ÁLGEBRA LINEAL
HOJA 10

Ejercicio 1. Sean l_1, l_2 y l_3 tres rectas de $\mathbb{K}^2$ cuyas ecuaciones implícitas respecto del sistema de referencia afín $\mathcal{R}_1 = \{O_1; u_1, v_1\}$ son, respectivamente

$$X + Y = 0,\ X - Y - 1 = 0,\ 2X + Y + 2 = 0.$$

Sean $O_2 = l_1 \cap l_2, P = l_1 \cap l_3$ y $Q = l_2 \cap l_3$. Se consideran los vectores $u_2 = \overrightarrow{O_2P}$ y $v_2 = \overrightarrow{O_2Q}$. Demostrar que $\mathcal{B} = (u_2, v_2)$ es una base de $\mathbb{K}^2$ y calcular la matriz de cambio de referencia de $\mathcal{R}_2 = \{O_2; u_2, v_2\}$ a $\mathcal{R}_1$.

Ejercicio 2. a) Sea S un hiperplano de $\mathbb{K}^n$. Demostrar que existe un sistema de referencia afín de $\mathbb{K}^n$ respecto del que S tiene por ecuación implícita $X_n = 0$.

b) Tomemos S el plano de $\mathbb{K}^3$ cuya ecuación implícita respecto del sistema de referencia canónico es $S : 2X + 3Y + 4Z = 0$. Hallar un sistema de referencia afín de $\mathbb{K}^3$ respecto del cual S tenga a $Z = 0$ por ecuación.

Ejercicio 3. Se llama **punto medio** del segmento de extremos P y Q en $\mathbb{K}^n$ al único punto M de $\mathbb{K}^n$ que satisface la igualdad $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$.

a) Si $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia afín de $\mathbb{K}^n$ tal que $P = (p_1, \ldots, p_n)^T_{\mathcal{R}}$ y $Q = (q_1, \ldots, q_n)^T_{\mathcal{R}}$, calcular las coordenadas de M con respecto de $\mathcal{R}$.

b) En el plano afín $\mathbb{K}^2$ se tiene la curva Γ cuya ecuación respecto del sistema de referencia canónico es

$$y = 2x^3 - 3x^2 + x - 2.$$

Probar que las rectas que cortan a Γ en tres puntos tales que uno de ellos es el punto medio de los otros dos, pasan todas ellas por un mismo punto. Hallar las coordenadas de dicho punto.

Ejercicio 4. Obtener el simétrico del punto $P = (1, 3, -1)^T$ con respecto a la recta s de ecuaciones paramétricas

$$s : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 5. Calcular una base del espacio de dirección, la dimensión y unas ecuaciones implícitas respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$ del subespacio afín s de $\mathbb{K}^5$ cuyas ecuaciones paramétricas respecto de $\mathcal{R}$ son

$$s : \begin{cases} x_1 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ x_2 = 6 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ x_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 \\ x_4 = 1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ x_5 = \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Obtener ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta de $\mathbb{K}^3$ que pasa por el punto $P = (0,1,0)^T$ y es paralela a los planos $\pi_1 : x + y + 2z = 4$ y $\pi_2 : x - y - z = 1$.

Ejercicio 7. Obtener ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta perpendicular común a las rectas que respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{R}^3$ tienen por ecuaciones

$$r : \begin{cases} x - y = z - 2 \\ y = z \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 8. Hallar las ecuaciones implícitas, respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{R}^3$, de la recta l que pasa por el punto $P = (3,2,1)^T$, es ortogonal a la recta r y corta a la recta s, siendo

$$r : \begin{cases} x + 1 = 3y - 6 \\ 2y + z = 4 \end{cases} \qquad \text{y } s : \begin{cases} x - 3y - z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Calcular la distancia entre las rectas l y r.

Ejercicio 9. En $\mathbb{R}^5$ se consideran los subespacios afines $r : x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$ y $s : x_1 = 0, x_2 = 1, x_5 = 5$.

a) Hallar la posición relativa de r y s.

b) Hallar unas ecuaciones implícitas del subespacio afín $r + s$.

c) Determinar la recta que pasa por el punto $R = (2,-1,0,0,0)^T$ y corta a r y a s.

