Notas y comentarios sobre Álgebra Lineal, Cap 3, curso 2019–20 (editadas en 2020–21)
que se apoyan en el libro de texto Merino–Santos

M. J. de la Puente Muñoz
Facultad de Matemáticas, UCM

18 de mayo de 2021

Hoja 11, ejercicio 7, 1). Método en dos pasos.

$$3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0 \tag{1}$$

se expresa matricialmente así

$$X^T AX + BX + a_{00} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (8, 0), \quad a_{00} = -1, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

Paso 1: *diagonalizamos la parte de segundo grado, con matriz de paso P ortogonal de det positivo,* así:
$P_A(T) = T^2 - \operatorname{tr}(A)T + \det(A) = T^2 - 3T - 4 = (T-4)(T+1) \Rightarrow D = \operatorname{diag}(-1, 4)$; un vector unitario en $\ker(A + I)$ es, p.e., $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$; un vector unitario en $\ker(A - 4I)$ es, p.e., $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$ y tomo $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ +2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ matriz ortogonal de det -1. Modifico, (p.e., la segunda columna de P) a fin de que $\det P = 1$ así: $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Ahora P es matriz ortogonal de det 1 y tenemos $D = P^{-1}AP = P^T AP$. El cambio de coordenadas $X = PX'$ proporciona $X^T AX = (PX')^T A(PX') = X'^T P^T APX' = X'^T DX' = -x'^2 + 4y'^2$ (ya hemos eliminado el término mixto —y, como hemos razonado más arriba en Ejemplo 1, ya sé que va a salir hipérbola o par de rectas que se cortan) y $BX = BPX' = 8(x'/\sqrt{5} - 2y'/\sqrt{5})$, con $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. La ecuación (1) se convierte en

$$-x'^2 + 4y'^2 + 8(x'/\sqrt{5} - 2y'/\sqrt{5}) - 1 = 0 \tag{3}$$

Paso 2: *completando cuadrados, eliminar, en la medida de lo posible, los términos de grado 1,* así:

$$-x'^2 + 8x'/\sqrt{5} = -x''^2 + 16/5, \quad x'' = x' - 4/\sqrt{5}$$
$$4y'^2 - 16y'/\sqrt{5} = 4y''^2 - 16/5, \quad y'' = y' - 2/\sqrt{5}$$

La ecuación (3) se convierte en

$$-x''^2 + 16/5 + 4y''^2 - 16/5 - 1 = -x''^2 + 4y''^2 - 1 = 0 \Rightarrow \text{HIPÉRBOLA} \tag{4}$$

con $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$. Las tres ecuaciones (1),(3) y(4), representan la misma cónica (lo que ha cambiado son los sistemas de referencia usados). El segundo cambio de coordenadas es la traslación siguiente $\begin{cases} x'' = x' - 4/\sqrt{5} \\ y'' = y' - 2/\sqrt{5} \end{cases}$, i.e., $X'' = X' + v$, con $v = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ vector. Si componemos los dos cambios de coordenadas realizados, obtenemos el *movimiento*

$$X'' = v + X' = v + P^T X, \qquad \text{equivalentemente } P(X'' - v) = X \tag{5}$$

que es el giro (de matriz P^T) seguido de la traslación (de vector v). Para hacer una representación gráfica de la cónica dada, primero se hace en coordenadas X'', luego en X' y finalmente en X. Los parámetros se calculan en coordenadas X'' (y no cambian). Los elementos geométricos se hallan primero en coordenadas X'', luego en X' y finalmente en X. Veamos cómo: (4) se expresa así:

(6) $\quad -x''^2 + 4y''^2 = -x''^2 + \dfrac{y''^2}{1/4} = 1 \Rightarrow$ semieje real $1/2$, semieje imag 1, $d^2 = 1/4 + 1 = 5/4$

(7)

$0 = -x''^2 + 4y''^2 = (-x'' + 2y'')(x'' + 2y'')$ asínt., $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1/2 \end{pmatrix}$ vértices, $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{5}/2 \end{pmatrix}$ focos, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ centro

Aplicando (5), en coordenadas X el centro es, $P(0 - v) = -Pv = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, un vértice es $P\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} - v\right) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2 + (1/2\sqrt{5}) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -0,4472 \\ 2,8994 \end{pmatrix}$. El otro vértice, focos, asíntotas, etc. se obtienen de modo análogo en coordenadas X.

La matriz $P^T = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$, con $\cos\beta = 1/\sqrt{5} \simeq 0,4472 \simeq \cos 63°$, $\operatorname{sen}\beta = -2/\sqrt{5}$ representa un giro de amplitud $63°$, sentido negativo. Ver figura 1.

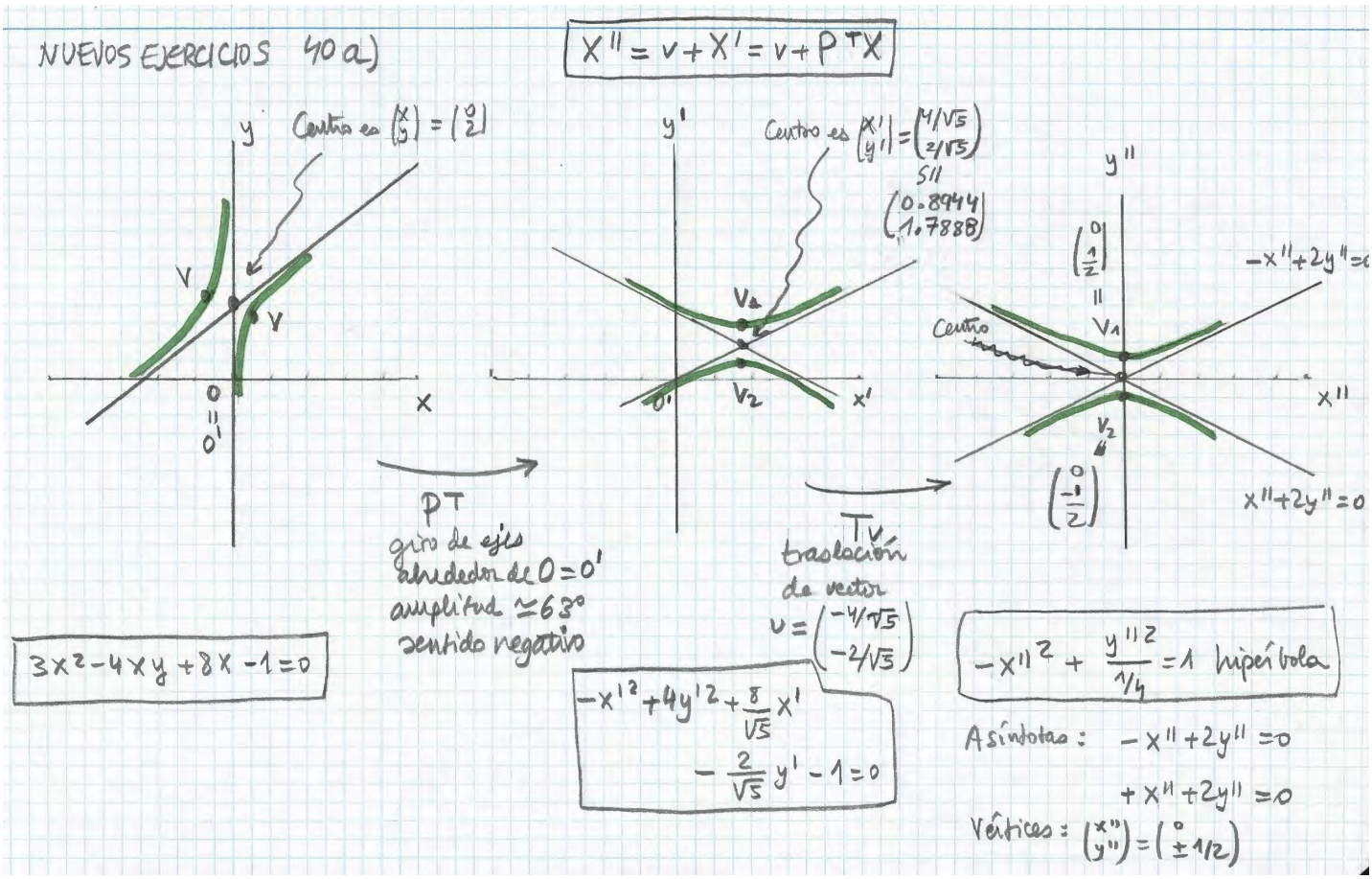

FIGURA 1. Hipérbola en los tres sistemas de referencia.

