

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 1

Advertencia: colocaremos las coordenadas de vectores y puntos de \mathbb{K}^n en columnas.

Ejercicio 1 (Extraído de **Nueve capítulos del arte matemática**, China, S. III AC) Supongamos que 5 corderos, 4 patos, 3 pollos y 2 conejos valen 1496 monedas, 4 corderos, 2 patos, 6 pollos y 3 conejos valen 1175 monedas, 3 corderos, un pato, 7 pollos y 5 conejos valen 958 monedas, 2 corderos, 3 patos, 5 pollos y un conejo valen 861 monedas. Dime cuál es el precio de un cordero, un pato, un pollo y un conejo.

Ejercicio 2 El problema de las cien aves. (Extraído de **Manual de matemáticas de Zhang Qiujian**, China, S. V DC) Un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y tres polluelos valen una moneda. Con 100 monedas queremos comprar 100 aves. ¿Cuántos gallos, gallinas y polluelos podemos comprar?

Ejercicio 3 Hierón, rey de Siracusa, entregó a un orfebre 7465 gramos de oro para hacer una corona. Sospechando que el orfebre había reemplazado parte del oro por plata, Hierón consultó a Arquímedes. Arquímedes sumergió la corona en agua, la cual desalojó 467 g. de líquido. Se sabe que el oro desaloja agua por valor de 52 milésimas de su peso, mientras que la plata lo hace por valor de 95 milésimas. Hallar los gramos de oro y plata de la corona real.

Ejercicio 4 Hallar la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ de la parábola que pasa por los puntos $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ y $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$. Hallar la ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ de la circunferencia que pasa por los puntos P_1, P_2, P_3 .

Ejercicio 5 Resolver, si es posible, los siguientes sistemas lineales en \mathbb{R} ó \mathbb{C} , según convenga (es recomendable usar el método de Gauss-Jordan):

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 9x + 4y = 108 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} -x + z = -2 \\ 2x - y + z = 1 \\ -3x + 2y - 2z = -1 \\ x - 2y + 3z = -2 \\ 5x + 2y + 6z = -1 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x + 2y + 2z - s + 3t = 0 \\ x + 2y + 3z + s + t = 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t = 0 \end{cases} \quad g) \begin{cases} 3x_2 - 6x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -5 \\ -x_1 + 3x_2 - 10x_3 - 4x_4 - 4x_5 = -2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 20x_3 + 2x_4 + 8x_5 = -8 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x + 2y - \sqrt{2}z = 0 \\ 3x - (\sqrt{2} + 6)z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases}, \quad i) \begin{cases} x + y + iz + t = 0 \\ 2x - y + 2z - t = 1 \\ x + iy - z + it = 2 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 6 Discutir los siguientes sistemas en función del parámetro (o parámetros) que aparece(n) en cada uno de ellos, considerando tanto el caso real como el complejo, cuando éste tenga incidencia:

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x + 2z = 3 \\ 3x + 2y + mz = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = b^2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} (a+1)x + y + z = a-1 \\ x + (a+1)y + z = 2 \\ x + y + (a+1)z = a+1 \end{cases} \quad e) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 2a-1 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases}, \quad h) \begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + 2(b-1)y - 3z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b-1 \end{cases}$$

Ejercicio 7 ¿Tiene solución el sistema $\begin{cases} 2 \sin \alpha - \cos \beta + 3 \tan \gamma = 3 \\ 4 \sin \alpha + 2 \cos \beta - 2 \tan \gamma = 10 \\ 6 \sin \alpha - 3 \cos \beta + \tan \gamma = 9 \end{cases}$?

Ejercicio 8 ¿Qué deben cumplir los parámetros reales a, b, c para que el sistema de ecuaciones siguiente tenga una solución con x, y, z reales?

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 2a^2 + x^2/2 \\ x^2 + z^2 = 2b^2 + y^2/2 \\ x^2 + y^2 = 2c^2 + z^2/2 \end{cases}$$

Ejercicio 9 Resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10 Hallar las matrices A y B que son soluciones de cada uno de los siguientes sistemas:

$$\text{a) } 3A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}; \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 11 a) Encontrar todas las matrices cuadradas de orden 3 tales que conmutan con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Encontrar todas las matrices cuadradas de orden n que conmutan con todas las matrices diagonales de orden n .

Ejercicio 12 Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Razonar si existe alguna matriz X no nula, que cumpla $XA = BX^T$.

Ejercicio 13 Se dice que A es **idempotente** si $A^2 = A$ (resp. **involutiva** si $A^2 = I_n$) (resp. **nilpotente** si $A^2 = 0_n$). Sobre un cuerpo \mathbb{K} , determinar todas las matrices de orden 2 idempotentes (resp. involutivas) (resp. nilpotentes).

Ejercicio 14 Probar que si A es idempotente, entonces también lo es la matriz $B = I - A$ y además $AB = 0 = BA$ (siendo I la matriz identidad del mismo orden que A).

Ejercicio 15 Una matriz cuadrada es *simétrica* si coincide con su traspuesta, $A = A^T$. Se dice que es *antisimétrica* si coincide con la opuesta de su traspuesta, $A = -A^T$. Se pide:

a) Probar que la suma de matrices simétricas es simétrica. Demostrar que el producto no lo es en general. ¿Ocurre lo mismo para matrices antisimétricas?

- b) Dada una matriz cuadrada A cualquiera, demostrar que $A + A^T$ es simétrica y que $A - A^T$ es antisimétrica.
- c) Probar que toda matriz cuadrada se puede descomponer, de forma única, como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica, si se trabaja sobre un cuerpo de característica distinta de dos.

Ejercicio 16 Se llama *traza* de una matriz cuadrada A a la suma de los elementos de su diagonal principal, y lo denotamos por $\text{tr}(A)$. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n , probar que:

- a) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- b) $\text{tr}(kA) = k \text{tr}(A)$, para todo escalar k .
- c) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- d) Deducir del apartado anterior que si P es una matriz invertible del mismo orden que A , entonces la traza de las matrices A y PAP^{-1} es la misma.
- e) Dar un contraejemplo que muestre la falsedad de $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$.

Ejercicio 17 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\text{tr}(AA^T)$ es un real no negativo.
- b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, demostrar que $AA^T = 0$ implica $A = 0$.
- c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, demostrar que $\text{tr}(AA^T) = 0$ implica $A = 0$.
- d) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, encontrar una matriz no nula A tal que $\text{tr}(AA^T) = 0$.

Ejercicio 18 a) Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Por qué no se cumplen las igualdades $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$, $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$ y $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?

- b) Existencia de divisores de cero: calcular el producto AB , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19 Dadas $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ tales que $AB = I_m$ ¿es cierto que $m = \min\{m, n\} = \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$? Dar una demostración o encontrar un contraejemplo. [OBS: se dice que A tiene **rango máximo (o pleno)** si $\text{rg } A = \min\{m, n\}$. Se dice que A tiene **rango pleno por filas** si $\text{rg } A = m$.]

Ejercicio 20 Dadas matrices $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n \times r}(\mathbb{K})$, demostrar que

$$AB = (\text{col}(A, 1) | \cdots | \text{col}(A, n)) \begin{pmatrix} \text{fil}(B, 1) \\ - \\ \vdots \\ - \\ \text{fil}(B, n) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \text{col}(A, j) \text{fil}(B, j)$$

y concluir que *el producto AB se expresa como la suma de n matrices de rango menor o igual que uno*. Además demostrar que una matriz rectangular tiene rango menor o igual que uno si y sólo si es producto de columna por fila.

OBS: los dos últimos ejercicios tratan de matrices de rango máximo y rango mínimo.