Ejercicio 10. Trabajando sobre $\mathbb{R}$, hallar qué condición tienen que cumplir los puntos $P_i = (x_i, y_i)^T$, $i = 1,2$, para encontrarse en lados distintos de la recta de ecuación $r : ax + by + c = 0$.

Ejercicio 11. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_r$ puntos en un espacio afín $\mathcal{A}$ de dimensión n. Probar que $\dim \mathcal{A}(A_1, A_2, \ldots, A_r) = d$, donde

$$d + 1 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix}$$

y $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})^T$ son las coordenadas de A_j respecto de cierto sistema de referencia cartesiano de $\mathcal{A}$ dado. En particular, si $r = n + 1$, *los puntos* $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *son afínmente independientes si y solo si el determinante de la matriz anterior no se anula.*

Ejercicio 12. El número m en la ecuación de una recta de la forma $y = mx + h$ se llama **pendiente**. Demuéstrese que $m = \tan\theta$, siendo θ el ángulo que la recta forma con el eje de abscisas. ¿Qué rectas no admiten ser expresadas de esta forma? ¿Qué rango de valores tiene el ángulo θ?

Ejercicio 13. Demuéstrese que dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $1 + m_1 m_2 = 0$.

Ejercicio 14. Encuéntrese una recta que pase por el punto $(2, -3)^T$ y que forme un ángulo de 60^o con el eje de abscisas.

Ejercicio 15. Sin calcular el punto de intersección de las rectas $2x + y + 1 = 0$ y $x - y + 2 = 0$, demuéstrese que la recta de ecuación $x + 5y - 4 = 0$ pasa por el mismo.

Ejercicio 16. Demuestra que las posibles posiciones relativas de dos rectas afines l_1 y l_2 de un espacio afín de dimensión 3 son las siguientes:

1. $l_1 = l_2$;
2. l_1 y l_2 son paralelas y disjuntas;
3. l_1 y l_2 se cortan en un punto (son *incidentes*);
4. l_1 y l_2 no son paralelas pero son disjuntas (se *cruzan*).

Demuestra que $l_1 + l_2$ es una recta afín si y sólo si ocurre a). Demuestra que $l_1 + l_2$ es un plano afín si y sólo si ocurre b) o c). Demuestra que $l_1 + l_2$ es todo el espacio afín si y sólo si ocurre d). A las rectas contenidas en un plano (casos a), b) y c)) se las llama *coplanares*. Observa que dos rectas son coplanares si y sólo si son incidentes o paralelas.

Ejercicio 17. En un espacio afín $\mathcal{A}$ de dimensión ≥ 3 se consideran dos rectas l y l', dos puntos distintos P y Q de l, y dos puntos distintos P' y Q' de l'. Demostrar que l y l' se cruzan si y sólo si los puntos P, Q, P' y Q' son afínmente independientes.

Ejercicio 18. Sean A_1, A_2, A_3 tres puntos afínmente independientes en un plano. Demostrar que las rectas que unen cada A_i con el punto medio de $\overrightarrow{A_k A_h}$, $k, h \neq i$ se cortan en un punto, el baricentro de A_1, A_2, A_3 (es decir, que las tres medianas de un triángulo se cortan en el baricentro de triángulo).

Ejercicio 19. Determinar la matriz, respecto del sistema de referencia canónico, de la aplicación afín f de $\mathbb{K}^2$ que cumple que

$$f(1,1)^T = (-1,0)^T, \quad f(0,2)^T = (1,1)^T, \quad f(-1,2)^T = (0,-1)^T$$

Ejercicio 20. Determinar la matriz, respecto del sistema de referencia canónico, de la aplicación afín f de $\mathbb{K}^3$ que cumple que

$$\begin{aligned} f(0,0,0)^T &= (1,1,-1)^T, \\ f(1,1,0)^T &= (-2,-2,-1)^T, \\ f(1,0,1)^T &= (0,1,0)^T, \\ f(0,0,1)^T &= (2,2,-1)^T. \end{aligned}$$