b. Una ecuación reducida es $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{6}=1$, elipse, $a=3$ es semieje mayor, $b=\sqrt{6}\simeq 2{,}4494$ es semieje menor, $a^2=b^2+d^2$, $d=\sqrt{3}\simeq 1{,}7321$ es semidistancia focal,
$\epsilon=\frac{d}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}}\simeq 0{,}5774<1$ es excentricidad, cambio de coordenadas (es traslación) $\begin{cases}x'=x-2\\ y'=y-3\end{cases}$, centro es $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ que es $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, vértices son $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm a\\0\end{pmatrix}$, que son $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, focos son $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm d\\0\end{pmatrix}$, que son $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d+2\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d+2\\3\end{pmatrix}$, directrices son $x'=\pm\frac{a^2}{d}=\pm\frac{9}{\sqrt{3}}\simeq\pm 5{,}1962$.
Comprobamos que el punto $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ satisface la ecuación dada:
$6\times 25+9\times 9-24\times 5-54\times 3+51=150+81-120-162+51=0$.
c. Una ecuación reducida es $\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{9}=1$, elipse, $a=3$ es semieje mayor, $b=2$ es semieje menor, $a^2=b^2+d^2$, $d=\sqrt{5}\simeq 2{,}2361$ es semidistancia focal, $\epsilon=\frac{d}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\simeq 0{,}7454<1$ es excentricidad, cambio de coordenadas (es traslación) $\begin{cases}x'=x-1\\ y'=y+2\end{cases}$, centro es $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ que es $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, vértices son $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\pm a\end{pmatrix}$, que son $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$, focos son $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\pm d\end{pmatrix}$, que son $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{5}-2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{5}-2\end{pmatrix}$, directrices son $y'=\pm\frac{a^2}{d}=\pm\frac{9}{\sqrt{3}}\simeq\pm 4{,}0247$.
Comprobamos que el punto $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ satisface la ecuación dada:
$9\times 9+4\times 4-18\times 3+16\times(-2)-11=81+16-54-32-11=0$.
d. Una ecuación reducida es $4x'^2-y'^2=0$, (diferencia de cuadrados) que se descompone en $2x'-y'=0$ ó $2x'+y'=0$, par de rectas que se cortan en el punto $x'=0=y'$ (es el centro de esta cónica reducible), cambio de coordenadas (es traslación) $\begin{cases}x'=x+7\\ y'=y-1\end{cases}$, centro es $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$.
Las rectas son $0=2x'-y'=2(x+7)-(y-1)=2x-y+15$ y
$0=2x'+y'=2(x+7)+(y-1)=2x+y+13$ y verificamos que

$$(2x-y+15)(2x+y+13)=4x^2-y^2+56x+2y+195$$

es el polinomio dado. Comprobamos que el punto $\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ satisface la ecuación dada:
$4\times 36-9-56\times 6+2\times 3+195=144-9-336+6+195=0$.
CULTURA GENERAL: ¿**Cómo se pueden trazar cónicas de manera precisa**?
Circunferencias con un compás; elipses con dos estacas y una cuerda (llamado método del agrimensor o "pins and stick method") `https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse` o con el elipsógrafo de Arquímedes `https://en.wikipedia.org/wiki/Trammel_of_Archimedes`. Hay otros más y también hay métodos para párabolas e hipérbolas.

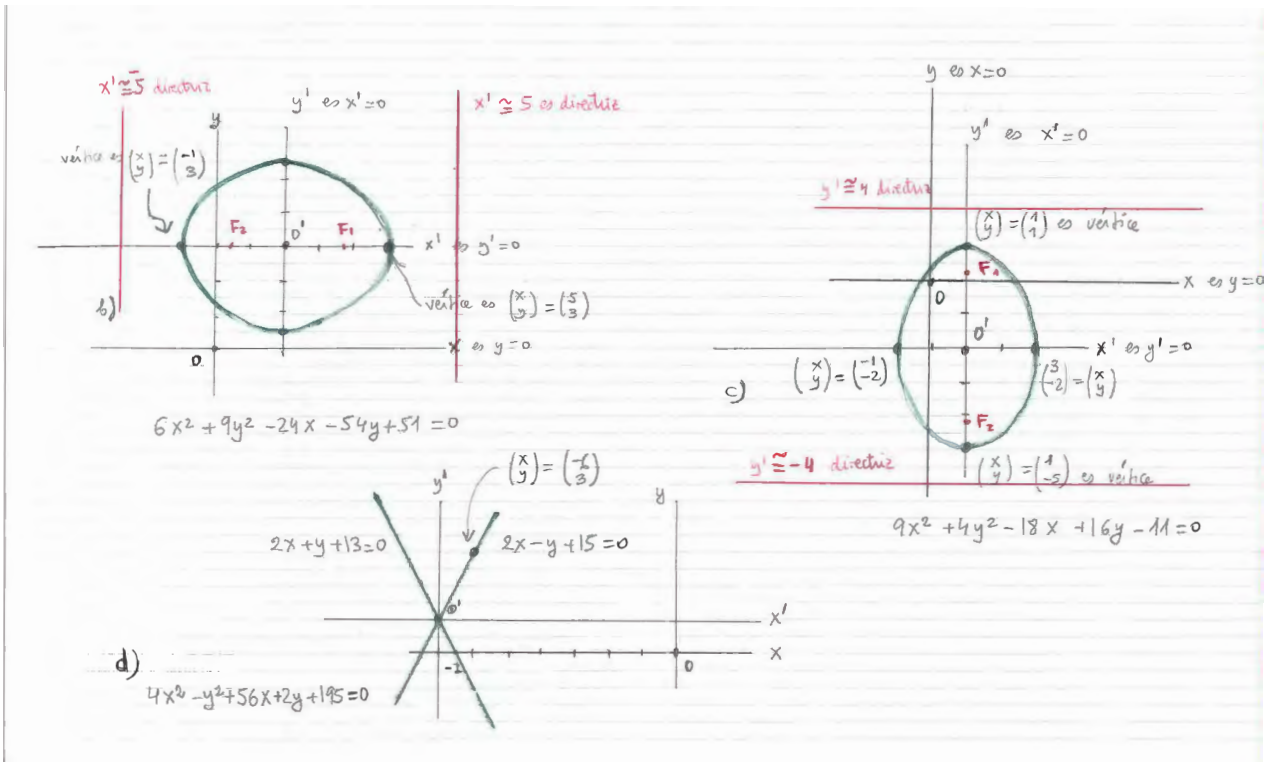

FIGURA 2. Cónicas de apartados b,c,d de ejercicio 7 de hoja 11.

