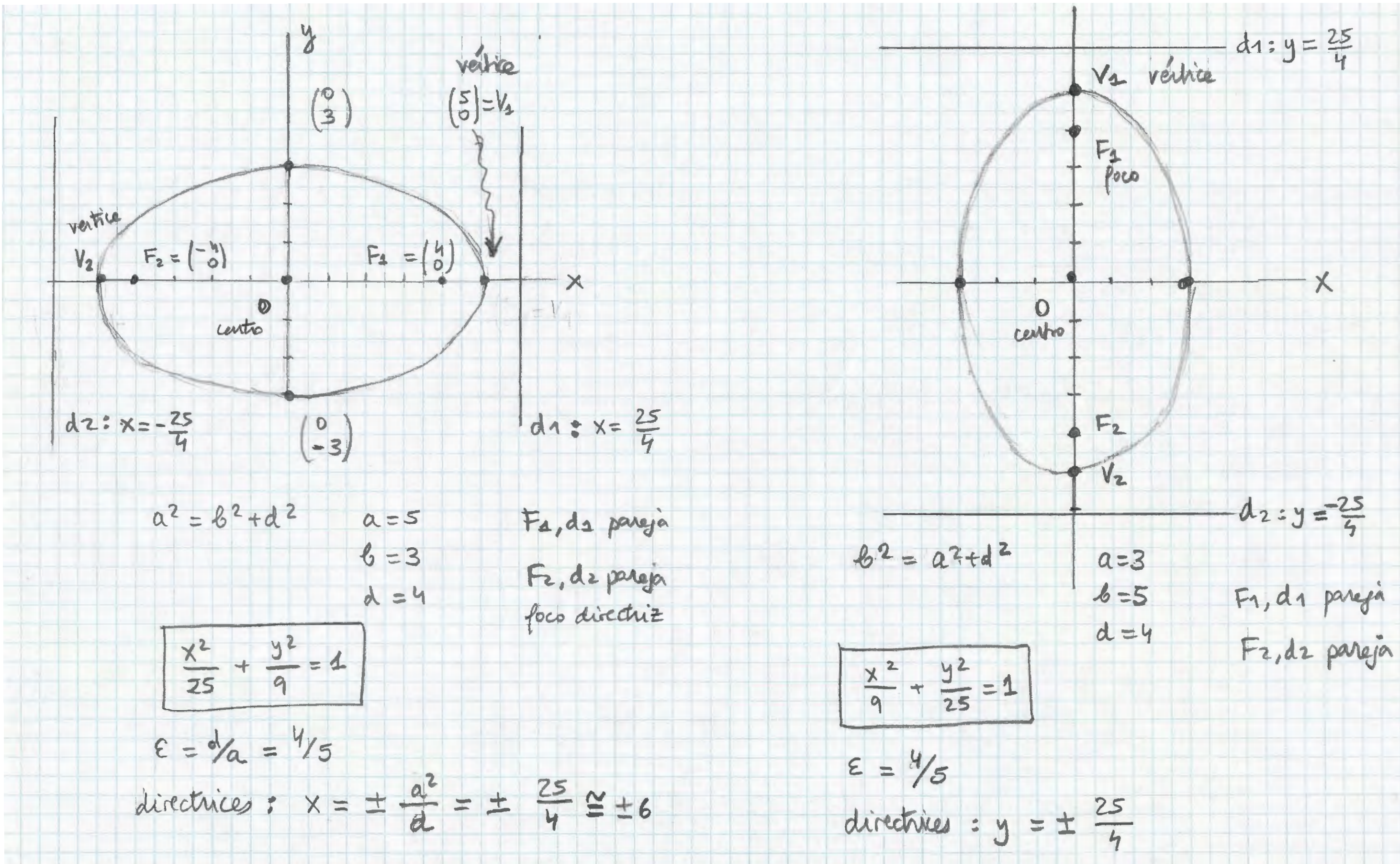

Figura 1. Dos elipses con ecuaciones parecidas.

