Prácticas/Ejercicios de Álgebra Lineal. Parte 2. Curso 20/21. Doble grado Matemáticas, Estadística y Economía

Prácticas V 07/05/2021: Hoja 10

22. La expresión matricial de f es $Y = AX + C$, con $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Los puntos fijos de f son las soluciones del SLNH 2EC 2INCOG dado por $0 = (A - I)X + C$ y obtenemos $r : -2x + y + 3 = 0$ recta de puntos fijos. Las direcciones invariantes de $\overrightarrow{f}$ vienen dadas por los autovectores de A. Tenemos $\mathcal{P}_A(T) = T^2 - T \operatorname{tr} A + \det A = T^2 - 2T + 1 = (T-1)^2$, $\operatorname{spec}(A) = \{1(\textit{doble})\}$, $\ker(A - I)$ tiene dimensión 1 y está generado por $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Observemos que $v \parallel r$.

Si una recta s es invariante por f entonces $\operatorname{dir} s$ es invariante por $\overrightarrow{f}$, es decir, $\operatorname{dir} s$ está generada por un autovector de $\overrightarrow{f}$. Sea $P \in \mathbb{R}^2$ punto y $s = P + L(v)$ recta invariante por f; entonces $f(P) \in s$, luego $\overrightarrow{Pf(P)}$ es múltiplo de v, digamos $\overrightarrow{Pf(P)} = \lambda v$, con $\lambda \in \mathbb{K}$. Desarrollando esta condición llegamos a que P pertenece a la recta de ecuación $-2x + y + 3 - \lambda = 0$. Como se trata del haz de rectas paralelas a r, cuya unión es todo $\mathbb{R}^2$, deducimos que no hay restricción sobre P.

En resumen, cualquier recta paralela a r es invariante por f y r es recta de puntos fijos de f (cf. figura 1). Observa en la figura los puntos O, $f(O)$, $f(S) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f(R) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, por ejemplo. Las rectas p, r, s, t son paralelas.

26. Decir simetría sobre la recta E es lo mismo que decir rotación alrededor de la recta E con amplitud π; con símbolos $s_E = r_{E,\pi}$. Observemos que la recta E es vectorial. Sea $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. El movimiento pedido es la *rotación deslizante* (o movimiento helicoidal) $r_{E,\pi} \circ t_w = t_w \circ r_{E,\pi}$, donde la conmutatividad es consecuencia de que $E \parallel w$. Usando los ejercicios de la hoja 8 y los datos $\operatorname{sen} \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, obtenemos que la matriz de la rotación $r_{E,\pi}$ es

$$R = I + (\operatorname{sen} \alpha)B + (1 - \cos \alpha)(A - I) = I + 2(A - I) = 2A - I = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