Hoja 11, ejercicio 5, c) $x^2 - 7y + 2 = 0$ a simple vista sabemos que se trata de una parábola (una variable lineal y la otra cuadrática) a pesar de que esta **no** es ecuación reducida. Para obtener ecuación reducida, debemos rematar el paso 2: reducir, en la medida de lo posible, el número de términos lineales no nulos, y se hace así:

$$-7y + 2 = -7\,(y - 2/7) = -7y', \qquad y' = y - 2/7 \tag{8}$$

quedando la ecuación reducida $x'^2 - 7y' = 0$, tras el cambio de coordenadas (traslación) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 2/7 \end{cases}$ esto es $X' = X + v$ con $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/7 \end{pmatrix}$ vector. Dibuja la parábola obtenida en los dos sistemas se referencia y calcula sus parámetros y elementos geométricos. Solu: semidistancia focal es $p/2 = 7/4$.

Algunas parametrizaciones de elipses e hipérbolas. De la **igualdad fundamental de la trigonometría** $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1, \forall\theta \in [0, 2\pi)$[1], deducimos que $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta, \ (\theta \in [0, 2\pi)) \end{cases}$ son unas ec. paramétricas de la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro el origen y radio $r \in \mathbb{R}, r > 0$ (cuya eq. es, obviamente, $x^2 + y^2 - r^2 = 0$). Aquí el parámetro θ es el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con el semieje x positivo, con $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$. Considerando la elipse $\mathcal{C}$ de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, podemos escribir $\begin{cases} x/a = \cos\theta \\ y/b = \operatorname{sen}\theta, \ (\theta \in [0, 2\pi)) \end{cases}$ luego

[1] O cualquier otro intervalo de longitud 2π.

$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\,\mathrm{sen}\,\theta, \ (\theta \in [0, 2\pi)) \end{cases}$ son unas *ecuaciones paramétricas de dicha elipse*. El parámetro θ **no** es el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con el semieje x positivo, con $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$, pero tiene una interpretación geométrica sencilla debida a La Hire; ver explicación y figuras en `https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse`.

Dividiendo la igualdad fundamental de la trigonometría por $\cos\theta$, obtenemos $1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$, luego $1 = \sec^2\theta - \tan^2\theta, \forall\theta \in [0, 2\pi)$[2] También es cierto que $1 = \sec^2 2\theta - \tan^2 2\theta, \forall\theta \in [0, \pi)$.[3] Considerando la hipérbola $\mathcal{C}$ de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, podemos escribir

$\begin{cases} x = a\sec 2\theta \\ y = b\tan 2\theta, \ (\theta \in [0, \pi)) \end{cases}$ hemos obtenido unas *ecuaciones paramétricas de dicha hipérbola.*

Las funciones (reales de variable real) **coseno hiperbólico** y **seno hiperbólico** se definen así:

$$\cosh t := \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \mathrm{senh}\, t := \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

y es inmediato comprobar que $\cosh^2 t - \mathrm{senh}^2 t = 1, \forall t \in \mathbb{R}$, luego, teniendo en cuenta que $\cosh t > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ deducimos que $\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\,\mathrm{senh}\, t, \ (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$ son unas *ecuaciones paramétricas de la componente conexa de dicha hipérbola que está contenida en el semiespacio* $x > 0$. Además, la otra componente conexa está parametrizada así: $\begin{cases} x = -a\cosh t \\ y = b\,\mathrm{senh}\, t, \ (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$ Hemos obtenido otras *ecuaciones paramétricas de dicha hipérbola.*

Existen otras parametrizaciones de las curvas consideradas (que se basan en otras ideas matemáticas). Las más destacadas son: (a) mediante expresiones racionales (i.e., cocientes de polinomios) —geometría algebraica— y (b) mediante el parámetro *longitud de arco* —geometría diferencial—.

Ecuaciones reducidas de cónicas en coordenadas polares. Las *coordenadas polares* (en el plano $\mathbb{R}^2$) son una alternativa (clásica) a las coordenadas cartesianas. Se basan en dos datos (que constituyen el sistema de referencia): dato 1: un punto de $\mathbb{R}^2$ llamado *polo* (lo representaremos por la letra O, pero **no** es necesario que coincida con el origen de coord. cartesiano), dato 2: una semirrecta s que nace en el polo, llamado *eje*. Un punto cualquiera $P \in \mathbb{R}^2$ se representa por dos números, r y θ, respecto del sistema (O, s) anterior como sigue (ver figura 3)

$$(9) \quad r = \|\overrightarrow{OP}\| \in \mathbb{R}, r \geq 0 \ \textit{radio}, \quad \theta = \widehat{s, \overrightarrow{OP}} \in [0, 2\pi)^4 \textit{ángulo orientado} \ (\text{o } \textit{argumento})$$

Escribimos $P = (r, \theta)$ y decimos que las coord. polares de P resp. del sistema (O, s) son (r, θ). La relación que satisfacen r y θ cuando P recorre una cierta curva $\mathcal{C}$ se llama *ecuación (en coordenadas polares) de la curva* $\mathcal{C}$ respecto de (O, s). Obviamente, si cambiamos el sistema de ref. cambiará la ecuación de la curva. Por ejemplo, (a) si $\mathcal{C}$ es una circunferencia en el

[2] Recordemos que $\sec\theta$ es $\frac{1}{\cos\theta}$, por definición.

[3] OBS 1: Hay que tener en cuenta que las funciones **secante** y **tangente** no están definidas en los valores de θ que anulan el coseno: en dichos valores, las funciones secante y tangente tienden a $\pm\infty$. OBS 2: el factor 2 se introduce por conveniencia.

[4] O cualquier otro intervalo de longitud 2π.

