

Apellidos y Nombre:

DNI:

Número de hojas:

firma:

Álgebra Lineal. Doble grado en Matemáticas, Estadística y Economía. 27/06/2022. Examen Extraordinario Junio

Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) (6) El examen está valorado en 10 puntos.

\mathbb{K} denota un cuerpo.

1. (1.5 puntos) (Matriz Toeplitz cuasi triangular inferior) Para cada $n \in \mathbb{N}$ demuestra que $\Delta_n = g_1\Delta_{n-1} - g_2\Delta_{n-2} + g_3\Delta_{n-3} + \dots + (-1)^{n+1}g_n\Delta_0$, con $\Delta_0 = 1$ y

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} g_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ g_{n-1} & g_{n-2} & \dots & \dots & g_1 & 1 \\ g_n & g_{n-1} & \dots & \dots & \dots & g_1 \end{pmatrix}$$

2. (1 punto) Se considera la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. Determina la dimensión y unas ecuaciones implícitas del subespacio vectorial $W = \{X \in M_3(\mathbb{Q}) : XD = DX\}$.

3. (1 punto) ¿Qué deben satisfacer $a, b, c \in \mathbb{K}$ para que los vectores $(a, a^2, a^3)^T$, $(b, b^2, b^3)^T$ y $(c, c^2, c^3)^T$ sean linealmente independientes sobre \mathbb{K} ? Responde dando un conjunto finito de inecuaciones de grado 1 en $a, b, c \in \mathbb{K}$.

4. (TEORÍA)

- (.5 puntos) Define polinomio característico de una matriz cuadrada.
- (.5 puntos) Demuestra que matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.
- (.5 puntos) Da un ejemplo de matrices con el mismo polinomio característico que no sean semejantes.
- (.5 puntos) Relaciona autovalores, traza y determinante de una matriz cuadrada.

5. (1.5 puntos) En \mathbb{R}^4 se consideran dos planos afines:

$$\pi : \begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 1 \end{cases} \quad \pi' : \begin{cases} x + t = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Halla la posición relativa de π y π' (¿se cortan?, ¿se cruzan?, ¿son paralelos?, ¿son perpendiculares?). Halla la dimensión y ecuaciones implícitas de $\pi + \pi'$ (i.e., el mínimo subespacio afín que contiene a ambos.).

6. **¿VERDADERO O FALSO?** (1.5 puntos) Da demostración o contraejemplo, según proceda. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es matriz de una rotosimetría de eje generado por el vector $(1, 1, -1)^T$ y amplitud $\pi/3$.

7. (1.5 puntos) Halla la ecuación de la elipse cuyos focos son los vértices de la hipérbola de ecuación $4X^2 - 9Y^2 = 36$ y cuyos vértices son los focos de dicha hipérbola. Haz una representación gráfica de ambas curvas lo más precisa posible.