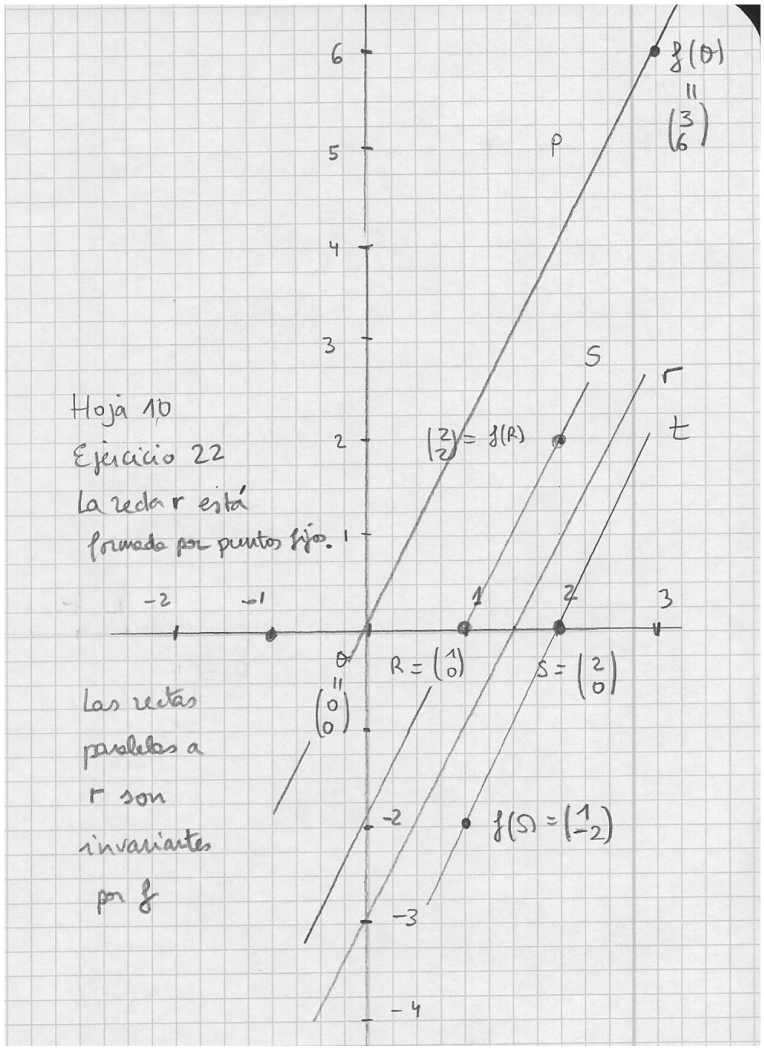

FIGURA 1. Las rectas p, r, s, t son paralelas e invariantes por f. Cada punto de r queda fijo por f.

La matriz de la rotación deslizante en cuestión es

$$\begin{pmatrix} 1| & 0 & 0 & 0 \\ - & & - & \\ 1| & & & \\ 1| & & I_3 & \\ 1| & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1| & 0 & 0 & 0 \\ - & & - & \\ 0| & & & \\ 0| & & R & \\ 0| & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1| & 0 & 0 & 0 \\ - & & - & \\ 1| & & & \\ 1| & & R & \\ 1| & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1| & 0 & 0 & 0 \\ - & & - & \\ 0| & & & \\ 0| & & R & \\ 0| & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1| & 0 & 0 & 0 \\ - & & - & \\ 1| & & & \\ 1| & & I_3 & \\ 1| & & & \end{pmatrix}$$

Una rotación deslizante no tiene puntos fijos.

Prácticas V 14/05/2021: Hoja 10

7

27.

a. Sea el subespacio afín $L = A+W$, con $A \in \mathcal{A}$ punto y $W \subseteq V$ subespacio vectorial. Sea $\overrightarrow{f} : V \to V'$ la aplicación lineal asociada a f. Entonces $f(L) = f(A+W) = f(A) + \overrightarrow{f}(W) \subseteq \mathcal{A}'$, y como $f(A) \in \mathcal{A}'$ es punto y $\overrightarrow{f}(V) \subseteq V'$ es subespacio vectorial, entonces $f(L)$ es subespacio afín.

b. Sea el subespacio afín $L' = A' + W'$, con $A' \in \mathcal{A}'$ punto y $W' \subseteq V'$ subespacio vectorial. Por definición, $f^{-1}(L') = \{P \in \mathcal{A} : f(P) \in L'\}$. Si $f^{-1}(L')$ no es vacío, tomemos un punto $Q \in f^{-1}(L')$ y usémoslo para describir $f^{-1}(L')$. Sabemos que $f(Q) \in L' = f(Q) + W'$ y obtenemos

$$\begin{aligned} f^{-1}(L') = \{P \in \mathcal{A} : \text{ t.q. } \exists w' \in W' \text{ con } f(P) = f(Q) + w'\} = \\ \{P \in \mathcal{A} : \text{ t.q. } \exists w' \in W' \text{ con } \overrightarrow{f}(\overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{f(Q)f(P)} = f(P) - f(Q) = w'\} = \\ = \{P = Q + \overrightarrow{QP} \in \mathcal{A} : \overrightarrow{QP} \in \overrightarrow{f}^{-1}(W')\} = \\ Q + \overrightarrow{f}^{-1}(W'). \end{aligned}$$

c. Sean puntos $A, A_1, A_2, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$ con A combinación afín de los A_j, i.e., existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ con $1 = \sum_{j=1}^r \lambda_j$ y $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j A_j$. Entonces

$$0 = \sum_{j=1}^r \lambda_j A_j - A = \sum_{j=1}^r \lambda_j A_j - \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j\right) A = \sum_{j=1}^r \lambda_j (A_j - A) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \overrightarrow{AA_j}.$$