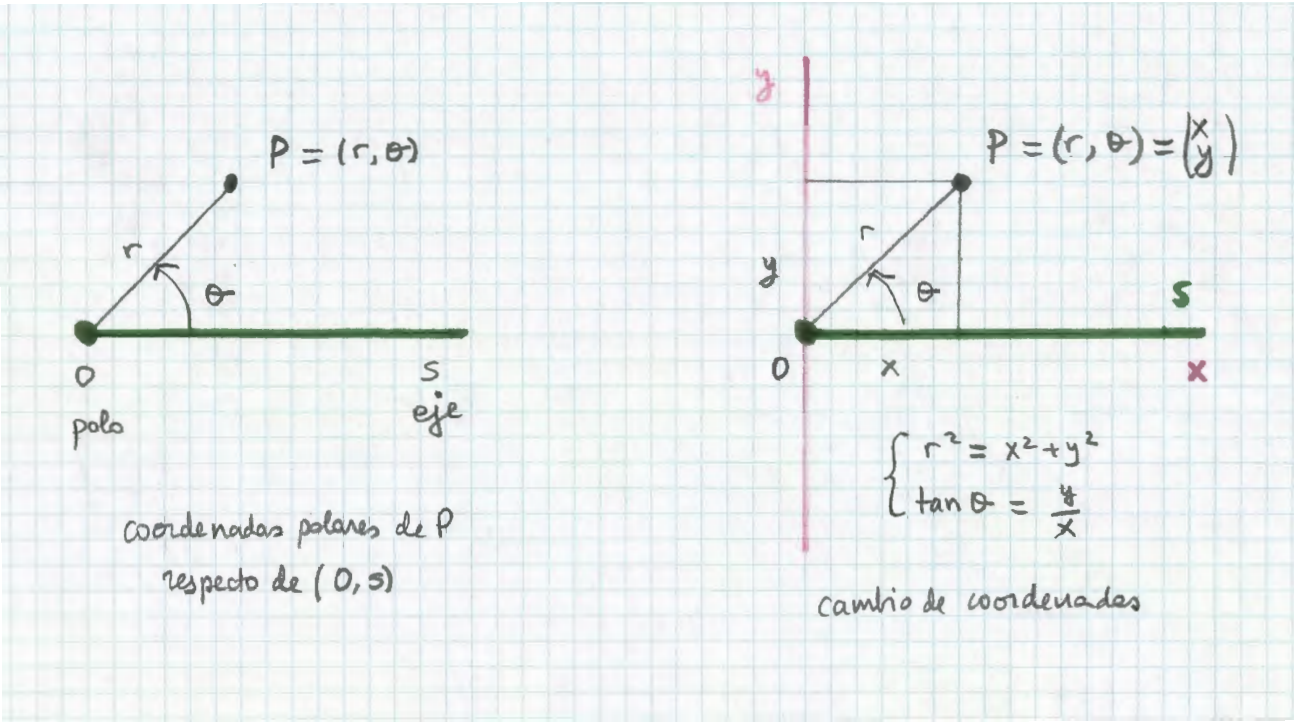

FIGURA 3. Coordenadas polares.

plano, con centro O y radio $k \in \mathbb{R}, k > 0$, la ecuación de $\mathcal{C}$ resp. (O, s) es $r = k$ (sencillísima), *cualquiera que sea la semirrecta* s. Por ejemplo, (b) $r = 3\theta$, $r = e^\theta$, $r = 3^\theta$, $r = \log\theta$, $r = \theta^2$ etc. son ecuaciones de diferentes tipos de espirales con origen en O.[5] Vemos así que las coord. polares pueden ser más útiles que las coord. cartesianas, en ciertos contextos; ver `https://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system`.

OBS 1: Respecto de (O, s) las coordenadas de O no son únicas, pues $(0, \theta)$ representan dicho punto, $\forall\theta$.
OBS 2: Por conveniencia, es frecuente alterar las restricciones $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ encontradas en (9) como sigue: $\theta \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ y cuando sea $r < 0$, se interpetará el punto $P = (r, \theta)$ así:

$$r = -\|\overrightarrow{OP}\|, \quad \theta = \pi + \widehat{s, \overrightarrow{OP}}.$$

Relación entre coord. cartesianas y coord. polares **si los orígenes coinciden y s es el semieje x no negativo** (ver figura 3). Por el **Teorema de Pitágoras**, tenemos lo siguiente:

$$(10) \qquad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{o, equivalentemente} \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{cases}$$

Aplicando (10), podemos verificar el ejemplo (a): la ecuación (en coord. cartesianas) $x^2 + y^2 = k^2$ se convierte en la ecuación (en coord. polares) $r = k$ y recíprocamente.

Es conocido desde antaño que las cónicas irreducibles (reales afines euclídeas) tienen una ecuación en coord. polares sencilla, **si se toma como polo un foco y el eje polar coincide con un eje de simetría de la cónica.** Veamos un ejemplo: el foco de la parábola

[5] Es habitual (pero no imprescindible) despejar r en función de θ.

de ecuación $y^2 = 2px$ es $F = \begin{pmatrix} p/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vamos a suponer $p < 0$. Tomamos $O = F$ y s semirrecta horizontal del semiplano de la decha. naciendo en F (ver figura 4). El cambio de coord. es

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} r^2 = (x - p/2)^2 + y^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x - p/2} \end{cases} \quad \text{o, equivalentemente} \quad \begin{cases} x = p/2 + r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

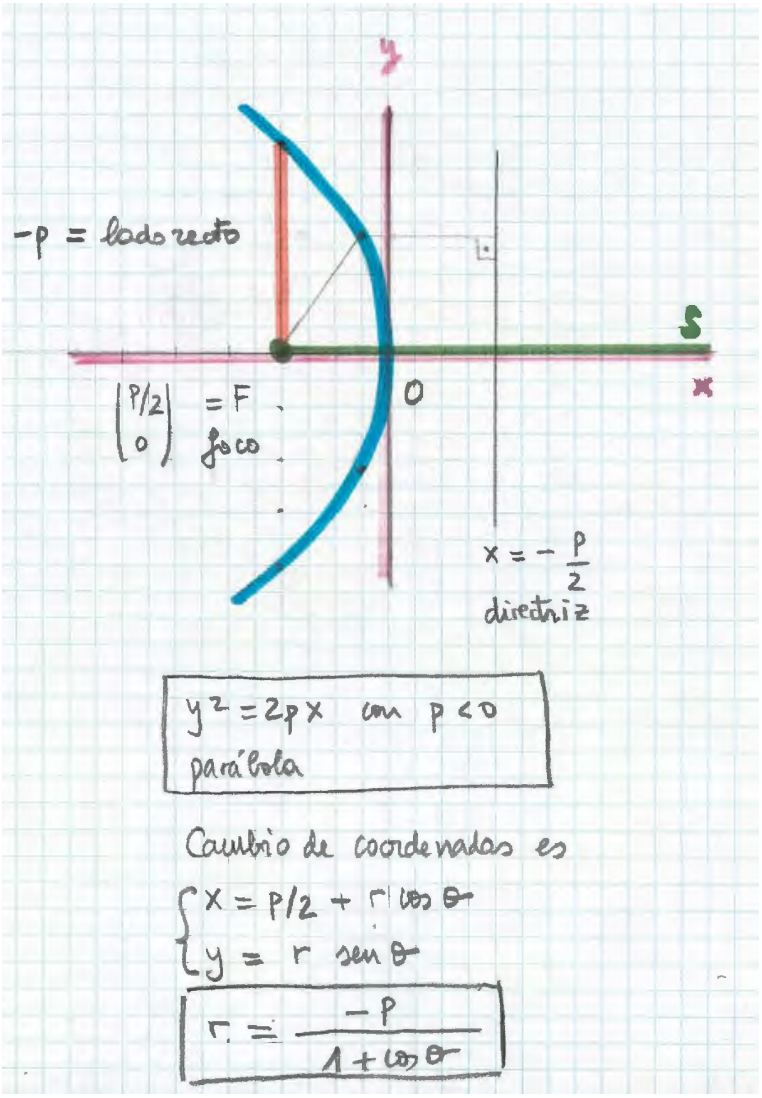

FIGURA 4. La parábola de ec. (en coord. cartesianas) $y^2 = 2px$ tiene ec. $r = \frac{-p}{1+\cos\theta}$ (en coord. polares), con $p < 0$.

