ÁLGEBRA LINEAL
Hoja 2

<u>*Advertencia:*</u> colocaremos las coordenadas de vectores y puntos de $\mathbb{K}^n$ en columnas.

Ejercicio 1 1. Identificar las transformaciones elementales por filas asociadas por las siguientes matrices elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
Calcular la matriz $H_f(A)$ de Hermite for filas de A y matrices elementales E_i tales que
$$H_f(A) = E_k E_{k-1} \dots E_1 A.$$

3. Usando matrices elementales, calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2 a) Encontrar todas las matrices escalonadas reducidas por filas en $M_{1\times 3}(\mathbb{K})$, $M_{2\times 3}(\mathbb{K})$, $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$, $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$ y $M_{3\times 2}(\mathbb{K})$.

b) En los mismos conjuntos del apartado anterior encontrar todas las matrices escalonadas reducidas por columnas.

c) Encontrar todas las matrices escalonadas por filas en $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$ y decir en cada caso cuál es su matriz escalonada reducida.

Ejercicio 3 a) Decir cuáles de las siguientes matrices son equivalentes por filas hallando su matriz escalonada reducida por filas H :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & -10 & -4 \\ 2 & -6 & 20 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -16 & -8 \\ 1 & -3 & 10 & -2 \\ -1 & 3 & -10 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Encontrar una matriz E_A producto de matrices elementales de forma que $H_A = E_A A$. Hacer lo mismo para las restantes matrices.

c) Encontrar la matriz escalonada reducida por columnas de las anteriores matrices y decir cuáles son equivalentes por columnas.

d) Encontrar una matriz E'_A producto de matrices elementales de forma que $H^c_A = AE'_A$, donde H^c_A representa la matriz escalonada reducida por columnas de A. Hacer lo mismo para las restantes matrices.

e) Encontrar la matriz escalonada reducida por filas de las traspuestas de las anteriores matrices.

f) Hallar, si existen, las soluciones de los sistemas cuyas matrices ampliadas son las anteriores.

Ejercicio 4 Dadas las siguientes matrices hallar su rango y su **matriz canónica equivalente** $\begin{pmatrix} I_r & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}$. Hallar también matrices Q y P (productos de matrices elementales) tales que PAQ sea igual a la matriz canónica equivalente de A. Proceder análogamente con las matrices B y C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5 Sea A una matriz de m filas y n columnas. Sean N_1, N_2, N_3 tres matrices escalonadas reducidas por filas:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Indica razonadamente cuál de las tres puede ser la matriz escalonada reducida por filas asociada a A en los casos siguientes:

a) A es invertible

b) A tiene determinante cero

c) A tiene rango máximo y no es cuadrada

d) A tiene rango 3 y no tiene rango máximo

Ejercicio 6 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

obtener una matriz Q invertible de orden 3, tal que

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Indica razonadamente cómo usarías este resultado para resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x + 2y + t = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + 2z - t = -2 \end{cases}$$

Ejercicio 7 Definimos la inversa de una matriz A (cuando exista) como una matriz denotada por A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

a) Comprobar que la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
verifica una ecuación del tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinando los valores de α y β.

b) [**Teorema de Cayley-Hamilton** en dimensión 2] Demostrar que, en general, para cualquier matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se cumple

$$A^2 - \mathrm{tr(A)A} + \mathrm{det(A)I_2} = 0.$$

c) Deducir que si A es invertible, entonces $\mathrm{Adj}(A) = (a + d)I_2 - A$. Obtener la igualdad
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} /(ad - bc)$$

d) Utilizar el resultado del apartado anterior para obtener la inversa de la matriz A del primer apartado.

e) Razonar cuándo ocurre que una matriz A, de orden 2, es su propia inversa (establecer relación con el ejercicio 13 de la hoja 1).

Ejercicio 8 Demostrar las propiedades siguientes para una matriz invertible A de orden n:

a) $(rA)^{-1} = A^{-1}/r$, para todo escalar $r \neq 0$.

b) $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$, siendo p un número entero y positivo.

c) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Ejercicio 9 Dada $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, demostrar que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

donde S_n denota el grupo de permutaciones en n símbolos. Esto es la generalización de la **regla de Sarrus**.

Ejercicio 10 Determinante de Vandermonde.