Aplicando $\overrightarrow{f}$ en ambos lados de la igualdad y usando que $\overrightarrow{f}$ es lineal, llegamos a

$$0 = \overrightarrow{f}(0) = \overrightarrow{f}\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j \overrightarrow{AA_j}\right) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AA_j}) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \overrightarrow{f(A)f(A_j)} = -f(A) + \sum_{j=1}^r \lambda_j f(A_j),$$

donde de nuevo hemos usado $1 = \sum_{j=1}^r \lambda_j$. Así llegamos a $f(A) = \sum_{j=1}^r \lambda_j f(A_j)$, lo que queríamos demostrar.

En el caso de que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y A es una combinación convexa de los A_j, lo único que se añade a todo lo anterior es que $0 \leq \lambda_j \leq 1, \forall j$ y el razonamiento sigue siendo válido.

d. Si $L_1 = A_1 + W_1$, $L_2 = A_2 + W_2$ son paralelas entonces $W_1 \subseteq W_2$ ó $W_1 \supseteq W_2$. En la solución del primer apartado hemos visto que $f(L_1) = f(A_1) + \overrightarrow{f}(W_1)$, $f(L_2) = f(A_2) + \overrightarrow{f}(W_2)$, y tenemos $\overrightarrow{f}(W_1) \subseteq \overrightarrow{f}(W_2)$ ó $\overrightarrow{f}(W_1) \supseteq \overrightarrow{f}(W_2)$, de donde se sigue el resultado.

Prácticas V 21/06/2021: Hoja 11

6. La hipérbola dada se expresa

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{11} = 1$$

luego el semieje real es $a = \sqrt{7} \simeq 2{,}64$, el semieje imaginario es $b = \sqrt{11} \simeq 3{,}31$ y $d^2 = a^2 + b^2$ proporciona $d = \sqrt{18} \simeq 4{,}24$. En la elipse buscada tendremos $a' = \sqrt{18}$, $d' = \sqrt{7}$, $b' = b$, $a' > b'$, a' semieje mayor y $a'^2 = d'^2 + b'^2$, siendo su ecuación

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{11} = 1.$$

Los puntos de intersección son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 11x^2 - 7y^2 = 77 \\ 11x^2 + 18y^2 = 198 \end{cases}$$

luego $11x^2 = 77 + 7y^2 = 198 - 18y^2$, $25y^2 = 121$, de donde $y = \pm\sqrt{\frac{121}{25}} = \pm\frac{11}{5}$ y, sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones, obtenemos $x = \pm\frac{6\sqrt{7}}{5} \simeq \pm 3{,}2$. Los puntos de intersección de ambas curvas son cuatro: $\begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{7}}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{6\sqrt{7}}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{7}}{5} \\ -\frac{11}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{6\sqrt{7}}{5} \\ -\frac{11}{5} \end{pmatrix}$.

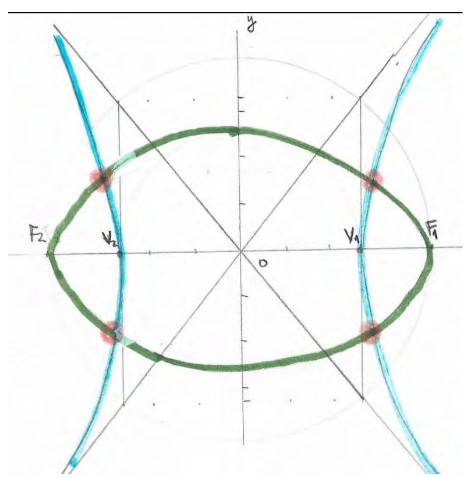

Figura 2. hipérbola y elipse con focos y vértices intercambiados.