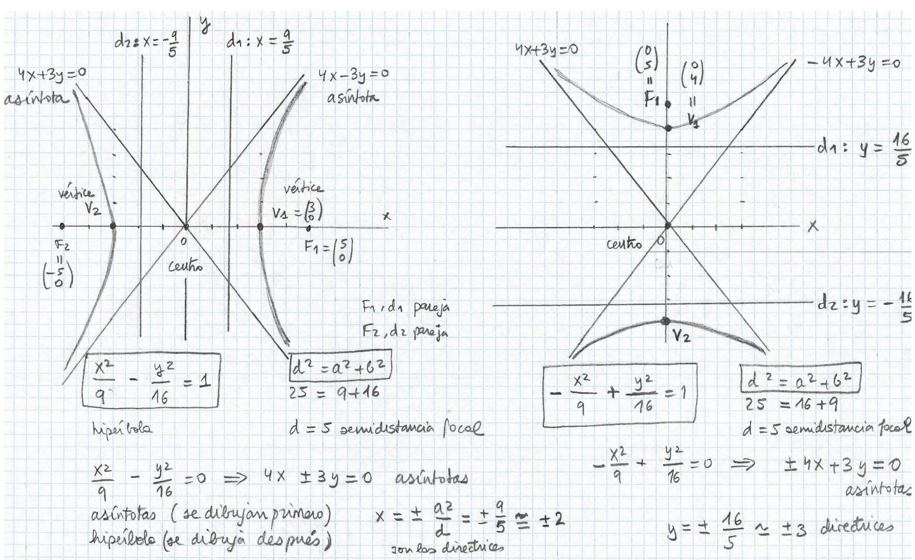

Figura 2. Dos hipérbolas con ecuaciones parecidas.

—porque se deducen de los parámetros. Por ejemplo, dados dos conos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ (con el mismo vértice V) de ángulos α, α' con $0 < \alpha < \alpha' < 90°$ y un plano L que no pasa por V, si una

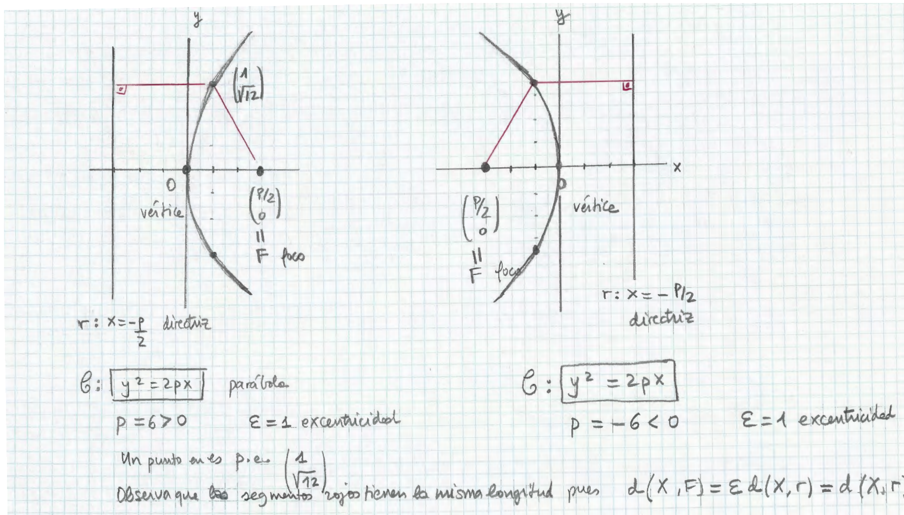

Figura 3. Dos parábolas con ecuaciones parecidas.

generatriz g del cono $\mathcal{S}$ es paralela a L pero no está contenida en L, entonces $\mathcal{S} \cap L$ es un parábola, pero $\mathcal{S}' \cap L$ es una hipérbola, ya que L no es paralelo a ninguna generatriz de $\mathcal{S}'$ y, además, L corta a las dos hojas del cono $\mathcal{S}'$ (se puede precisar más, viendo que el ángulo β que forma el eje E con un vector v perpendicular a L pertenece al intervalo $(\pi/2 - \alpha', \pi/2]$; ver figura 4

Pregunta: dada una E 2GR 2VAR, siempre que se pueda despejar una de las variables (en función de la otra y sin usar raíces cuadradas), ¿tendremos una hipérbola o un parábola? Razona la respuesta.

Respuesta somera: SÍ. Veamos por qué. Supongamos que es y la variable que se puede despejar en función de x en la ecuación de segundo grado dada (el caso contrario sería análogo.) Se presentan 2 casos: si al despejar obtenemos

1. y igual a polinomio en x de grado 2 $\Rightarrow$ PARÁBOLA (completa los detalles)
2. y igual a expresión racional (i.e., cociente de polinomios) en x. Será de la forma

$$y = \frac{px^2 + qx + r}{x + s}, \qquad \text{ciertos } p, q, r, s \in \mathbb{R} \tag{18}$$

$\Rightarrow$ HIPÉRBOLA (completa los detalles)

Ejemplo 1: si $P = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}}$, averigua de qué giro se trata. Averigua en qué se convierte la ecuación dada.