Sustituyendo x e y por sus valores obtenemos

$$\text{(12)} \qquad 0 = y^2 - 2px = (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 - 2p\,(p/2 + r\cos\theta) \Rightarrow r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta - r2p\cos\theta - p^2 = 0$$

ecuación de segundo grado en r, cuyas soluciones son

(13)

$$r = \frac{p\cos\theta \pm \sqrt{p^2\cos^2\theta + p^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}}{\mathrm{sen}^2\,\theta} \Rightarrow r = \frac{p\cos\theta \pm p}{\mathrm{sen}^2\,\theta} = \frac{p(\cos\theta \pm 1)}{(1 - \cos^2\theta)} = \frac{p(\cos\theta \pm 1)}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}$$

que proporciona dos posibilidades: $r = \frac{-p}{1+\cos\theta}$ ó $r = \frac{p}{1-\cos\theta} = \frac{p}{1+\cos(\pi-\theta)}$. Cualquiera de ellas describe la parábola dada. Nos quedamos, p.e., con la primera:

$$r = \frac{-p}{1+\cos\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \text{ ecuación en coord. polares de parábola } y^2 = 2px,\ p < 0 \tag{14}$$

En general se tiene que

$$r = \frac{\ell}{1+\epsilon\cos\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \tag{15}$$

es la ecuación en coord. polares de una cónica irreducible cuya excentricidad es ϵ. El parámetro ℓ se llama *semilado recto*, y es, claramente, el radio correspondiente a $\theta = \pi/2$ (ya que $\cos\pi/2 = 0$). En el caso de la parábola anterior tenemos $\ell = -p > 0$.

Las parametrizaciones de elipse e hipérbola sirven para trasformar esas curvas mediante movimientos. Veamos un ejemplo.

Estamos estudiando las cónicas *reales afines euclídeas*. Vamos a la tabla de ecuaciones reducidas de las cónicas (Merino Santos, pag. 332, sec 3.6). ¿Qué quieren decir los autores cuando escriben elipse imaginaria? ¿Es posible hallar una expresión más precisa, en el ámbito real? Sí. La ecuación $\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 = -c^2$ con $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ no nulos describe **el conjunto vacío**, ya que el miembro de la izquierda es no negativo y el de la derecha es negativo (luego no existen $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfagan esa ecuación). ¿Qué quieren decir los autores cuando escriben par de rectas imaginarias paralelas? ¿Es posible hallar una expresión más precisa, usando términos reales (sobre $\mathbb{R}$)? Sí. La ecuación $y^2 = -c^2$ con $c \in \mathbb{R}$ no nulo describe **el conjunto vacío**, ya que el miembro de la izquierda es no negativo y el de la derecha es negativo (luego no existen $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfagan esa ecuación).
Nuestra **clasificación de las cónicas reales afines euclídeas** es la siguiente[6] (DISTINTA DE MERINO–SANTOS):

- NO DEGENERADAS IRREDUCIBLES: elipses, parábolas e hipérbolas,
- NO DEGENERADAS REDUCIBLES: pares de rectas que se cortan, pares de rectas paralelas y rectas dobles,
- DEGENERADAS: un punto y el vacío.

Las REDUCIBLES son aquellas en las que el polinomio que define la cónica es reducible (sobre $\mathbb{R}$), es decir, es producto de dos polinomios reales, ambos de grado 1. Las DEGENERADAS son aquellas en las que la dimensión[7] no es la esperada, sino menor (esperábamos una curva —un grado de libertad— y en cambio obtenemos un punto o ninguno.)

Proposición: Dada la cónica (real afín euclídea) $\mathcal{C} : \widetilde{X}^T\widetilde{A}\widetilde{X} = 0$, se tiene que son invariantes de $\mathcal{C}$ mediante movimientos en $\mathbb{R}^2$ los siguientes valores reales

1. $\det(\widetilde{A}), \mathrm{rg}(\widetilde{A}), \det(A)$ y $\mathrm{tr}(A)$
2. los autovalores de A (y, por tanto sus signos así como el hecho de que uno de ellos sea nulo)

[6] Sobre los números reales y más lógica.

[7] No es el concepto de dimensión que hemos estudiado en la primera parte del curso (número de elementos en una base). Es, de un modo impreciso, el concepto de *grados de libertad*: sobre una curva, un punto se mueve con un grado de libertad; sobre una superficie, lo hace con dos grados de libertad, etc.

Demostración: En $\mathbb{R}^2$ trabajaremos con el sistema de ref. canónico $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}_c\}$. Sea $\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ - & & - \\ C & | & Q \end{pmatrix}$ la matriz de un movimiento de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathcal{R}_c, \mathcal{R}_c$), con $Q \in M_2(\mathbb{R})$ ortogonal. Si la expresión matricial de este movimiento es

$$\widetilde{X} = \widetilde{Q}\widetilde{X'} \tag{16}$$

entonces, la imagen de $\mathcal{C}$ (por el movimiento inverso) tendrá ecuación

$$0 = \widetilde{X^T}\widetilde{A}\widetilde{X} = \widetilde{X'^T}\widetilde{Q^T}\widetilde{A}\widetilde{Q}\widetilde{X'} \tag{17}$$

y la matriz $\widetilde{Q^T}\widetilde{A}\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ - & & - \\ \text{algo} & | & Q^TAQ \end{pmatrix}$ representa a la imagen de $\mathcal{C}$ (por el movimiento inverso). Observemos que, por la forma de las cajas, se cumple
$\det \widetilde{Q} = \det Q = \pm 1 = \det Q^{-1} = \det Q^T = \det \widetilde{Q^T}$.
Recordemos que (a) el espectro de cualquier matriz cuadrada es invariante por semejanza, (b) el determinante (resp. traza) de cualquier matriz cuadrada es el producto (resp. suma) de sus autovalores, luego (c) tanto determinante como traza de cualquier matriz cuadrada son invariantes por semejanza.[8] Así pues

- $\operatorname{sp} A = \operatorname{sp}(Q^{-1}AQ) = \operatorname{sp}(Q^TAQ)$, lo que implica $\det A = \det(Q^TAQ)$ y $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(Q^TAQ)$
- $\det \widetilde{A} = \det(\widetilde{Q^T}\widetilde{A}\widetilde{Q})$

lo que demuestra el enunciado. □

Como nuestra clasificación de cónicas es distinta de la de Merino Santos, **la tabla de pag 336 NO NOS FUNCIONA.** [9] En la tabla de pag 332 sec 3.6, calculemos los rangos $\operatorname{rg} \widetilde{A}$ y usemos que son invariantes por movimientos (proposición anterior). Además prestemos atención a los **signos de los autovalores** de A. Deducimos lo siguiente:

- $\operatorname{rg} \widetilde{A} = 3 \Rightarrow$ elipse, parábola, hipérbola o el vacío
- $\operatorname{rg} \widetilde{A} = 2 \Rightarrow$ pares de rectas (que se cortan o paralelas), punto o el vacío
- $\operatorname{rg} \widetilde{A} = 1 \Rightarrow$ recta doble

Si $\operatorname{sp} A = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, entonces

- si $0 \in \operatorname{sp} A \Rightarrow$ parábola, par de rectas paralelas, recta doble o vacío
- si $0 \notin \operatorname{sp} A$
  - si $\operatorname{sg}(\lambda_1) = \operatorname{sg}(\lambda_2) \Rightarrow$ elipse, punto o el vacío
  - si $\operatorname{sg}(\lambda_1) \neq \operatorname{sg}(\lambda_2) \Rightarrow$ hipérbola o par de rectas que se cortan

[8] De todas estas demostraciones la más fácil es esta: $\det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A \det P^{-1} \det P = \det A$.

[9] ¡Lo que siempre funciona es razonar!

