Apellidos y Nombre:

DNI:

Número de hojas:

Álgebra Lineal. Doble grado en Matemáticas, Estadística y Economía. 18/01/2022. Primer Parcial

Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) (6) El examen está valorado en 10 puntos. $\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

1. (2 puntos) Calcula la matriz de Hermite por filas de A, el rango r de A y matrices regulares P, Q tales que

$$\begin{pmatrix} I_r & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} = PAQ, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{K}).$$

¿Es válido tu resultado para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$?

2. (TEORÍA) En un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$:

a. (1 punto) define subespacio vectorial y pon varios ejemplos,

b. (1 punto) dados $m, n \in \mathbb{N}$ arbitrarios, escribe un sistema lineal homogéneo arbitrario de m ecuaciones y n incógnitas con coeficientes en $\mathbb{K}$ y demuestra que el conjunto de sus soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.

3. ¿Verdadero o falso? Si es verdadero, da un demostración y si es falso, encuentra un contraejemplo.

a. (1 punto) Si la matriz cuadrada $A = CF$ es el producto de una columna $C \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ por una fila $F \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$, entonces $\det(A) = 0$,

b. (1 punto) Si V es un espacio vectorial de dimensión finita n sobre $\mathbb{K}$ y $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \subseteq V$ es un sistema de generadores de V con $|S| = m > n$, entonces existe un vector $v \in V$ que admite dos expresiones distintas como combinación lineal de elementos de S.

4. (2 puntos) Para cada $n \geq 1$ y parámetros no nulos $a_1, a_2, \dots, a_n$, demuestra

$$\begin{vmatrix} 0 & 1\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = -a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right).$$

5. Sea $\operatorname{car}\mathbb{K} \neq 2$. Calcula justificadamente las siguientes dimensiones:

a. (1 punto) $\dim\left(W \cap M_3^{sim}(\mathbb{K})\right)$ y $\dim\left(W + M_3^{sim}(\mathbb{K})\right)$

b. (1 punto) $\dim\left(W \cap M_3^{anti}(\mathbb{K})\right)$ y $\dim\left(M_3(\mathbb{K})/(W \cap M_3^{anti}(\mathbb{K}))\right)$

donde $W = L(M_1, M_2, M_3)$, con $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3^{sim}(\mathbb{K})$ es el subespacio de matrices simétricas y $M_3^{anti}(\mathbb{K})$ es el subespacio de matrices antisimétricas de $M_3(\mathbb{K})$.