Respuesta: Tenemos $P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ luego $\cos\alpha = 3/\sqrt{13}$, $\operatorname{sen}\alpha = 2/\sqrt{13} \Rightarrow \alpha$ es agudo y vale $\simeq 0,5880$ radianes, algo más de $33°$. El cambio de coordenadas propuesto es $X' = PX$, luego $P^T X' = X$ (por ser $P^{-1} = P^T$) y la parte de segundo grado de la ecuación dada queda así

$$X^T A X = X'^T P A P^T X' = (x', y') \begin{pmatrix} 51/13 & 8/13 \\ 8/13 & -12/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{13}(51x'^2 - 12y'^2 + 16x'y') \tag{19}$$

Abandonamos este camino aquí, porque, a pesar de que la matriz P es ortogonal con det positivo, no hemos llegado a una expresión más simple de la cónica dada. Por expresión má

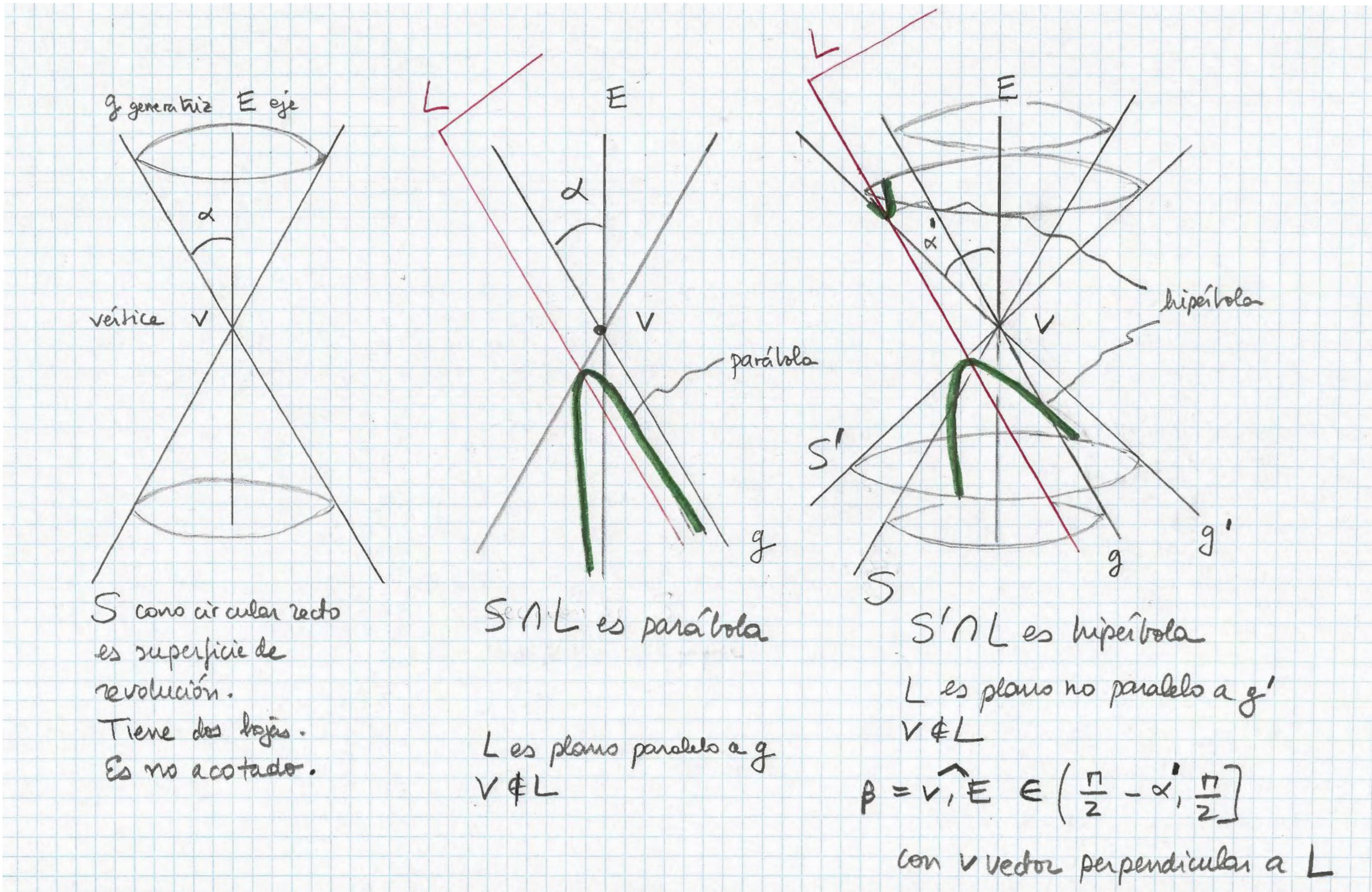

FIGURA 4. Conos circulares rectos $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ y plano L que los corta.

simple queremos decir **sin término mixto**, es decir, sin término en xy, es decir, tal que **la matriz de la parte de segundo grado sea diagonal**.