Ejemplo. En $\mathbb{R}^2$ trabajaremos con el sistema de ref. canónico $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}_c\}$. Las matrices de $\mathcal{C}_t$ son

$$\widetilde{A_t} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -1 & 1 \\ - & - & - \\ -1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{array}\right), \quad A_t = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \tag{18}$$

y tenemos la cónica (dependiente del parámetro t)

$$\mathcal{C}_t : \widetilde{X}^T \widetilde{A_t} \widetilde{X} = 0. \tag{19}$$

Denotemos $\operatorname{sp} A_t = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\}$. Tenemos que

$$\det A_t = t^2 - 1 = (t-1)(t+1) = \lambda_1(t)\lambda_2(t), \qquad \operatorname{tr} A_t = 2t = \lambda_1(t) + \lambda_2(t), \tag{20}$$

y el polinomio característico de A_t es

$$\mathcal{P}_{A_t} = T^2 - 2tT + t^2 - 1 = (T - \lambda_1(t))(T - \lambda_2(t)). \tag{21}$$

El discriminante[10] de $\mathcal{P}_{A_t}$ es $4t^2 - 4(t^2-1) = 4 > 0$, lo que implica que $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ son reales y distintos, para todo $t \in \mathbb{R}$. Además

$$\det \widetilde{A_t} = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1). \tag{22}$$

Según la **clasificación de más arriba**, el tipo de $\mathcal{C}_t$ cambia cuando (a) $\operatorname{rg} \widetilde{A}$ cae o (b) se anula un autovalor de A (y entonces podrá cambiar de signo). Son los valores de $t \in \mathbb{R}$ siguientes: -1 y 3 (en ellos $\operatorname{rg} \widetilde{A}$ cae), así como ± 1 (en ellos hay un autovalor de A nulo); en resumen $-1, 1, 3$. Analizaremos también lo que ocurre en el caso $t = 0$ (porque lo pide el enunciado). Recogemos toda la información en la siguiente tabla, donde escribiremos λ_j en lugar de $\lambda_j(t)$, para aligerar la notación.

t	-1	0	1	3
$\det A_t = \lambda_1\lambda_2$	0	-1	0	8
$\operatorname{tr} A_t = \lambda_1 + \lambda_2$	-2	0	2	6
λ_1, λ_2	$\lambda_1\lambda_2 = 0$ $\lambda_1 + \lambda_2 = -2$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 0$	$\lambda_1\lambda_2 = -1$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 1$	$\lambda_1\lambda_2 = 0$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 2$	$\lambda_1\lambda_2 = 8$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 4$
m. diagonal D	$\begin{pmatrix} -2 & \\ & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \\ & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & \\ & 4 \end{pmatrix}$
$\det \widetilde{A_t}$	0	-3	-4	0
$\operatorname{rg} \widetilde{A_t}$	2	3	3	2
tipo	reducible	no degen. irred.	no degen. irred.	degenerada
cónica	par rectas paral.	hiperb. equil.	parábola	punto

El caso $t = -1$ es así: con $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = PX'$, $X'' = X' + v$, obtenemos $-2x''^2 + 4 = 0$, luego $(x'' - \sqrt{2})(x'' + \sqrt{2}) = x''^2 - 2 = 0$.
Deducimos de la tabla lo siguiente (y de algún cálculo adicional):

[10] El discriminante del polinomio $f = aT^2 + bT + c \in \mathbb{R}[T]$ es $b^2 - 4ac$ y su signo determina la existencia o no de raíces reales de f.

- si $t \in (-\infty, -1)$, entonces $\mathcal{C}_t$ es elipse,
- si $t \in (-1, 1)$, entonces $\mathcal{C}_t$ es hipérbola,
- si $t \in (1, 3)$, entonces $\mathcal{C}_t$ es elipse y
- si $t \in (3, \infty)$, entonces $\mathcal{C}_t$ es vacía ya que $\det A_t > 8$, $\operatorname{tr} A_t > 6$ nos dice que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ y además $\det \widetilde{A_t} > 0$ luego $\det \widetilde{A_t} / \det A_t > 0$ (esto proporciona el término indep. de la ec. reducida).

La gráfica de la función $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$t(x, y) = \frac{-1 + 2x - 2y - 2xy}{x^2 + y^2},$$

es una superficie $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ (ver figura). La función $t(x, y)$ **no** está definida en el punto $x = 0 = y$.

Para $t = 0$, tenemos la ecuación $1 - 2x + 2y + 2xy = 0$ que, al ser de grado 1 en y, proporciona una hipérbola, que se expresa como

$$y = \frac{2x - 1}{2x + 2} = \frac{x - 1/2}{x + 1},$$

con asíntota vertical $x = -1$ y asíntota horizontal $y = 1$[11] Las asíntotas se cortan en el punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, que es el centro de la hipérbola, y son rectas perpendiculares, por lo que es hip. equilátera (i.e., con excentricidad $\sqrt{2}$.)[12]

OBS: Las otras hipérbolas (con $0 \neq t \in (-1, 1)$) no resultan equiláteras, ya que $\lambda_1(t) \neq -\lambda_2(t)$.

OBS: Cada plano horizontal corta a la superficie $\mathcal{S}$ en una cónica de la familia dada. En la figura se ve que en nigún caso sale una recta doble. ¿Podemos demostrarlo algebraicamente? Sí. Basta comprobar que no existe valor de $t \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{rg} \widetilde{A}_t = 1$.

Sobre cónicas reales afines euclídeas; quinta parte.

0.44. NUEVOS EJERCICIOS.

Primera forma: Tomamos puntos $P_1, P_2, \ldots, P_5 \in \mathcal{C}$ cualesquiera, calculamos $s_E(P_1)$, $s_E(P_2), \ldots, s_E(P_5)$ (usando la matriz S') y después calculamos la ec. de la cónica que pasa por estos 5 puntos (estamos usando que por 5 puntos en posición general pasa una única cónica).

Segunda forma: Tomamos los dos vértices y los dos focos de $\mathcal{C}$, calculamos sus imágenes mediante s_E (usando la matriz S') y después calculamos la ec. de la cónica correspondiente (usamos que vértices se transforman en vértices y focos en focos).

Tercera forma: Es una variante de la segunda. Tomamos los 4 puntos en los que $\mathcal{C}$ corta a sus ejes de simetría, calculamos sus imágenes mediante s_E (usando la matriz S') y después calculamos la ec. de la cónica correspondiente (usamos que ejes de simetría se transforman en ejes de simetría).

Un poco de teoría. Sea $\mathcal{C}$ cónica irreducible no degenerada cualquiera. Para fijar ideas, pensemos que $\mathcal{C}$ es una elipse. Tomemos 4 puntos distintos en $\mathcal{C}$ cualesquiera: R_1, R_2, W_1, W_2. Nos preguntamos *cuántas cónicas pasan por esos 4 puntos.* Hay 4 cónicas obvias: (1) $\mathcal{C}$, (2) par de rectas $\mathcal{A}(R_1, R_2)$ y $\mathcal{A}(W_1, W_2)$, (3) par de rectas $\mathcal{A}(R_1, W_1)$ y $\mathcal{A}(R_2, W_2)$ y (4) par de rectas $\mathcal{A}(R_1, W_2)$ y $\mathcal{A}(W_1, R_2)$. Denotemos por $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}[x, y]$ polinomios que describen

[11] Se calcula así: asin. oblícua u horizontal es $y = mx + n$, con $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0$ (usando L'Hopital) y $n = \lim_{x \to +\infty} y - mx = \lim_{x \to +\infty} y = \frac{2}{2} = 1$.

[12] Esto también se deduce de que $-1 = \lambda_1(0) = -\lambda_2(0)$ (ver tabla.)

