Apellidos y Nombre:

DNI:

Número de hojas:

Álgebra Lineal. Doble grado en Matemáticas, Estadística y Economía. 13/05/2022. Segundo Parcial

Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) (6) El examen está valorado en 10 puntos. $\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

1. (TEORÍA) Dados espacios vectoriales V, V' de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$:

a. (1 punto) define qué quiere decir que V es isomorfo a V' y demuestra que se trata de una relación de equivalencia,

b. (1 punto) demuestra que V es isomorfo a V' si y sólo si $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} V'$.

2. (2 puntos) Halla la matriz J de Jordan de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y una matriz P tal que $J = P^{-1}AP$.

3. ¿VERDADERO O FALSO? Da demostración o contraejemplo, según proceda.

a. (1 punto) para cada $n \in \mathbb{N}$, 1 es autovalor de A^n, siendo $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

b. (1 punto) Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín de dimensión finita $n \geq 2$ sobre $\mathbb{K}$. Sean $r \geq 3$ y $A_1, A_2, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$ puntos distintos dos a dos.

   a) Si $r = 3$, entonces A_1 es combinación afín de A_2, A_3 si y sólo si A_3 es combinación afín de A_1, A_2.

   b) Si $r > 3$, entonces A_1 es combinación afín de $A_2, A_3, \ldots, A_r$ si y sólo si A_r es combinación afín de $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$.

4. (2 puntos) En $\mathbb{R}^4$ se consideran el subespacio afín S de ecuaciones $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ y el punto $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calcula la proyección ortogonal $p_S(B)$ de B sobre S y la distancia entre B y S.

5. (2 puntos) En $\mathbb{R}^2$ se considera la parábola $\mathcal{C}$ de foco $F = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y directriz $r : y - x + 2 = 0$. Halla

a. ecuación y ecuación reducida de $\mathcal{C}$,

b. el eje de simetría de $\mathcal{C}$ y la distancia focal $\mathrm{d}(F, r)$,

c. 3 puntos de $\mathcal{C}$,

d. representación gráfica lo más precisa posible.

6. (MH) Halla la ecuación de la recta polar del punto $F' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{C}$ y los puntos de corte con $\mathcal{C}$. Saca conclusiones para esta parábola y/o para otras parábolas.