Ejemplo 1: ¿Qué curva está dada por la ecuación $x^2 - 6x - 4y^2 + 8y + 1 = 0$?
Respuesta: Va a salir o bien una hipérbola o bien un par de rectas que se cortan (en vista de los signos de x^2 e y^2 y de que no hay término mixto). Veamos: completando cuadrados en la variable x tenemos

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9 \tag{20}$$

y completando en la y tenemos

$$-4y^2 + 8y = -4(y^2 - 2y) = -4(y-1)^2 + 4 \tag{21}$$

Hacemos el cambio de variables (traslación) $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ obteniendo que la ecuación dada se convierte en

$$x'^2 - 9 - 4y'^2 + 4 + 1 = x'^2 - 4y'^2 - 4 = 0 \Rightarrow \frac{x'^2}{4} - y'^2 = 1 \quad \text{es hipérbola} \tag{22}$$

Dibuja esta hipérbola en el sistema de coordenadas X y en X'. Calcula todos sus elementos geom. en ambos sistemas de coordenadas (primero se hace en X', que es más fácil y luego se lleva esta información a las coordenadas X.)
OBS: El mismo proceso aplicado a la ecuación $x^2 - 6x - 4y^2 + 8y + 5 = 0$ conduce a

$$\frac{x'^2}{4} - y'^2 = 0 \Rightarrow \frac{x'}{2} - y' = 0 \text{ ó } \frac{x'}{2} + y' = 0 \quad \text{es par de rectas que se cortan en el origen} \tag{23}$$

OBS: al principio del problema no podía adivinar (a simple vista) si el término independiente en (22) iba a salir nulo o no (que es la diferencia entre hipérbola y par de rectas que se cortan)
Ejemplo 2: ¿Qué curva está dada por la ecuación $x^2 - 6x + 4y^2 - 8y + 9 = 0$?
Respuesta: Va a salir elipse o punto o el vacío (en vista de los signos de x^2 e y^2 y de que no hay término mixto). Veamos: completando cuadrados en las variables x e y (como arriba) obtenemos el cambio de variables (traslación) $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ y la ecuación dada se convierte en

$$x'^2 - 9 + 4y'^2 - 4 + 9 = 0 \Rightarrow \frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1 \quad \text{es elipse} \tag{24}$$

Dibuja esta curva en el sistema de coordenadas X y en X'. Calcula todos sus elementos geom. en ambos sistemas de coordenadas (primero se hace en X', que es más fácil y luego se lleva esta información a las coordenadas X.)
OBS: al principio del problema no podía adivinar si el término independiente iba a salir positivo, negativo o nulo (que es la diferencia entre los tres tipos de cónica propuestos)

Vamos a la teoría. Usando las notaciones de Merino Santos sección 3.5, pag 328, ¿por qué **diagonalizar (la parte de segundo grado) con matriz de paso ortogonal de determinante positivo**? Diagonalizamos la matriz A (por semejanza) a fin de simplificar (eliminando el término mixto) y lo hacemos con matriz de paso P ortogonal porque es *posible* (gracias al **Teorema Espectral** y su corolario (pags 212 y ss.), por ser $A = A^T \in M_2(\mathbb{R})$) y es *ventajoso*, porque el cambio de coordenadas es $X = PX'$, y el cambio inverso es $P^T X = P^{-1} X = X'$. Pedimos además que $det(P) = 1 > 0$ porque es *posible.* Esto nos dice este cambio de coordenadas supone un giro de ejes (lineal). Llegamos a matriz diagonal $D \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $D = P^{-1}AP = P^T AP$, *diagonalizando A, a la vez, por semejanza y por congruencia* (Merino Santos lo llama *diagonalización por semejanza ortogonal*).