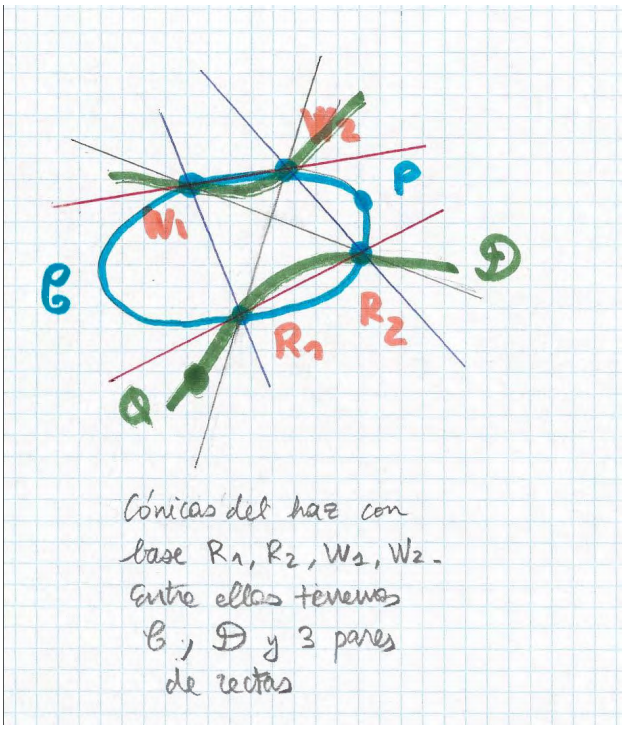

FIGURA 5. Haz de cónicas con puntos base R_1, R_2, W_1, W_2.

estas 4 cónicas. Tomemos dos cualesquiera de ellos, p.e. f_1, f_2. Entonces, para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (no ambos nulos) se tiene que $\lambda f_1 + \mu f_2 \in \mathbb{R}[x, y]$ tiene grado 2 y describe una cónica que pasa por los 4 puntos dados. Recíprocamente, se puede demostrar que toda cónica $\mathcal{D}$ que pase por los 4 puntos dados admite una ecuación de la forma $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$, para ciertos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (que dependen de $\mathcal{D}$). En particular, existen $\lambda_3, \mu_3, \lambda_4, \mu_4 \in \mathbb{R}$ tales que $f_3 = \lambda_3 f_1 + \mu_3 f_2$ y $f_4 = \lambda_4 f_1 + \mu_4 f_2$. La familia de cónicas $\mathcal{F}$ cuyas ecuaciones son de la forma $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$, con λ, μ recorriendo $\mathbb{R}$ se llama **haz de cónicas cuyos puntos base son** R_1, R_2, W_1, W_2**.** *La familia* $\mathcal{F}$ *es infinita.* Es útil darse cuenta que en esta familia hay, al menos, 3 pares de rectas (ver figura 5)

Tomemos ahora un punto $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{R_1, R_2, W_1, W_2\}$ cualquiera. Si $P \in \mathcal{C}$ entonces la única cónica que pasa por los 5 puntos R_1, R_2, W_1, W_2, P es $\mathcal{C}$ (ejercicio). Si $P \notin \mathcal{C}$ entonces existe una única cónica que pasa por los 5 puntos R_1, R_2, W_1, W_2, P (y no es $\mathcal{C}$) (ejercicio). Podemos afirmar que **los puntos** R_1, R_2, W_1, W_2, P **están en posición general para cónicas.**

0.34. NUEVOS EJERCICIOS. (a) Cónica con foco en punto $F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y dir. $x = -4$ ¿ec. implícita (en coord. cartesianas) y ec. en coord. polares?

Sean $\mathcal{C}$ la cónica dada, r la recta dada. En $\mathbb{R}^2$ trabajaremos con el sistema de ref canónico $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}_c\}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ punto. *Supondremos que foco y directriz dados son pareja.*

Primera manera: $X \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathrm{d}(X, F) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(X, r) \Leftrightarrow \mathrm{d}(X, F)^2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}(X, r)^2$ luego

$$(23)\quad (x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\,(x - (-4))^2 \Rightarrow 4\left(x^4 - 4x + 4 + y^2\right) = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 - 24x = 0$$

es ec. de $\mathcal{C}$ (en coord. cartesianas) y observamos que $\mathcal{C}$ pasa por el origen. *Segunda manera:*

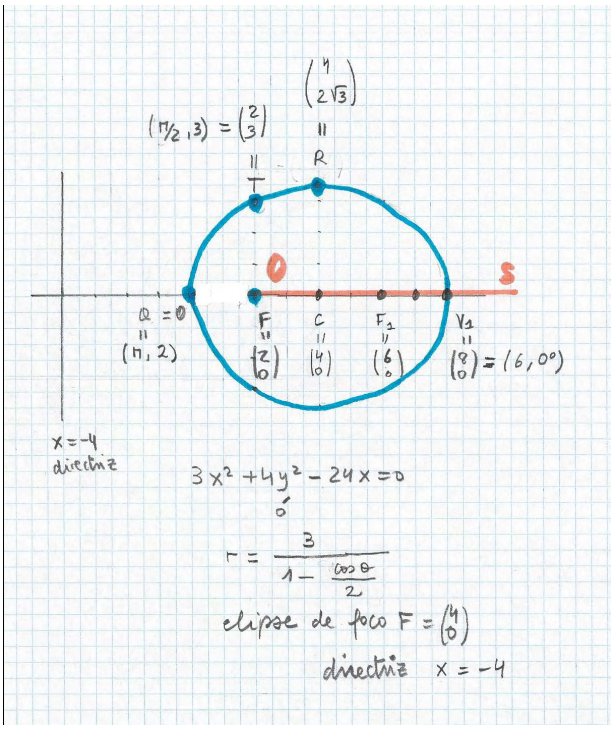

FIGURA 6. La elipse de ecuación $3x^2 + 4y^2 - 24x = 0$.

Consideremos la recta r' perpendicular a r que pasa por F y en ella, el punto Q que satisface $\mathrm{d}(Q,F) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(Q,r)$, obteniendo que Q es el origen de coord. (ver figura 6) Además, por la perpendicularidad, r' es un eje de simetría de $\mathcal{C}$ (el que contiene al semieje mayor), de donde Q es un vértice de $\mathcal{C}$ y así $a - d = \mathrm{d}(Q,F) = 2$. Junto con $\epsilon = \frac{1}{2} = \frac{d}{a}$, deducimos $a = 4, d = 2, b = 2\sqrt{3}$ y el centro de $\mathcal{C}$ es el punto de coord. $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$. Una comprobación: El punto $R = \begin{pmatrix}4\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}$ pertenece a la cónica, ya que
$\mathrm{d}(R,F)^2 = (4-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16 = \frac{8^2}{4} = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}(R,r)^2$.
Se puede verificar que con ambos métodos, estamos obteniendo lo mismo.
Vamos a calcular el *semilado recto*, que es, por def. $\ell = \mathrm{d}(T,F)$ donde T es un punto de corte de la recta $x = 2$[13] con la cónica (ver figura 6). Obtenemos
$3 \times 2^2 - 24 \times 2 + 4y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \Rightarrow \ell = 3$.
Una ecuación sencilla de $\mathcal{C}$ en coord. polares (resp. (O,s)) se obtiene **escogiendo como polo O un foco de la elipse**. Aquí tenemos dos opciones (pues $\mathcal{C}$ tiene dos focos.) Además, debemos escoger el eje polar s (que es semirrecta que nace del polo). Vamos a tomar (pero no es imprescindible) s horizontal y en semiplano de la derecha. Hagámoslo así, tomando como polo el foco dado $F = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ (ver figura 6). Entonces el cambio de coordenadas es

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{o equival.} \quad \begin{cases} r^2 = (x-2)^2 + y^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x-2} \end{cases}$$

que llevado a (23) proporciona

[13] Es la recta perpendicular al eje mayor que pasa por F.

