Apellidos y Nombre:

DNI:

Número de hojas:

firma:

Álgebra Lineal. Doble grado en Matemáticas, Estadística y Economía. 27/05/2022. Examen Final

Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) (6) El examen está valorado en 10 puntos. Los alumnos que tiene pendiente el curso completo deben escoger: ***opción A****: teoría del primer parcial y verdadero o falso del segundo u* ***opción B****: teoría del segundo parcial y verdadero o falso del primero. Además de lo anterior deben hacer una pregunta de 3 puntos de cada parcial. Los alumnos que opten a MH deben hacer el examen de curso completo, pero sustituyendo una pregunta cualquiera por la preguna MH.*

$\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

PRIMER PARCIAL

1. (**TEORÍA**) Dadas matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, diremos que A es *equivalente* a B (y escribiremos $A \sim B$) si B se puede obtener a partir de A mediante una cantidad finita de transformaciones elementales de filas y/o columnas. Demuestra que

a. (1 punto) $A \sim B$ si y sólo si existen matrices regulares P, Q tales que $B = PAQ$,
b. (1 punto) $\sim$ es una relación de equivalencia en $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

2. **¿VERDADERO O FALSO?** Da demostración o contraejemplo, según proceda.

a. (1 punto) $\operatorname{rg}(AB) \le \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$, con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$.
b. (1 punto) $\operatorname{tr}(AB^T) = \operatorname{tr}(A^T B)$ con $A, B \in M_m(\mathbb{K})$.

3. (3 puntos) Dados $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ y una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$, se considera la matriz *bi–bordeada* $A' = \begin{pmatrix} & & & & x_1 \\ & & & & x_2 \\ & & A & & \vdots \\ & & & & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{pmatrix}$. Demuestra que $\det(A') = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} x_i y_j \det(A_{ij})$ donde $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ es la submatriz de A obtenida eliminando la fila i–sima y la columna j–sima. Aplícalo al caso $n = 3$, $A = I_3$ y $x_i = y_i$, $i = 1, 2, 3$.

4. En $M_3(\mathbb{K})$ se consideran los subespacios vectoriales $U : \begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 0 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 0 \end{cases}$, $W : \begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0 \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} = 0 \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} = 0. \end{cases}$

a. (2 puntos) Calcula justificadamente las siguientes dimensiones: $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U \cap W)$. Averigua si $U + W$ es un hiperplano.

b. (1 punto) Determina una base de $M_3(\mathbb{K})/U$ y expresa $[I_3]_U$ como combinación lineal de los elementos de esa base.

SEGUNDO PARCIAL

5. (**TEORÍA**) (2 puntos) Define espacio afín y aplicación afín entre dos espacios afines. Pon un ejemplo de una aplicación afín no lineal de un espacio en sí mismo que tenga un único punto fijo.

6. **¿VERDADERO O FALSO?** Da demostración o contraejemplo, según proceda.

a. (1 punto) La aplicación $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por $(X,Y) \mapsto 2x_1x_2 + 2x_3x_4 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ es definida positiva, dando lugar a un producto escalar.

b. (1 punto) Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ son semejantes.

7. (3 puntos) En $\mathbb{R}^3$ se considera la recta E generada por el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determina, respecto de la base canónica,

a. la matriz A de la proyección ortogonal sobre E,
b. la matriz R de la rotación de eje E y amplitud $4\pi/3$,
c. la matriz S de la simetría sobre el plano $E^\perp$.

8. (3 puntos) Determina qué tipo de cónica es la que tiene ecuación $15x^2 + 15y^2 - 2xy - 224 = 0$ y halla

a. ecuación reducida,
b. semidistancia focal y excentricidad,
c. representación gráfica lo más precisa posible en todos los sistemas de referencia utilizados.

MH

9. (MH) Sean $\mathcal{C}$ una parábola y P un punto de su directriz. Halla la ecuación de la recta polar L del punto P respecto de $\mathcal{C}$ y los puntos de corte $L \cap \mathcal{C}$. Demuestra que las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ en dichos puntos son perpendiculares. '? Es cierto el recíproco: si las rectas son perpendiculares entonces el punto está en la directriz?