Ecuación reducida de una cónica (real afín euclídea): definición y obtención. La definición la tenemos en Merino Santos pag 329 sección 3.6 y es preciso aprenderla. Como nos explica el texto, la razón por la cual las ecuaciones de las cónicas tienen "pocos términos (no nulos)" es porque "están bien colocadas" (i.e., los ejes de simetría de las cónicas coinciden con los ejes coordenados). Visto al revés, si la ecuación de una cónica tiene muchos términos no nulos es porque sus ejes de simetería no coinciden con los ejes coordenados. Mediante movimientos en $\mathbb{R}^2$, deseamos obtener una ecuación de la misma cónica con "pocos términos (no nulos)". Cuando lo hayamos conseguido, mirando atentamente a esta ecuación sabremos de qué tipo de cónica se trata y, además, seremos capaces de calcular sus parámetros y elementos geométricos. El método costa de dos pasos: (a) diagonalizar la parte de segundo grado (con matriz de paso ortogonal de determinante positivo) y (b) completar cuadrados a fin de eliminar, en la medida de lo posible, los términos de grado 1 y eliminar, si es posible, en término constante. El paso (a) supone un giro de ejes (donde el origen no cambia) y el paso

(b) supone una traslación de ejes (donde el origen sí cambia). La composición de los dos pasos es un movimiento de $\mathbb{R}^2$ que conserva la orientación, las distancias y los ángulos.
Veamos ejemplos. La figura 5 representa la hipérbola de ejercicio 7, 1) viendo $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como función real de la variable real x así: $y = \frac{3x^2+8x-1}{4x}$.

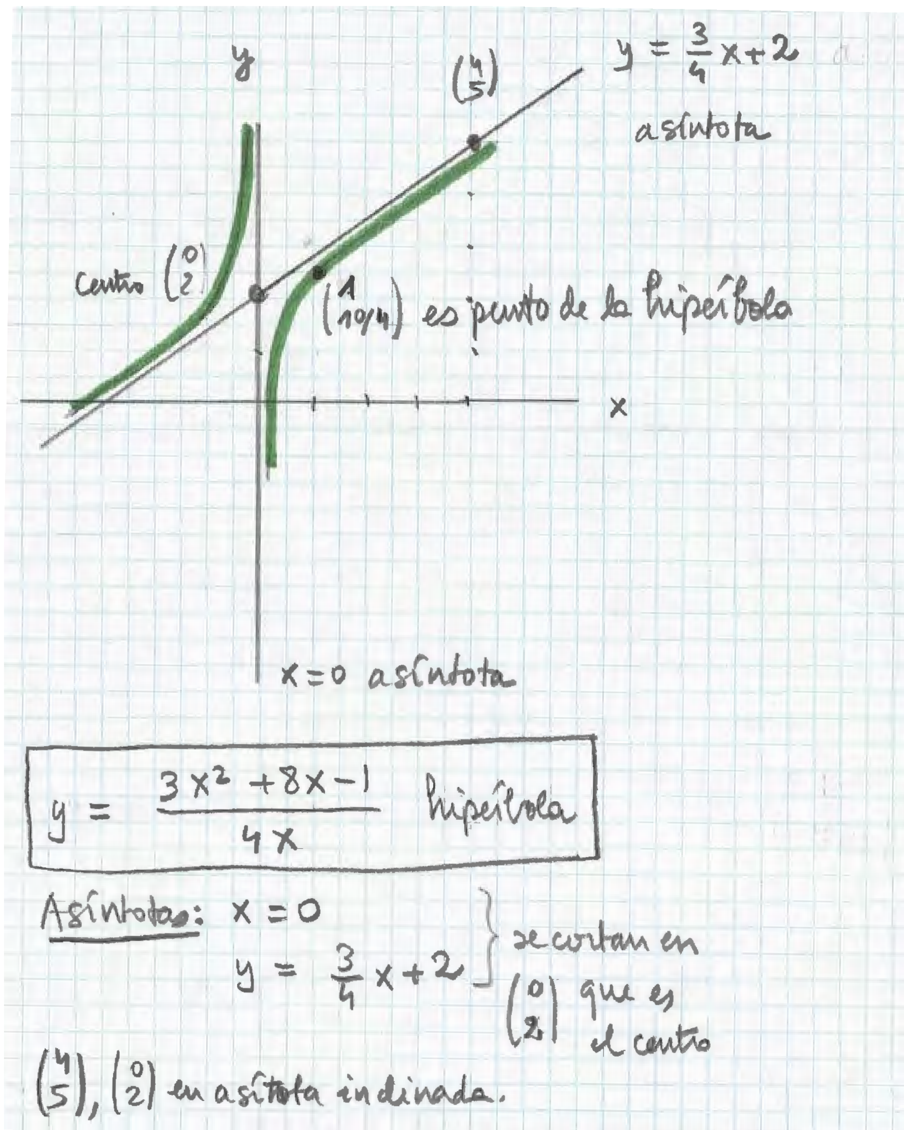

Figura 5. Hipérbola $y = \frac{3x^2+8x-1}{4x}$.