$r^2\left(4-\cos^2\theta\right)-12r\cos\theta-36=0\Rightarrow$
(24)

$$r=\frac{6\cos\theta\pm\sqrt{36\cos^2\theta+36\left(4-\cos^2\theta\right)}}{4-\cos^2\theta}=\frac{6\cos\theta\pm12}{(2-\cos\theta)(2+\cos\theta)}=\begin{cases}\frac{6}{2-\cos\theta}\\ \text{ó}\\ \frac{-6}{2+\cos\theta}\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}\\ \text{ó}\\ \frac{-3}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}\end{cases}$$

cuando θ recorre el intervalo $[0,2\pi)$.
Tomemos la primera opción:

$$r=\frac{3}{1-\frac{\cos\theta}{2}}. \tag{25}$$

Tenemos, por ejemplo, los puntos $r(0)=\frac{3}{1-1/2}=6$, que corresponde al otro vértice de $\mathcal{C}$, $r(\pi/2)=\frac{3}{1}=3$, que corresponde al punto T (ver figura 6), $r(\pi)=\frac{3}{1-(-1/2)}=2$, que corresponde al punto Q (origen de coord. cartesianas y vértice de $\mathcal{C}$), etc.
Veamos que las dos opciones describen la misma elipse $\mathcal{C}$. Tomemos la segunda opción:

$$r=\frac{-3}{1+\frac{\cos\theta}{2}}. \tag{26}$$

El denominador es siempre positivo, ya que $-1\leq\cos\theta\Rightarrow\frac{-1}{2}\leq\frac{\cos\theta}{2}\Rightarrow0<\frac{1}{2}\leq1+\frac{\cos\theta}{2}$, de donde se sigue que r es siempre negativo en (26). La interpretación que se hace cuando $r<0$ es, según vimos, que (r,θ) denota el punto $(-r,\theta+\pi)$. Por otro lado tenemos $\cos\theta=-\cos(\theta+\pi)$. Luego se puede reescribir (26) así

$$-r=\frac{-3}{1-\frac{\cos(\theta+\pi)}{2}}\Rightarrow r=\frac{3}{1-\frac{\cos(\alpha)}{2}} \tag{27}$$

donde $\alpha=\theta+\pi$ recorre un intervalo de longitud 2π, lo mismo que (25).

OBS: Tomemos la primera opción, p.e. Tenemos $r\to+\infty\Leftrightarrow1-\frac{\cos\theta}{2}\to0\Leftrightarrow\cos\theta=2$, lo que no ocurre nunca. Esto demuestra algo que ya sabemos: $\mathcal{C}$ es *curva acotada*.

Ejercicio: Para obtener para $\mathcal{C}$ la ecuación en coord. polares $r=\frac{3}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$, ¿cómo hay que tomar el sistema de referencia polar (O,s)?

Ejemplo. ¿Qué deben cumplir los parámetros reales a,b,c para que el sistema de ecuaciones siguiente tenga una solución con x,y,z reales?

$$\begin{cases}y^2+z^2&=2a^2+x^2/2\\ x^2+z^2&=2b^2+y^2/2\\ x^2+y^2&=2c^2+z^2/2\end{cases}$$

Hacemos $X=x^2$, $Y=y^2$, $Z=z^2$ convirtiendo el sistema dado en un SLNH 3EC 3INC (son X,Y,Z) 3PAR (son $a,b,c\in\mathbb{R}$)

$$\begin{cases}-X/2+Y+Z=2a^2\\ X-Y/2+Z=2b^2\\ X+Y-Z/2=2c^2\end{cases} \tag{28}$$

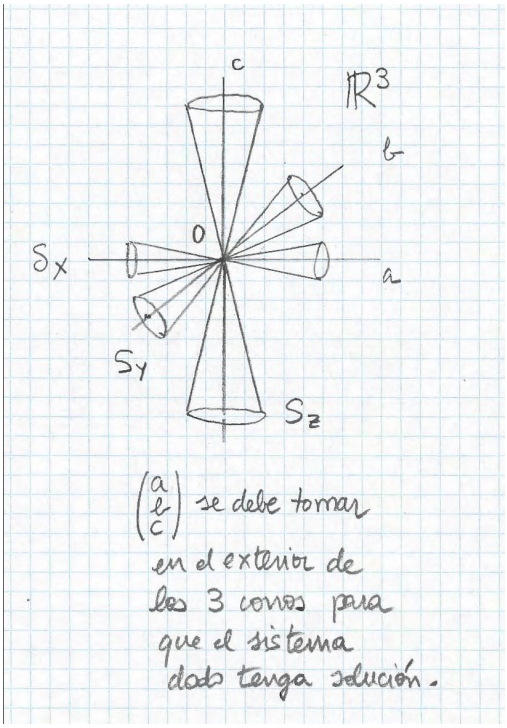

FIGURA 7. Tres conos.

que resolvemos, p.e. por M. Gauss, obteniendo la solución única (cada vez que fijemos los valores de a, b, c) siguiente

$$\begin{cases} X = (-4a^2 + 8b^2 + 8c^2)\,\frac{1}{9} \\ Y = (8a^2 - 4b^2 + 8c^2)\,\frac{1}{9} \\ Z = (8a^2 + 8b^2 - 4c^2)\,\frac{1}{9} \end{cases} \tag{29}$$

de donde

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{X} \\ y = \pm\sqrt{Y} \\ z = \pm\sqrt{Z} \end{cases} \tag{30}$$

obteniendo 8 soluciones (cada vez que fijemos los valores de a, b, c).
Ahora bien, no todos los valores de a, b, c son válidos, ya que debe cumplirse que $X \geq 0$, $Y \geq 0$ y $Z \geq 0$. Tenemos que

$$\begin{cases} X \geq 0 \\ Y \geq 0 \\ Z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 \geq a^2 \\ 2a^2 + 2c^2 \geq b^2 \\ 2a^2 + 2b^2 \geq c^2 \end{cases} \tag{31}$$

¿Cómo interpretar geométricamente estas condiciones en el espacio de parámetros $\mathbb{R}^3$?
Tenemos que $2b^2 + 2c^2 = a^2$ es un cono circular recto (una superficie) $\mathcal{S}_X$ cuyo vértice es el punto $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La superficie $\mathcal{S}_X$ es, por así decir, una *pared*, que divide a $\mathbb{R}^3$ en dos *habitaciones*: la interior y la exterior. El eje de rotación de $\mathcal{S}_X$ es el eje de coordenadas a. Los

puntos del eje tienen coord. $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, están en la habitación interior y satisfacen $2 \times 0^2 + 2 \times 0^2 = 2b^2 + 2c^2 \leq a^2$. Por continuidad, deducimos que la habitación interior está determinada por la desigualdad $2b^2 + 2c^2 \leq a^2$ y la habitación exterior por $2b^2 + 2c^2 \geq a^2$. Tenemos conos análogos $\mathcal{S}_Y$ y $\mathcal{S}_Z$, de rotación alrededor de los ejes de coord. b y c, resp. Como conclusión, el lugar donde se pueden tomar los parámetros a, b, c de modo que el sistema dado tenga solución es la intersección de las habitaciones exteriores de los tres conos (ver figura 7).