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, demostrar que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Indicación: obsérvese que $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2), \ldots, x^{n-1} - y^{n-1} = (x-y)(x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + xy^{n-3} + y^{n-2})$. Comenzar restando la primera columna de las restantes columnas, y tomar $x = a_j$, $y = a_1$.

b) Pruébese que $(x-1)^3$ divide al polinomio $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$

Ejercicio 11 Calcula los siguientes determinantes:

$$
\text{i)}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 4\\ -2 & 3 & 4 & -5\\ 3 & -4 & -5 & 6\\ -4 & 5 & 6 & -7\end{vmatrix}, \qquad \text{(ii)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix},
$$

$$
\text{iii)}\begin{vmatrix} 3 & 9 & 27 & 81\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 4 & -8 & 16\\ 2 & 4 & 8 & 16\end{vmatrix}, \qquad \text{(iv)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0\\ -8 & 9 & 2 & -7 & 7\\ 5 & -6 & 0 & 1 & 8\\ 8 & 7 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}.
$$

Ejercicio 12 Hallar el valor de los determinantes: a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & (1+a) & 1 & 1\\ 1 & 1 & (1+b) & 1\\ 1 & 1 & 1 & (1+c)\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1+i & 1\\ 2+i & 3\\ 4+i & 2\\ 1-i & 2\end{vmatrix}$

$$
\text{c)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & 4 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & 0\end{vmatrix}; \quad \text{d)}\begin{vmatrix} x+a & b & c\\ a & x+b & c\\ a & b & x+c\end{vmatrix};
$$

$$
\text{e)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & c+a & a+b\end{vmatrix}.
$$

Ejercicio 13

1. Calcular los determinantes de las siguientes matrices, y buscar una generalización de los resultados a matrices de orden arbitrario: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5\\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5\end{pmatrix}$,

$$
\begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & a & b & c & d\\ a & x & b & c & d\\ a & b & x & c & d\\ a & b & c & x & d\\ a & b & c & d & x\end{pmatrix}
$$

2. Obtener el valor de los determinantes de las siguientes matrices de orden arbitrario:

$$\begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & \cdots & (-1)^n a_n \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

3. Demostrar $\det \begin{pmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = p(1)p(i)p(-1)p(-i),$ con $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

Ejercicio 14 Probar que $\det \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{pmatrix} = 0$ para todo número real x. Generalizar.

Ejercicio 15 Recordemos que una matriz de orden n es antisimétrica si $A^T = -A$. Demuéstrese que $\det A = (-1)^n \det A$ y dedúzcase de ello que las matrices antisimétricas de orden impar tienen determinante nulo.

Ejercicio 16 Si $A \neq I_n$ es una matriz idempotente de orden n (tal que $A^2 = A$), calcular el valor de su determinante. Lo mismo para matrices nilpotentes e involutivas.

Ejercicio 17 Usando determinantes, calcular el rango de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 2+i & 1 & 1+2i & 4+i \\ -1+i & 1+i & 1+i & -1+i \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 18 Obtener el rango de las siguientes matrices, en función del parámetro (o de los parámetros) que aparece(n):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & a & b & a+b \\ a & a & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 \\ a+b & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 19 Hallar, cuando exista, la inversa de cada una de las matrices dadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 20 a) ¿Para qué valores de a es invertible la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$?

b) Hallar A^{-1} cuando $a = 1$.

Ejercicio 21 Resolver los siguientes sistemas mediante la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x+4y &= 6 \\ -x+7y &= 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ x+y-z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+4x_4 &= 6 \\ 2x_1+3x_2-x_3-11x_4 &= -7 \\ x_2+x_3+x_4 &= 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x-y+z &= 1 \\ 2x+az &= b \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y &= 2-2\sqrt{2} \\ -x + \sqrt{2}z &= 1 \\ \sqrt{2}x + y &= 2\sqrt{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2z &= 4 \\ -x + y &= -1 \\ x + t &= 1 \end{cases}$

Ejercicio 22 Sea P una matriz cuadrada descompuesta en cajas $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, con A y D cuadradas (no necesariamente del mismo tamaño). Si existe A^{-1}, la matriz $D - CA^{-1}B$ se llama **complemento de Schur** de A en P.

a) Demuestra que $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$ y deduce que $\det(P) = \det(A)\det(D-CA^{-1}B)$.

b) Comprueba con un ejemplo que, aunque B y C sean cuadradas, en general no es cierto que $\det(P) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.