Ejercicio 21. a) Demostrar que la composición de las homotecias de $\mathbb{K}^n$ con un mismo centro P y razones r_1 y r_2 es la homotecia de centro P y razón $r_1 r_2$.

b) Demostrar que la composición de las homotecias de centros distintos O_1 y O_2 y razones r_1 y r_2 respectivamente, y tal que su producto es $r_1 r_2 = \mathrm{id}$, es una traslación. Calcular el vector de dicha traslación.

c) Demostrar que la composición de las homotecias de centros distintos O_1 y O_2 y razones r_1 y r_2 respectivamente, cuyo producto es distinto de id, es una homotecia de razón $r_1 r_2$ cuyo centro está alineado con los puntos O_1 y O_2.

Ejercicio 22. Determinar los puntos fijos y las rectas invariantes de la aplicación afín f de $\mathbb{K}^2$ definida por

$$f(x,y)^T = (3 - x + y, 6 - 4x + 3y)^T$$

Ejercicio 23. Calcular los puntos fijos y las rectas y planos invariantes de la aplicación afín f de $\mathbb{K}^3$ definida por

$$f(x,y,z)^T = (1 - 5x + 2y - 7z, -1 + 2x - y + 3z, 4x + 5z)^T$$

Ejercicio 24. Demostrar que si una aplicación afín $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ no tiene puntos fijos, entonces f^2 tampoco los tiene. Más en general, demostrar que si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que f^k tiene algún punto fijo, entonces f también tiene algún punto fijo.

Ejercicio 25. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas $r : x_1 = 1, x_3 = 0$, $s : x_1 = 0, x_2 = 1$ y $t : x_2 = 0, x_3 = 1$. Hallar la matriz A correspondiente a una aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(r) = s$, $f(s) = t$ y $f(t) = r$.

Ejercicio 26. Hallar las ecuaciones del movimiento compuesto por la simetría respecto de la recta $x = y = z$ y una traslación de vector $(1,1,1)^T$. ¿Tiene puntos fijos?

Ejercicio 27. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín y sean $L, L_1, L_2 \subseteq \mathcal{A}$ y $L' \subseteq \mathcal{A}'$ subespacios afines. Demostrar

1. $f(L)$ es subespacio afín,
2. $f^{-1}(L')$ es subespacio afín o el vacío.
3. f conserva las combinaciones afines y, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, f también conserva las combinaciones convexas.
4. si L_1, L_2 son paralelas, entonces $f(L_1), f(L_2)$ son paralelas.

Ejercicio 28. Se consideran en el plano $\mathbb{R}^2$ los puntos y rectas cuyas coordenadas y ecuaciones respecto del sistema de referencia canónico son

$$O = (0,0)^T, \quad P = (-1,-1)^T, \quad Q = (3,1)^T, \quad l_1 : x + y = 0, \quad l_2 : x = 0.$$

a) Calcular la matriz respecto del sistema de referencia canónico del movimiento f de $\mathbb{R}^2$ que cumple que $f(P) = O$, $f(l_1)$ es una recta paralela a l_1 y $Q \in f(l_2)$.

b) ¿Qué movimiento es f? Determinar sus elementos característicos.

Ejercicio 29. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ las rectas s y t cuyas ecuaciones implícitas respecto del sistema de referencia canónico son $s : x = y + 1 = 0$ y $t : z = y - 1 = 0$. ¿Cuántos movimientos f de $\mathbb{R}^3$ cumplen que $f(s) = t$ y $f(t) = s$? Probar que todos ellos son isometrías, es decir, dejan fijo el origen de coordenadas. Clasificar dichos movimientos.

Ejercicio 30. Calcular las ecuaciones del movimiento helicoidal que consiste en una rotación de $60°$ alrededor de la recta generada por el vector $u = (0, 0, -1)^T$ y compuesto con una traslación de vector $w = (0, 0, 1)^T$.