ÁLGEBRA LINEAL
HOJA 9

Ejercicio 1. Diagonalizar las siguientes matrices simétricas mediante una matriz de paso ortogonal:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. Demuéstrese que dos endomorfismos simétricos de un espacio vectorial euclídeo admiten una base ortonormal que los diagonaliza simultáneamente si y sólo si conmutan.

Ejercicio 3. Sea V un espacio vectorial real bidimensional y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $f(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_2$.

a) Probar que es una forma bilineal. Escribir f como suma de una forma bilineal simétrica, f_S, y otra antisimétrica, f_T. Hallar las matrices respecto de la base canónica de f, f_S y f_T. ¿Qué relación hay entre ellas?

b) Escribir la expresión analítica de la forma cuadrática asociada.

Ejercicio 4. Sean f y g dos formas lineales de un espacio vectorial V.

a) Probar que la aplicación $\varphi : V \times V \to K$, definida por $\varphi(u, v) = f(u)g(v)$ es una forma bilineal.

b) Si $(u_1, \ldots, u_n)$ es una base de V halla la matriz asociada a φ en función de las matrices asociadas a f y g.

c) Dar condiciones sobre f y g para que φ sea una forma bilineal simétrica.

d) Estudiar los valores que puede tomar el rango de φ.

Ejercicio 5. De una forma bilineal $\varphi : \mathbb{R}[X]_1 \times \mathbb{R}[X]_1 \to \mathbb{R}$ se sabe que es simétrica

y que
$$\varphi(x+1,x+1)=8;\varphi(x+2,x+2)=11,\varphi(x,x)=3\,.$$
Calcular su matriz respecto de la base $(1,x)$.

Ejercicio 6. Sea $f:V\to\mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica definida sobre el $\mathbb{K}$–espacio vectorial V y sea $x_0\in V$ un vector que no es autoconjugado (o sea, $f(x_0,x_0)\neq 0$). Demostrar que el subespacio conjugado de x_0 es un subespacio suplementario de $L(x_0)$, es decir, que $L(x_0)\oplus L(x_0)^c=V$.

Ejercicio 7. Demostrar que una matriz simétrica $S\in M_n(\mathbb{R})$ es la matriz de una forma bilineal simétrica semidefinida positiva en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si existe $P\in M_n(\mathbb{R})$ tal que $S=P^TP$.

Ejercicio 8. Sea $f(x,y)=x_1y_1-2x_2y_2+x_3y_3+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1-2x_2y_3+x_3y_1-2x_3y_2$.

a) Dar la forma cuadrática ϕ_f asociada a f y su matriz.

b) Encontrar una base $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ que verifique
$$f(v_i,v_j)=0,\forall i\neq j,\quad f(v_i,v_i)=1,i=1,2\quad \text{y } f(v_3,v_3)=-1.$$

c) ¿Cuál es el subespacio conjugado de $U=L[(1,0,1)^T]$ respecto de f? ¿Es autoconjugado el vector $(1,0,1)^T$?

Ejercicio 9. Calcúlese el rango y signatura de la forma cuadrática de $\mathbb{R}^n$ cuya expresión es $\sum_{i<j}^n x_ix_j$.

Ejercicio 10. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, ¿pueden representar la misma forma cuadrática en distintas bases?

Ejercicio 11. Sea $q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ la forma cuadrática:
$$q(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=x_1^2-x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+\alpha x_3x_4+2x_4^2.$$
Estudia según los valores de α cuando la forma cuadrática q es no degenerada.

Ejercicio 12. Clasificar las siguientes formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^3$ y escribirlas como suma o diferencia de cuadrados.

a) $q(x,y,z)^T = x^2 - z^2 - 2xy + xz$

b) $q(x,y,z)^T = 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz + 6xz$.

c) $q(x,y,z)^T = -x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xy + 2yz$.

Ejercicio 13. Dada la familia de formas cuadráticas $f_a(x,y,z)^T = x^2 + y^2 + (a+1)z^2 + 2ayz + 2xz$, se pide:

a) Clasificar las formas cuadráticas según los valores del parámetro a.

b) Para $a = 2$, obtener el subespacio conjugado de $U : x - y = 0,\ y = 0$.

Ejercicio 14. Demostrar que en una forma cuadrática definida positiva todos los coeficientes de las incógnitas elevadas al cuadrado son positivos, pero que esta condición no es suficiente para que la forma sea definida positiva.

Ejercicio 15. Halla según los valores del parámetro t el rango y la signatura de las formas cuadráticas reales:

$$q_1(x,y,z)^T = x^2 + 2\,x\,y + 2\,t\,y\,z - z^2, \quad q_2(x,y,z)^T = x^2 + 2\,t\,x\,y + 2\,x\,z + y^2 + 2\,y\,z + t\,z^2$$

Ejercicio 16. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por:

$$\varphi((x_1,x_2)^T, (y_1,y_2)^T) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 + 5x_2y_1 + \alpha x_2y_2$$

Se pide: a) Razonar si es simétrica o antisimétrica.

b) Calcular el valor o valores de α para que la forma bilineal sea degenerada. En esos casos, obtener vectores isótropos.

Ejercicio 17. Probar que las siguientes expresiones definen sendos productos escalares en $\mathbb{R}^3$.

a) $\langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.

b) $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$.

Ejercicio 18. Razonar si tiene solución no nula en $\mathbb{R}$ la ecuación $x^2+y^2+z^2+2xy = 0$, y si tiene solución no nula la ecuación $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy = 0$.

Ejercicio 19. Consideramos la familia siguiente de formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^3$:

$$q_a(x, y, z)^T = x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xy + 2axz\,,$$

donde a es un número real. Se pide:

a) La matriz asociada de q_a respecto de la base considerada para la ecuación dada.

b) Hallar los valores de γ y μ para que el conjunto $\{(1, 0, 0)^T, (1, \gamma, 0)^T, (-4a, a, \mu)^T\}$ sea una base de vectores conjugados dos a dos respecto de q_a, cuando a es no nulo.

c) Encontrar una matriz P regular tal que la matriz $P^T AP$ sea diagonal.

d) Clasificar q_a según los valores de a.